Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0124
LOG Titel: §. 114. Bestimmung von phi (h,n)
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 114.

Mit Hülfe dieser Sätze können wir nun den Werth von $\varphi(1, n)$, welcher für den Fall, dass $n \equiv 0 \pmod{4}$ ist, schon in §. 112 gefunden ist, auch für alle andern Werthe der Zahl n bestimmen. Ist zunächst n irgend eine *ungerade* Zahl, so nehmen wir in dem letzten Satz des vorigen Paragraphen

$$h = 1, \quad m = 4,$$

und erhalten

$$\varphi(4, n)\, \varphi(n, 4) = \varphi(1, 4n);$$

nun ist nach dem zweiten Satze des vorigen Paragraphen

$$\varphi(4, n) = \varphi(2^2, n) = \varphi(1, n);$$

ferner ist

$$\varphi(n, 4) = 2(1 + i^n),$$

und nach dem in §. 112 gefundenen Resultat

$$\varphi(1, 4n) = (1 + i)\sqrt{4n} = 2(1 + i)\sqrt{n},$$

wo die Quadratwurzel $\sqrt{n}$ wieder positiv genommen werden muss. Hieraus ergiebt sich also

$$\varphi(1, n) \,.\, 2(1 + i^n) = 2(1 + i)\sqrt{n}$$

oder

$$\varphi(1, n) = \frac{1 + i}{1 + i^n}\sqrt{n};$$

je nachdem nun $n \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist, wird

$$i^n = i \quad \text{oder} = -i$$

und folglich

$$\frac{1 + i}{1 + i^n} = 1 \quad \text{oder} = \frac{1 + i}{1 - i} = i,$$

also

$$\varphi(1, n) = \sqrt{n} \quad \text{oder} = i\sqrt{n};$$

diese beiden Fälle lassen sich aber in die eine Formel

$$\varphi(1, n) = i^{\frac{1}{4}(n-1)^2}\sqrt{n}$$

zusammenfassen.

Ist endlich n durch 2, aber nicht durch 4 theilbar, also das Doppelte einer ungeraden Zahl, so setzen wir in dem dritten Satze des vorigen Paragraphen $h = 1$, ferner $m = 2$, und $\frac{1}{2}n$ statt n, wodurch allen Bedingungen desselben Genüge geschieht, und erhalten

$$\varphi(2, \tfrac{1}{2}n)\,\varphi(\tfrac{1}{2}n, 2) = \varphi(1, n);$$

nun ist aber

$$\varphi(\tfrac{1}{2}n, 2) = 0,$$

und folglich auch

$$\varphi(1, n) = 0.$$

Wir wollen die so gewonnenen Resultate in folgender Tabelle zusammenfassen:

$$\begin{array}{lll} \varphi(1, n) = (1+i)\sqrt{n}, & \text{wenn} & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \varphi(1, n) = i^{\frac{1}{4}(n-1)^2}\sqrt{n}, & \text{wenn} & n \equiv 1 \pmod{2} \\ \varphi(1, n) = 0, & \text{wenn} & n \equiv 2 \pmod{4}. \end{array}$$

Von der grössten Wichtigkeit ist aber die Bemerkung, dass die in den beiden ersten Formeln vorkommende Quadratwurzel $\sqrt{n}$ durchaus *positiv* genommen werden muss, wie es sich bei der Untersuchung in §. 112 herausgestellt hat. Ohne diese nähere Bestimmung würden die vorstehenden Sätze sich auf viel einfachere Art beweisen lassen; *Gauss* wurde zuerst in seiner Theorie der Kreistheilung auf die Betrachtung solcher Summen geführt*); es ergiebt sich dort ohne Schwierigkeit der Werth des Quadrates derselben; der viel tiefer liegenden Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel widmete er aber eine besondere Abhandlung**), in welcher er auf einem, von dem hier (in §. 112) eingeschlagenen gänzlich verschiedenen Wege, nämlich durch rein algebraische Zerlegung dieser Summen in Producte, vollständig zum Ziele gelangte.

---

*) *D. A.* art. 356.

**) *Summatio quarumdam serierum singularium.* 1808.