Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0125
LOG Titel: §. 115.   Bestimmung von phi (h, n) wenn n eine ungerade Primzahl ist; dritter Beweis des Reciprocitätssatzes, und der Sätze über den Charakter der Zahlen Â? l und 2
LOG Typ: chapter

§. 115.

Wir suchen nun den Werth von $\varphi(h, n)$ auch für beliebige Werthe von h zu bestimmen, beschränken uns dabei aber auf den Fall, dass n eine ungerade Primzahl ist, die wir mit p bezeichnen wollen. Bezeichnen wir mit α die sämmtlichen $\frac{1}{2}(p-1)$ incongruenten quadratischen Reste von p, mit β die $\frac{1}{2}(p-1)$ quadratischen Nichtreste, so ist (nach §. 33)

$$\varphi(h, p) = \Sigma\, e^{s^2 \frac{2h\pi i}{p}} = 1 + 2\, \Sigma\, e^{\alpha \frac{2h\pi i}{p}};$$

da ferner

$$1 + \Sigma\, e^{\alpha \frac{2h\pi i}{p}} + \Sigma\, e^{\beta \frac{2h\pi i}{p}} = \Sigma\, e^{s \frac{2h\pi i}{p}} = 0$$

ist, sobald h nicht durch p theilbar ist, so können wir für diesen Fall mit Benutzung des Legendre'schen Symbols

$$\varphi(h, p) = \Sigma\, e^{\alpha \frac{2h\pi i}{p}} - \Sigma\, e^{\beta \frac{2h\pi i}{p}} = \Sigma \left(\frac{s}{p}\right) e^{s \frac{2h\pi i}{p}}$$

setzen, wo s die Werthe $1, 2 \ldots (p-1)$ durchläuft. Da ferner

$$\left(\frac{hs}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{s}{p}\right),\quad \left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{h}{p}\right) = 1$$

ist, so wird

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \Sigma \left(\frac{hs}{p}\right) e^{hs \cdot \frac{2\pi i}{p}},$$

oder, da h nicht theilbar durch p ist, und folglich hs gleichzeitig mit s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul p durchläuft (mit Ausschluss der Zahl $\equiv 0$),

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \Sigma \left(\frac{s}{p}\right) e^{s \frac{2\pi i}{p}};$$

für $h = 1$ ergiebt sich

$$\varphi(1, p) = \Sigma \left(\frac{s}{p}\right) e^{s \frac{2\pi i}{p}}$$

und folglich (nach §. 114)

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \varphi(1, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

wo die Quadratwurzel $\sqrt{p}$ wieder positiv zu nehmen ist. (Wenn h durch p theilbar ist, so ergiebt sich unmittelbar aus der Definition dieser Summen $\varphi(h, p) = p$.)

Aus dem vorstehenden Resultate in Verbindung mit dem dritten Satze des §. 113 lässt sich nun auf ganz einfache Weise das Reciprocitätsgesetz in der Theorie der quadratischen Reste (§. 42) für je zwei positive ungerade Primzahlen p und q ableiten. Es ist nämlich

$$\varphi(q, p) = \left(\frac{q}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p},$$

und ebenso

$$\varphi(p, q) = \left(\frac{p}{q}\right) i^{1/4(q-1)^2} \sqrt{q},$$

und nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\varphi(1, pq) = i^{1/4(pq-1)^2} \sqrt{pq},$$

und zwar sind alle Quadratwurzeln *positiv* zu nehmen, woraus folgt, dass

$$\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$$

ist. Nach dem dritten Satze des §. 113 ist nun

$$\varphi(p, q)\, \varphi(q, p) = \varphi(1, pq),$$

folglich

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2 + 1/4(q-1)^2} \sqrt{p}\,\sqrt{q} = i^{1/4(pq-1)^2} \sqrt{pq},$$

und also

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = i^{\lambda},$$

wo zur Abkürzung λ für

$$\frac{(pq-1)^2 - (p-1)^2 - (q-1)^2}{4} = \frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}\left\{(p+1)(q+1) - 2\right\}$$

gesetzt ist; da nun

$$(p+1)(q+1) - 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = i^{1/2(p-1)(q-1)} = (-1)^{1/2(p-1) \cdot 1/2(q-1)},$$

womit der Reciprocitätssatz von Neuem bewiesen ist. Dieser Beweis rührt ebenfalls von *Gauss* her*).

---

*) *Summatio quarumdam serierum singularium.* 1808.

Auf ganz ähnliche Art lassen sich die Sätze (§§. 40, 41) über die Zahlen -1 und 2 beweisen. Aus dem obigen Satze

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \varphi(1, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p}$$

folgt nämlich

$$\varphi(-1, p) = \left(\frac{-1}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p};$$

andererseits ist

$$\varphi(-1, p) = \Sigma\, e^{s^2 \frac{2\pi(-i)}{p}},$$

und hieraus folgt, dass $\varphi(-1, p)$ durch Vertauschung von i mit $-i$ aus $\varphi(1, p)$ hervorgeht, dass also

$$\varphi(-1, p) = (-i)^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p}$$

ist; durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke, in denen $\sqrt{p}$ beide Male positiv zu nehmen ist, ergiebt sich aber

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{1/4(p-1)^2} = (-1)^{1/2(p-1)}.$$

Setzen wir ferner in dem dritten Satz des §. 113

$$h = 1, \quad m = 8, \quad n = p,$$

so erhalten wir

$$\varphi(8, p)\, \varphi(p, 8) = \varphi(1, 8p);$$

nun ist aber

$$\varphi(1, 8p) = (1 + i)\sqrt{8p} = 4\sqrt{p} \cdot e^{1/4\pi i},$$

ferner

$$\varphi(p, 8) = 4\, e^{1/4 p\pi i},$$

ferner (nach dem zweiten Satze des §. 113)

$$\varphi(8, p) = \varphi(2 \cdot 2^2, p) = \varphi(2, p),$$

d. h.

$$\varphi(8, p) = \left(\frac{2}{p}\right) \varphi(1, p) = \left(\frac{2}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p};$$

setzen wir diese Werthe für $\varphi(8, p)$, $\varphi(p, 8)$ und $\varphi(1, 8p)$ in die vorangehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{2}{p}\right) i^{1/4(p-1)^2} \sqrt{p} \cdot 4\, e^{1/4 p\pi i} = 4\sqrt{p} \cdot e^{1/4\pi i},$$

und hieraus folgt leicht

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{1/8(p^2-1)}.$$

Auf diese Weise sind alle Hauptsätze der Theorie der quadratischen Reste von Neuem bewiesen.