## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie
**Autor:** Dirichlet, Peter
**Verlag:** Vieweg
**Ort:** Braunschweig
**Jahr:** 1871
**Kollektion:** Mathematica
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN30976923X
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

**LOG Id:** LOG_0122
**LOG Titel:** §. 112. Bestimmung des Werthes der Summe phi (h,n) für den Fall, in welchem n = 0 (mod. 4) und h = l ist
**LOG Typ:** chapter

## §. 112.

Wir beschäftigen uns nun mit den beiden folgenden bestimmten Integralen

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx, \quad q = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx;$$

dass dieselben wirklich bestimmte endliche Werthe besitzen, obgleich die Functionen unter den Integralzeichen für unendlich grosse Werthe von $x$ nicht unendlich klein werden, erkennt man leicht durch die Transformationen

$$p = 2\int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\, dy$$

$$q = 2\int_0^{\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy;$$

denn zerlegt man das ganze unendliche Integrationsgebiet der positiven Variabeln $y$ in solche Intervalle, in deren jedem die unter dem Integralzeichen befindliche Function ihr Zeichen nicht ändert, so ergiebt sich, dass die Bestandtheile, welche diesen Intervallen entsprechen, eine unendliche Reihe bilden, deren Glieder abwechselnde Zeichen haben und dem absoluten Werthe nach beständig und zwar ins Unendliche abnehmen; woraus folgt, dass diese Reihe, sowohl bei dem Integrale $p$, wie bei $q$, eine convergente ist. Für unsern Zweck genügt dieser Nachweis der Endlichkeit von $p$ und $q$; die numerischen Werthe dieser Integrale werden sich von selbst aus der folgenden Untersuchung ergeben*).

Beide Integrale bilden nur specielle Fälle des folgenden

---

*) *Dirichlet: Recherches sur diverses appl.* etc. §. 9. Vergl. *Dirichlet: Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies* (Crelle's Journal XVII).

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + x^2)\, dx = p \cos\delta - q \sin\delta,$$

wo $\delta$ eine beliebige Constante bedeutet; bezeichnen wir ferner mit $\alpha$ eine beliebige positive Constante und mit $\sqrt{\alpha}$ die *positiv* genommene Quadratwurzel aus $\alpha$, so ergiebt sich, wenn man die Integrationsvariabele $x$ durch $x\sqrt{\alpha}$ ersetzt, folgende Gleichung

$$\frac{\Delta}{\sqrt{\alpha}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + \alpha x^2)\, dx$$

(wäre $\sqrt{\alpha}$ negativ, so müsste man auch in dem Integrale rechter Hand die beiden Grenzen mit einander vertauschen). Wir führen nun eine zweite positive Constante $\beta$ ein, und zerlegen das vorstehende Integral in unendlich viele Bestandtheile von der Form

$$\int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta + \alpha x^2)\, dx,$$

wo für $s$ successive alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ einzusetzen sind; in jedem einzelnen solchen Integrale ersetzen wir die Integrationsvariabele $x$ durch $s\beta + x$, wodurch es in das folgende übergeht

$$\int_0^{\beta} \cos(\delta + \alpha s^2\beta^2 + 2\alpha s\beta x + \alpha x^2)\, dx.$$

Wir verfügen nun über die beiden bis jetzt ganz willkürlichen positiven Constanten $\alpha$ und $\beta$ folgendermaassen: unter $m$ verstehen wir irgend eine positive ganze Zahl, und setzen $\alpha\beta^2 = 2m\pi$, $2\alpha\beta = 1$, d. h. also

$$\beta = 4m\pi, \quad \alpha = \frac{1}{8m\pi}.$$

Da nun $s$ eine ganze Zahl ist, so wird

$$\cos(\delta + \alpha s^2\beta^2 + 2\alpha s\beta x + \alpha x^2) = \cos(\delta + sx + \alpha x^2)$$

$$= \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right)\cos sx - \sin\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right)\sin sx,$$

und folglich

$$\int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta + \alpha x^2)\, dx$$

$$= \int_0^{4m\pi} \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \cos sx\, dx - \int_0^{4m\pi} \sin\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \sin sx\, dx.$$

