

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0125

LOG Titel: S. 115. Bestimmung von $\phi(h, n)$ wenn n eine ungerade Primzahl ist; dritter Beweis des Reciprocitätssatzes, und der Sätze über den Charakter der Zahlen $\mathbb{A}^? l$ und 2

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 115.

Wir suchen nun den Werth von $\varphi(h, n)$ auch für beliebige Werthe von h zu bestimmen, beschränken uns dabei aber auf den Fall, dass n eine ungerade Primzahl ist, die wir mit p bezeichnen wollen. Bezeichnen wir mit α die sämtlichen $\frac{1}{2}(p-1)$ incongruenten quadratischen Reste von p , mit β die $\frac{1}{2}(p-1)$ quadratischen Nichtreste, so ist (nach §. 33)

$$\varphi(h, p) = \sum e^{s^2 \frac{2h\pi i}{p}} = 1 + 2 \sum e^{\alpha \frac{2h\pi i}{p}};$$

da ferner

$$1 + \sum e^{\alpha \frac{2h\pi i}{p}} + \sum e^{\beta \frac{2h\pi i}{p}} = \sum e^{s \frac{2h\pi i}{p}} = 0$$

ist, sobald h nicht durch p theilbar ist, so können wir für diesen Fall mit Benutzung des Legendre'schen Symbols

$$\varphi(h, p) = \sum e^{\alpha \frac{2h\pi i}{p}} - \sum e^{\beta \frac{2h\pi i}{p}} = \sum \left(\frac{s}{p}\right) e^{s \frac{2h\pi i}{p}}$$

setzen, wo s die Werthe $1, 2, \dots, (p-1)$ durchläuft. Da ferner

$$\left(\frac{hs}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{s}{p}\right), \quad \left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{h}{p}\right) = 1$$

ist, so wird

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \sum \left(\frac{hs}{p}\right) e^{hs \frac{2\pi i}{p}},$$

oder, da h nicht theilbar durch p ist, und folglich hs gleichzeitig mit s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul p durchläuft (mit Ausschluss der Zahl $\equiv 0$),

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \sum \left(\frac{s}{p}\right) e^{s \frac{2\pi i}{p}};$$

für $h = 1$ ergibt sich

$$\varphi(1, p) = \sum \left(\frac{s}{p}\right) e^{s \frac{2\pi i}{p}}$$

und folglich (nach §. 114)

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \varphi(1, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

wo die Quadratwurzel \sqrt{p} wieder positiv zu nehmen ist. (Wenn h durch p theilbar ist, 'so ergibt sich unmittelbar aus der Definition dieser Summen $\varphi(h, p) = p$.)

Aus dem vorstehenden Resultate in Verbindung mit dem dritten Satze des §. 113 lässt sich nun auf ganz einfache Weise das Reciprocitätsgesetz in der Theorie der quadratischen Reste (§. 42) für je zwei positive ungerade Primzahlen p und q ableiten. Es ist nämlich

$$\varphi(q, p) = \left(\frac{q}{p}\right) i^{\frac{1}{4}(p-1)^2} \sqrt{p},$$

und ebenso

$$\varphi(p, q) = \left(\frac{p}{q}\right) i^{\frac{1}{4}(q-1)^2} \sqrt{q},$$

und nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\varphi(1, pq) = i^{\frac{1}{4}(pq-1)^2} \sqrt{pq},$$

und zwar sind alle Quadratwurzeln *positiv* zu nehmen, woraus folgt, dass

$$\sqrt{pq} = \sqrt{p} \sqrt{q}$$

ist. Nach dem dritten Satze des §. 113 ist nun

$$\varphi(p, q) \varphi(q, p) = \varphi(1, pq),$$

folglich

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) i^{\frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{1}{4}(q-1)^2} \sqrt{p} \sqrt{q} = i^{\frac{1}{4}(pq-1)^2} \sqrt{pq},$$

und also

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = i^\lambda,$$

wo zur Abkürzung λ für

$$\frac{(pq-1)^2 - (p-1)^2 - (q-1)^2}{4} = \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2} \left\{ (p+1)(q+1) - 2 \right\}$$

gesetzt ist; da nun

$$(p+1)(q+1) - 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = i^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{1}{2}(q-1)},$$

womit der Reciprocitätssatz von Neuem bewiesen ist. Dieser Beweis rührt ebenfalls von Gauss her*).

*) *Summatio quarundam serierum singularium.* 1808.

Auf ganz ähnliche Art lassen sich die Sätze (§§. 40, 41) über die Zahlen -1 und 2 beweisen. Aus dem obigen Satze

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \varphi(1, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p}$$

folgt nämlich

$$\varphi(-1, p) = \left(\frac{-1}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p};$$

andererseits ist

$$\varphi(-1, p) = \sum e^{s^2 \frac{2\pi(-i)}{p}},$$

und hieraus folgt, dass $\varphi(-1, p)$ durch Vertauschung von i mit $-i$ aus $\varphi(1, p)$ hervorgeht, dass also

$$\varphi(-1, p) = (-i)^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p}$$

ist; durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke, in denen \sqrt{p} beide Male positiv zu nehmen ist, ergibt sich aber

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{1/4(p-1)^2} = (-1)^{1/8(p-1)}.$$

Setzen wir ferner in dem dritten Satz des §. 113

$$h = 1, \quad m = 8, \quad n = p,$$

so erhalten wir

$$\varphi(8, p) \varphi(p, 8) = \varphi(1, 8p);$$

nun ist aber

$$\varphi(1, 8p) = (1+i) \sqrt{8p} = 4\sqrt{p} \cdot e^{1/4\pi i},$$

ferner

$$\varphi(p, 8) = 4 e^{1/4 p \pi i},$$

ferner (nach dem zweiten Satze des §. 113)

$$\varphi(8, p) = \varphi(2 \cdot 2^2, p) = \varphi(2, p),$$

d. h.

$$\varphi(8, p) = \left(\frac{2}{p}\right) \varphi(1, p) = \left(\frac{2}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p};$$

setzen wir diese Werthe für $\varphi(8, p)$, $\varphi(p, 8)$ und $\varphi(1, 8p)$ in die vorangehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{2}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p} \cdot 4 e^{1/4 p \pi i} = 4 \sqrt{p} \cdot e^{1/4 \pi i},$$

und hieraus folgt leicht

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{1/8(p^2-1)}.$$

Auf diese Weise sind alle Hauptsätze der Theorie der quadratischen Reste von Neuem bewiesen.