

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0123

LOG Titel: S. 113. Allgemeine Sätze über die Summen $\phi(h,n)$

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 113.

Wir wollen jetzt Summen betrachten, welche die vorstehende als speciellen Fall enthalten; wir bezeichnen mit n irgend eine ganze positive Zahl, mit h irgend eine positive oder negative ganze Zahl, und setzen zur Abkürzung

$$\sum e^{s^2 \frac{2h\pi i}{n}} = \varphi(h, n),$$

wo der Summationsbuchstabe s irgend ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modulus n durchlaufen muss. Mit Hülfe dieser Bezeichnungsweise können wir den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz in folgender Weise ausdrücken:

$$\varphi(1, n) = (1 + i) \sqrt{n}, \quad \text{wenn } n \equiv 0 \pmod{4}.$$

Der Ausdruck $\varphi(h, n)$ besitzt nun die folgenden drei Eigenschaften:

1. Ist $h \equiv h' \pmod{n}$, so ist

$$\varphi(h, n) = \varphi(h', n);$$

dies folgt unmittelbar daraus, dass für jeden ganzzahligen Werth von s stets

$$e^{s^2 \frac{2h\pi i}{n}} = e^{s^2 \frac{2h'\pi i}{n}}$$

ist.

2. Ist a relative Primzahl gegen n , so ist

$$\varphi(ha^2, n) = \varphi(h, n);$$

denn es ist

$$\varphi(ha^2, n) = \sum e^{(as)^2 \frac{2h\pi i}{n}},$$

und wenn s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n durchläuft, so gilt (nach §. 18) dasselbe von as .

3. Sind m, n irgend zwei relative Primzahlen, und beide positiv, so ist

$$\varphi(hm, n) \varphi(hn, m) = \varphi(h, mn).$$

Es ist nämlich

$$\varphi(hm, n) = \sum e^{s^2 \frac{2hm\pi i}{n}}, \quad \varphi(hn, m) = \sum e^{t^2 \frac{2hn\pi i}{m}},$$

wo die Buchstaben s, t vollständige Restsysteme resp. in Bezug auf die Moduln n, m durchlaufen müssen; und folglich ist

$$\varphi(hm, n) \varphi(hn, m) = \sum e^{\left(\frac{ms^2}{n} + \frac{nt^2}{m}\right) 2h\pi i},$$

wo das Summenzeichen rechter Hand sich auf alle mn Combinationen jedes Werthes von s mit jedem Werthe von t bezieht. Da nun

$$\frac{ms^2}{n} + \frac{nt^2}{m} = \frac{(ms + nt)^2}{mn} - 2st$$

ist, und alle Multipla von $2\pi i$ im Exponenten fortgelassen werden können, so ist auch

$$\varphi(hm, n) \varphi(hn, m) = \sum e^{\frac{(ms+nt)^2 2h\pi i}{mn}},$$

wo das Summenzeichen sich wieder auf sämmtliche Werthe von s und t bezieht. Setzt man nun

$$ms + nt = r,$$

so nimmt r , wenn s und t alle ihnen zukommenden Werthe durchlaufen, im Ganzen mn Werthe an, und zwar sind diese alle incongruent nach dem Modul mn ; denn aus

$$ms + nt \equiv ms' + nt' \pmod{mn}$$

folgt

$$ms \equiv ms' \pmod{n}, \quad nt \equiv nt' \pmod{m}$$

und folglich, da m und n relative Primzahlen sind,

$$s \equiv s' \pmod{n}, \quad t \equiv t' \pmod{m};$$

d. h. die Zahl r nimmt nur dann Werthe an, welche nach dem Modul mn congruent sind, wenn die Werthe von s congruent nach dem Modul n , und gleichzeitig die Werthe von t congruent nach dem Modul m sind. Den mn verschiedenen Combinationen von s und t correspondiren daher mn Werthe von r , welche nach dem Modul mn incongruent sind, und folglich bilden diese Werthe von r ein vollständiges Restsystem nach dem Modul mn . Es ist folglich

$$\varphi(hm, n) \varphi(hn, m) = \sum e^{r^2 \frac{2h\pi i}{mn}} = \varphi(h, mn),$$

was zu beweisen war.