Das zweite Integral rechter Hand, welches unter dem Integralzeichen den Factor sin $sx$ enthält, verschwindet offenbar für $s = 0$, und nimmt für je zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von $s$ ebenfalls gleiche, aber entgegengesetzte Werthe an. Summiren wir daher den vorstehenden Ausdruck für alle ganzen Zahlwerthe $s$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so ergiebt sich

$$\frac{\Delta}{\sqrt{\alpha}} = \Delta\sqrt{8m\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \cos sx\, dx.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nun genau so gebaut wie in dem Satze am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen; setzen wir zur Abkürzung

$$f(x) = \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right),$$

so erhalten wir

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = 2\pi\left\{\tfrac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \cdots + f(2(2m-1)\pi) + \tfrac{1}{2}f(4m\pi)\right\},$$

wo links die Quadratwurzel

$$\sqrt{8m\pi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

*positiv* zu nehmen ist. Nun ist ferner, wenn $s$ irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$f(4m\pi + 2s\pi) = f(2s\pi),$$

also

$$f(2s\pi) = \tfrac{1}{2}f(2s\pi) + \tfrac{1}{2}f(4m\pi + 2s\pi);$$

mithin kann die in den Parenthesen eingeschlossene Summe auch in die Form

$$\tfrac{1}{2}\sum f(2s\pi)$$

gebracht werden, wo der Buchstabe $s$ die Zahlen

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots\ (4m-1)$$

oder irgend ein anderes vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul $4m$ durchlaufen muss; und man erhält also

$$\Delta \sqrt{8m\pi} = \pi \sum \cos\left(\delta + s^2 \frac{\pi}{2m}\right).$$

Setzt man ferner $4m = n$, so dass $n$ irgend eine ganze positive, aber durch 4 theilbare Zahl bedeutet, und bezeichnet man mit $\sqrt{n}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ die *positiv* genommenen Quadratwurzeln aus $n$ und $\frac{1}{2}\pi$, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an

$$\Delta \sqrt{n} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \cdot \sum \cos\left(\delta + s^2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

wo $s$ ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul $n$ durchlaufen muss. Nun ist

$$\Delta = p \cos\delta - q \sin\delta,$$

wo $p$, $q$ die obigen Integralwerthe bedeuten, die von $n$ und dem willkürlichen $\delta$ ganz unabhängig sind; wir können daher $p$ und $q$ durch eine specielle Annahme für $n$, am einfachsten durch die Annahme $n = 4$ bestimmen; auf diese Weise erhalten wir

$$2(p\cos\delta - q\sin\delta) = 2(\cos\delta - \sin\delta)\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi},$$

und in Folge der Willkürlichkeit von $\delta$

$$p = q = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.$$

Nachdem so die Werthe von $p$ und $q$ gefunden sind, nimmt unsere obige Gleichung folgende Gestalt an

$$\sum \cos\left(\delta + s^2 \frac{2\pi}{n}\right) = (\cos\delta - \sin\delta)\sqrt{n},$$

und sie zerfällt in die beiden folgenden:

$$\sum \cos\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right) = \sqrt{n}$$

$$\sum \sin\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right) = \sqrt{n};$$

hierin bedeutet also $n$ jede beliebige ganze positive Zahl, welche $\equiv 0 \pmod{4}$ ist, und $\sqrt{n}$ die *positiv* genommene Quadratwurzel aus $n$. Bezeichnet man zur Abkürzung $\sqrt{-1}$ mit $i$, und, wie gewöhnlich, mit $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so kann man beide Gleichungen in die eine Gleichung

$$\sum e^{s^2 \cdot \frac{2\pi i}{n}} = (1+i)\sqrt{n}$$

zusammenziehen, in welcher der Buchstabe $s$ ein vollständiges Restsystem (mod. $n$) zu durchlaufen hat.