## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie
**Autor:** Dirichlet, Peter
**Verlag:** Vieweg
**Ort:** Braunschweig
**Jahr:** 1871
**Kollektion:** Mathematica
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN30976923X
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

**LOG Id:** LOG_0127
**LOG Titel:** II. Ueber den Grenzwerth einer unendlichen Reihe.
**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions



## Contact

## II. Ueber den Grenzwerth einer unendlichen Reihe.

§. 117.

*Lehrsatz: Sind a und b zwei positive Constanten, so convergirt die unendliche Reihe*

$$S = \frac{1}{b^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}} + \cdots$$

*für jeden positiven Werth von $\varrho$, und bei unbegrenzter Abnahme dieser positiven Zahl $\varrho$ nähert sich das Product $\varrho S$ dem Grenzwerthe $a^{-1}$.*

*Beweis.* Construiren wir für einen bestimmten positiven Werth von $\varrho$ die Curve, deren Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$y = \frac{1}{x^{1+\varrho}}$$

ist, so hat die Fläche, welche zwischen ihr und der unendlichen positiven Abscissenaxe liegt, von $x = b$ an gerechnet, den endlichen Werth

$$\int_b^{+\infty} y\,dx = \frac{1}{\varrho\, b^{\varrho}}.$$

Die Ordinaten der Curve, welche den Abscissen

$$b,\ b+a,\ b+2a,\ b+3a\ \ldots$$

entsprechen, sind

$$\frac{1}{b^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}}\cdots;$$

ihre Fusspuncte sind äquidistant und zerlegen die Abscissenaxe in unendlich viele Stücke von der Grösse $a$. Construirt man über jedem dieser Stücke als Grundlinie ein Rechteck, dessen Höhe gleich der letzten Ordinate in diesem Stück ist, so haben diese Rechtecke der Reihe nach den Flächeninhalt

$$\frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}},\ \frac{a}{(b+2a)^{1+\varrho}},\ \frac{a}{(b+3a)^{1+\varrho}}\cdots$$

Da nun die Ordinate $y$ der Curve mit stetig wachsendem $x$ stetig abnimmt, so ist jedes dieser Rechtecke kleiner als der über demselben Abscissenstück liegende, bis zur Curve ausgedehnte Flächenstreifen, und folglich ist die Summe von noch so vielen jener Rechtecke stets kleiner als die gesammte, oben von der Curve begrenzte Fläche; d. h. es ist

$$\frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{a}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\frac{a}{(b+3a)^{1+\varrho}}+\cdots<\frac{1}{\varrho b^{\varrho}},$$

oder es ist, wenn auf beiden Seiten $ab^{-1-\varrho}$ addirt wird,

$$aS<\frac{1}{\varrho b^{\varrho}}+\frac{a}{b^{1+\varrho}},$$

woraus folgt, dass die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe $S$ wirklich für jeden positiven Werth von $\varrho$ convergirt.

Construirt man nun über jedem der obigen Abscissenstücke als Grundlinie ein zweites Rechteck, dessen Höhe gleich der ersten Ordinate in diesem Stück ist, so sind diese Rechtecke, deren Flächeninhalt gleich

$$\frac{a}{b^{1+\varrho}},\ \frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}\cdots,$$

nothwendig grösser als die über denselben Stücken liegenden, bis zur Curve fortgesetzten Flächenstreifen, aus dem schon oben angeführten Grunde, weil mit wachsendem $x$ die Ordinate $y$ stetig abnimmt. Die Summe aller dieser Rechtecke ist daher grösser als die gesammte, oben von der Curve begrenzte Fläche, d. h. es ist

$$aS>\frac{1}{\varrho b^{\varrho}}.$$

Auf diese Weise ist der Werth der unendlichen Reihe $S$ und folglich auch der des Productes $\varrho S$ in zwei Grenzen eingeschlossen; es ist nämlich

$$\frac{1}{a b^{\varrho}} < \varrho S < \frac{1}{a b^{\varrho}} + \frac{\varrho}{b^{1+\varrho}}.$$

Wenn nun der positive Werth $\varrho$ unendlich klein wird, so nähert sich sowohl

$$\frac{1}{a b^{\varrho}}, \text{ als auch } \frac{1}{a b^{\varrho}} + \frac{\varrho}{b^{1+\varrho}}$$

einem und demselben Grenzwerth $a^{-1}$; mithin muss auch das Product $\varrho S$ sich demselben Grenzwerth $a^{-1}$ nähern, was zu beweisen war.

