

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0121

LOG Titel: S. 111. Lemma aus der Theorie der Fourier'schen Reihen

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

I. Ueber einige Sätze aus der Theorie der Kreis- theilung von Gauss.

§. 111.

Wir schicken zunächst ein Lemma aus der Theorie der Fourier'schen Reihen voraus, deren Glieder nach den Cosinus der successiven Vielfachen eines Winkels fortschreiten; es wird in derselben nachgewiesen*), dass für alle reellen Werthe von x zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ mit Einschluss dieser Grenzen stets

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

ist, wenn $\varphi(x)$ eine innerhalb dieses Intervalles endliche und stetige Function bedeutet, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und wo die Coefficienten $a_0, a_1, a_2 \dots$ durch die Gleichung

$$a_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos sx \, dx$$

bestimmt werden. Hieraus folgt für $x = 0$

$$\pi \varphi(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos sx \, dx,$$

wo das Summenzeichen sich auf den Buchstaben s bezieht, für welchen Null und alle ganzen positiven und negativen Zahlwerthe der Reihe nach einzusetzen sind. Auf diesen der genannten Theorie entlehnten Satz stützen wir uns im Folgenden.

*) *Dirichlet: Sur la convergence des séries etc.* (Crelle's Journal IV); derselbe Beweis ist vereinfacht im Repertorium der Physik von Dove und Moser. Bd. I. Vergl. *B. Riemann: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* 1867.

Zunächst verallgemeinern wir denselben, indem wir das Integral

$$\int_0^{2h\pi} f(x) \cos sx \, dx$$

betrachten, in welchem h eine positive ganze Zahl, s eine positive oder negative ganze Zahl, und $f(x)$ eine Function bedeutet, welche innerhalb des Integrationsgebietes den obigen Bedingungen genügt. Man kann dasselbe in $2h$ Integrale von der Form

$$\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} f(x) \cos sx \, dx$$

zerlegen, wo für r der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2 \dots$ bis $2h - 1$ zu setzen sind; je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist, ersetzen wir die Integrationsvariable x durch $r\pi + x$, oder durch $(r + 1)\pi - x$; dadurch geht das vorstehende Integral in

$$\int_0^{\pi} f(r\pi + x) \cos sx \, dx, \text{ oder in } \int_0^{\pi} f((r + 1)\pi - x) \cos sx \, dx$$

über, und hieraus ergibt sich zufolge des obigen Satzes entsprechend

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} f(x) \cos sx \, dx = \pi f(r\pi), \text{ oder } = \pi f((r + 1)\pi),$$

wo die Summe links sich wieder auf alle ganzen Zahlen s bezieht. Setzt man hierin für r die ganzen Zahlen $0, 1, 2 \dots 2h - 1$, und addirt die so entstehenden Gleichungen, so erhält man den Satz

$$2\pi \left\{ \frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots + f(2(h-1)\pi) + \frac{1}{2}f(2h\pi) \right\} \\ = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2h\pi} f(x) \cos sx \, dx.$$