I. Ueber einige Sätze aus der Theorie der Kreistheilung von Gauss.

§. 111.

Wir schicken zunächst ein Lemma aus der Theorie der Fourier'schen Reihen voraus, deren Glieder nach den Cosinus der successiven Vielfachen eines Winkels fortschreiten; es wird in derselben nachgewiesen*), dass für alle reellen Werthe von x zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ mit Einschluss dieser Grenzen stets

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$

ist, wenn $\varphi(x)$ eine innerhalb dieses Intervalles endliche und stetige Function bedeutet, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und wo die Coefficienten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ durch die Gleichung

$$a_s = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cos sx \, dx$$

bestimmt werden. Hieraus folgt für $x = 0$

$$\pi \varphi(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \varphi(x) \cos sx \, dx,$$

wo das Summenzeichen sich auf den Buchstaben s bezieht, für welchen Null und alle ganzen positiven und negativen Zahlwerthe der Reihe nach einzusetzen sind. Auf diesen der genannten Theorie entlehnten Satz stützen wir uns im Folgenden.

---

*) *Dirichlet*: *Sur la convergence des séries etc.* (Crelle's Journal IV); derselbe Beweis ist vereinfacht im Repertorium der Physik von Dove und Moser. Bd. I. Vergl. *B. Riemann*: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* 1867.

Zunächst verallgemeinern wir denselben, indem wir das Integral

$$\int_0^{2h\pi} f(x)\cos sx\,dx$$

betrachten, in welchem h eine positive ganze Zahl, s eine positive oder negative ganze Zahl, und $f(x)$ eine Function bedeutet, welche innerhalb des Integrationsgebietes den obigen Bedingungen genügt. Man kann dasselbe in $2h$ Integrale von der Form

$$\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} f(x)\cos sx\,dx$$

zerlegen, wo für r der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2 \ldots$ bis $2h-1$ zu setzen sind; je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist, ersetzen wir die Integrationsvariabele x durch $r\pi + x$, oder durch $(r+1)\pi - x$; dadurch geht das vorstehende Integral in

$$\int_0^{\pi} f(r\pi + x)\cos sx\,dx, \text{ oder in } \int_0^{\pi} f((r+1)\pi - x)\cos sx\,dx$$

über, und hieraus ergiebt sich zufolge des obigen Satzes entsprechend

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} f(x)\cos sx\,dx = \pi f(r\pi), \quad \text{oder } = \pi f((r+1)\pi),$$

wo die Summe links sich wieder auf alle ganzen Zahlen s bezieht. Setzt man hierin für r die ganzen Zahlen $0, 1, 2 \ldots 2h-1$, und addirt die so entstehenden Gleichungen, so erhält man den Satz

$$2\pi\{\tfrac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \cdots + f(2(h-1)\pi) + \tfrac{1}{2}f(2h\pi)\}$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2h\pi} f(x)\cos sx\,dx.$$