## §. 118.

Der so eben bewiesene Satz bildet nur einen speciellen Fall des folgenden, welcher seiner zahlreichen Anwendungen wegen von der grössten Wichtigkeit ist:

*Es sei $K$ ein System von positiven Zahlwerthen $k$, und $T$ diejenige unstetige Function von einer positiven stetigen Veränderlichen $t$, welche angiebt, wie viele der in $K$ enthaltenen Zahlwerthe $k$ den Werth $t$ nicht übertreffen; wenn nun mit unendlich wachsendem $t$ der Quotient $T : t$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwerthe $\omega$ nähert, so convergirt die Reihe*

$$S = \Sigma \frac{1}{k^{1+\varrho}}$$

*für jeden positiven Werth von $\varrho$, und das Product $\varrho S$ nähert sich mit unendlich abnehmendem $\varrho$ demselben Grenzwerthe $\omega$.*

Es wird gut sein, dem Beweise dieses allgemeinen Princips *) einige erläuternde Bemerkungen voranzuschicken. Zufolge der Bedeutung von $T$ entspricht jedem endlichen Werthe von $t$ auch

*) *Dirichlet: Recherches* etc. §. 1. — *Dirichlet: Sur un théorème relatif aux séries*, Crelle's Journal Bd. LIII.

ein endlicher Werth von $T$; denn wären in $K$ unendlich viele Zahlen $k$ enthalten, welche den endlichen Werth $t$ nicht übertreffen, so würde auch jedem grössern Werthe von $t$ eine unendliche Anzahl $T$ entsprechen; es würde daher das Verhältniss $T:t$ fortwährend unendlich gross sein; dies widerspricht aber der Annahme, dass $T:t$ sich einem endlichen Grenzwerth $\omega$ mit wachsendem $t$ nähert. Es leuchtet ferner ein, dass die ganze Zahl $T$ nur dann ihren Werth ändert, wenn $t$ einen Werth erreicht, welcher einer oder mehreren einander gleichen in $K$ enthaltenen Zahlen $k$ gleich ist, und zwar wird $T$ dann plötzlich um ebenso viele Einheiten zunehmen, als es Zahlen $k$ giebt, welche diesem Werth $t$ gleich sind.

In dem einfachsten Falle, wenn $K$ nur aus einer endlichen Anzahl von Zahlwerthen $k$ besteht, leuchtet die Richtigkeit des obigen Satzes unmittelbar ein; denn sobald $t$ dem grössten dieser Werthe $k$ gleich geworden ist, bleibt $T$ bei weiter wachsendem $t$ unverändert; es ist folglich $\omega = 0$; und da andererseits die Summe

$$\Sigma \frac{1}{k}$$

einen endlichen Werth hat, so wird auch das Product $\varrho S$ mit unendlich kleinem $\varrho$ ebenfalls unendlich klein werden.

Ebenso bestätigt sich der allgemeine Satz in dem speciellen Falle, welcher in dem vorigen Paragraphen behandelt ist. Das System $K$ besteht dort aus den sämmtlichen Zahlen von der Form $b + na$, die den sämmtlichen Werthen $0, 1, 2, 3 \ldots$ von $n$ entsprechen; wenn nun $t = b + na$ oder $> b + na$, aber $< b + (n+1)a$ ist, so ist entsprechend $T = n + 1$, und folglich nähert sich der Quotient $T:t$ mit unendlich wachsendem $t$, also auch mit unendlich wachsendem $n$ dem Grenzwerth

$$\omega = \frac{1}{a};$$

und in der That haben wir gefunden, dass dieser Werth auch zugleich der Grenzwerth des Productes $\varrho S$ ist, wenn die positive Grösse $\varrho$ unendlich klein wird.

## §. 119.

Wir gehen nun zu dem Beweise des allgemeinen Satzes über und beginnen damit, die in $K$ enthaltenen Zahlwerthe $k$ ihrer Grösse nach zu ordnen und mit Indices zu versehen, in der Weise, dass

$$k_1 \leqq k_2 \leqq k_3 \leqq k_4 \leqq k_5 \ldots$$

wird; dies ist offenbar möglich, da unterhalb eines beliebigen endlichen positiven Werthes $t$ immer nur eine endliche Anzahl von Zahlwerthen $k$ vorhanden ist; sind mehrere Zahlen $k$ gleich gross, so muss jede einzelne ihren besondern Index erhalten, so dass dann mehreren auf einander folgenden Indices gleich grosse Zahlwerthe $k$ entsprechen.

Sehen wir ab von dem interesselosen Falle, in welchem nur eine endliche Anzahl von Werthen $k$ vorhanden ist, so lässt sich zunächst zeigen, dass mit unbegrenzt wachsendem $n$ auch der Quotient

$$h_n = \frac{n}{k_n}$$

sich demselben Grenzwerth $\omega$ nähert, und durch diese Bemerkung wird dann der allgemeine Satz auf den vorher (§. 117) behandelten speciellen Fall zurückgeführt.

