

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0124

**LOG Titel:** S. 114. Bestimmung von  $\phi(h,n)$

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## §. 114.

Mit Hülfe dieser Sätze können wir nun den Werth von  $\varphi(1, n)$ , welcher für den Fall, dass  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ist, schon in §. 112 gefunden ist, auch für alle andern Werthe der Zahl  $n$  bestimmen. Ist zunächst  $n$  irgend eine *ungerade* Zahl, so nehmen wir in dem letzten Satz des vorigen Paragraphen

$$h = 1, \quad m = 4,$$

und erhalten

$$\varphi(4, n) \varphi(n, 4) = \varphi(1, 4n);$$

nun ist nach dem zweiten Satze des vorigen Paragraphen

$$\varphi(4, n) = \varphi(2^2, n) = \varphi(1, n);$$

ferner ist

$$\varphi(n, 4) = 2(1 + i^n),$$

und nach dem in §. 112 gefundenen Resultat

$$\varphi(1, 4n) = (1 + i) \sqrt{4n} = 2(1 + i) \sqrt{n},$$

wo die Quadratwurzel  $\sqrt{n}$  wieder positiv genommen werden muss. Hieraus ergibt sich also

$$\varphi(1, n) \cdot 2(1 + i^n) = 2(1 + i) \sqrt{n}$$

oder

$$\varphi(1, n) = \frac{1 + i}{1 + i^n} \sqrt{n};$$

je nachdem nun  $n \equiv 1$  oder  $\equiv 3 \pmod{4}$  ist, wird

$$i^n = i \quad \text{oder} \quad = -i$$

und folglich

$$\frac{1 + i}{1 + i^n} = 1 \quad \text{oder} \quad = \frac{1 + i}{1 - i} = i,$$

also

$$\varphi(1, n) = \sqrt{n} \quad \text{oder} \quad = i \sqrt{n};$$

diese beiden Fälle lassen sich aber in die eine Formel

$$\varphi(1, n) = i^{1/4(n-1)^2} \sqrt{n}$$

zusammenfassen.

Ist endlich  $n$  durch 2, aber nicht durch 4 theilbar, also das Doppelte einer ungeraden Zahl, so setzen wir in dem dritten Satze des vorigen Paragraphen  $h = 1$ , ferner  $m = 2$ , und  $\frac{1}{2}n$  statt  $n$ , wodurch allen Bedingungen desselben Genüge geschieht, und erhalten

$$\varphi(2, \frac{1}{2}n) \varphi(\frac{1}{2}n, 2) = \varphi(1, n);$$

nun ist aber

$$\varphi(\frac{1}{2}n, 2) = 0,$$

und folglich auch

$$\varphi(1, n) = 0.$$

Wir wollen die so gewonnenen Resultate in folgender Tabelle zusammenfassen:

$$\varphi(1, n) = (1 + i)\sqrt{n}, \quad \text{wenn } n \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\varphi(1, n) = i^{\frac{1}{4}(n-1)^2}\sqrt{n}, \quad \text{wenn } n \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\varphi(1, n) = 0, \quad \text{wenn } n \equiv 2 \pmod{4}.$$

Von der grössten Wichtigkeit ist aber die Bemerkung, dass die in den beiden ersten Formeln vorkommende Quadratwurzel  $\sqrt{n}$  durchaus *positiv* genommen werden muss, wie es sich bei der Untersuchung in §. 112 herausgestellt hat. Ohne diese nähere Bestimmung würden die vorstehenden Sätze sich auf viel einfachere Art beweisen lassen; *Gauss* wurde zuerst in seiner Theorie der Kreistheilung auf die Betrachtung solcher Summen geführt\*); es ergiebt sich dort ohne Schwierigkeit der Werth des Quadrates derselben; der viel tiefer liegenden Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel widmete er aber eine besondere Abhandlung\*\*), in welcher er auf einem, von dem hier (in §. 112) eingeschlagenen gänzlich verschiedenen Wege, nämlich durch rein algebraische Zerlegung dieser Summen in Producte, vollständig zum Ziele gelangte.

\*) *D. A.* art. 356.

\*\*) *Summatio quarundam serierum singularium.* 1808.