In der That, wenn $\delta$ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse bedeutet, so kann man entsprechend einen positiven Werth $\tau$ immer so gross wählen, dass für alle Werthe $t \geqq \tau$ die Bedingung

$$\omega - \delta < \frac{T}{t} < \omega + \delta$$

erfüllt ist. Es sei ferner $\nu$ derjenige Werth von $T$, welcher $t = \tau$ entspricht, also $k_\nu \leqq \tau < k_{\nu+1}$, und $n$ irgend eine der positiven ganzen Zahlen $\nu + 1$, $\nu + 2$, $\nu + 3 \ldots$; dann ist jedenfalls $k_n > \tau$, und wenn mehrere auf einander folgende Grössen $k$ denselben Werth wie $k_n$ besitzen, so sei $k_{m+1}$ die erste, $k_r$ die letzte von ihnen, also $n$ eine der Zahlen $m + 1$, $m + 2 \ldots r_r$. Nähert sich nun $t$ von $k_m$ ab wachsend dem Werthe $k_n$ immer mehr an, so bleibt $T = m$, und der Quotient $T : t$ nähert sich abnehmend unbegrenzt dem Werthe $m : k_n$, und da $m < n$ ist, so folgt, dass

$$\frac{T}{t} < h_n$$

ist, sobald $t$ sehr nahe unterhalb $k_n$ liegt; für $t = k_n$ wird aber $T = r \geqq n$, und folglich

$$\frac{T}{t} \geqq h_n.$$

Da nun bei diesem Wachsen von $t < k_n$ bis $t = k_n > \tau$ der Quotient $T:t$ stets zwischen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegt, und zugleich, wie eben gezeigt ist, von Werthen, die $< h_n$ sind, auf einen Werth springt, der $\geqq h_n$ ist, so muss auch $\omega - \delta < h_n < \omega + \delta$ sein. Wie klein also auch $\delta$ sein mag, so kann $n$ stets so gross gewählt werden, dass $h_n$ definitiv um weniger als $\delta$ von $\omega$ verschieden wird, d. h. $h_n$ nähert sich mit unbegrenzt wachsendem $n$ demselben Grenzwerth $\omega$.

Mit Hülfe dieses Resultates lässt sich der Beweis des allgemeinen Satzes leicht führen. Da nämlich

$$S = \Sigma \frac{1}{k^{1+\varrho}} = \frac{h_1^{1+\varrho}}{1^{1+\varrho}} + \frac{h_2^{1+\varrho}}{2^{1+\varrho}} + \frac{h_3^{1+\varrho}}{3^{1+\varrho}} + \cdots$$

ist, wo $h_n$ mit unendlich wachsendem $n$ sich dem Grenzwerthe $\omega$ nähert und folglich endlich, d. h. kleiner als eine angebbare Constante $H$ bleibt, so ist die Summe $S'$ der ersten $n$ Glieder der Reihe $S$ kleiner als das Product aus $H^{1+\varrho}$ und der Summe $\mathfrak{S}'$ der ersten $n$ Glieder der folgenden Reihe

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \cdots;$$

da nun die letztere (nach §. 117) für jeden *positiven* Werth von $\varrho$ convergirt, so *convergirt* auch die Reihe $S$. Setzt man nun $S = S' + S''$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$, so wird $S'' = h^{1+\varrho}\mathfrak{S}''$, wo $h$ einen (jedenfalls positiven) Mittelwerth aus den Werthen $h_{n+1}, h_{n+2} \ldots$ bedeutet. Ist daher $\delta$ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse, und $n$ so gross gewählt (was stets möglich ist), dass alle diese Werthe zwischen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen, so wird auch $h$, und für hinreichend kleine Werthe von $\varrho$ auch $h^{1+\varrho}$ zwischen denselben Grenzen liegen. Da ferner (nach §. 117) das Product $\varrho\mathfrak{S}''$ mit unbegrenzt abnehmendem positiven $\varrho$ sich der Einheit unendlich annähert, so wird für hinreichend kleine Werthe von $\varrho$ auch das Product $\varrho S'' = h^{1+\varrho}.\varrho\mathfrak{S}''$ zwischen den Grenzen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen. Da endlich $\varrho S'$ gleichzeitig unendlich klein wird, weil $S'$ nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält, so wird für sehr kleine Werthe von $\varrho$ auch $\varrho S = \varrho S' + \varrho S''$ zwischen denselben Grenzen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen. Hiermit ist also auch bewiesen, dass mit unbegrenzt abnehmendem $\varrho$ das Product $\varrho S$ *sich dem Grenzwerthe* $\omega$ *unendlich annähert**).

---

*) Es verdient bemerkt zu werden, dass man den obigen allgemeinen Satz nicht umkehren darf. Besteht z. B. das System $K$ aus einer Zahl $k = 1$, aus $(\theta - 1)$ Zahlen $k = \theta$, aus $(\theta^2 - \theta)$ Zahlen $k = \theta^2$, aus $(\theta^3 - \theta^2)$ Zahlen $k = \theta^3$ u. s. f., wo $\theta$ eine positive ganze Zahl $> 1$ bedeutet, so ist für jeden positiven Werth von $\varrho$

$$S = 1 + \frac{\theta - 1}{\theta(\theta^\varrho - 1)},$$

und das Product $\varrho S$ nähert sich mit unendlich abnehmendem $\varrho$ dem Grenzwerthe

$$\omega = \frac{\theta - 1}{\theta \log \theta},$$

während der Quotient $T : t$ bei unendlich wachsendem $t$ fortwährend von dem Werth 1 abnehmend durch $\omega$ hindurch geht bis zu dem Werth $1 : \theta$, dann aber sogleich wieder zu dem Werth 1 zurückspringt, um von Neuem denselben Veränderungsprocess zu erleiden (vergl. §. 144).