

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0128

LOG Titel: S. 117. Beweis eines Satzes aus der Theorie der harmonischen Reihen

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

II. Ueber den Grenzwert einer unendlichen Reihe.

§. 117.

Lehrsatz: Sind a und b zwei positive Constanten, so convergirt die unendliche Reihe

$$S = \frac{1}{b^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}} + \dots$$

für jeden positiven Werth von ϱ , und bei unbegrenzter Abnahme dieser positiven Zahl ϱ nähert sich das Product ϱS dem Grenzwert a^{-1} .

Beweis. Construiren wir für einen bestimmten positiven Werth von ϱ die Curve, deren Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$y = \frac{1}{x^{1+\varrho}}$$

ist, so hat die Fläche, welche zwischen ihr und der unendlichen positiven Abscissenaxe liegt, von $x = b$ an gerechnet, den endlichen Werth

$$\int_b^{+\infty} y dx = \frac{1}{\varrho b^\varrho}.$$

Die Ordinaten der Curve, welche den Abscissen

$$b, b+a, b+2a, b+3a \dots$$

entsprechen, sind

$$\frac{1}{b^{1+\varrho}}, \frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}}, \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}, \frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}} \dots;$$

ihre Fusspunkte sind äquidistant und zerlegen die Abscissenaxe in unendlich viele Stücke von der Grösse a . Construirt man über jedem dieser Stücke als Grundlinie ein Rechteck, dessen Höhe gleich der letzten Ordinate in diesem Stück ist, so haben diese Rechtecke der Reihe nach den Flächeninhalt

$$\frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}}, \frac{a}{(b+2a)^{1+\varrho}}, \frac{a}{(b+3a)^{1+\varrho}} \dots$$

Da nun die Ordinate y der Curve mit stetig wachsendem x stetig abnimmt, so ist jedes dieser Rechtecke kleiner als der über demselben Abscissenstück liegende, bis zur Curve ausgedehnte Flächenstreifen, und folglich ist die Summe von noch so vielen jener Rechtecke stets kleiner als die gesammte, oben von der Curve begrenzte Fläche; d. h. es ist

$$\frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}} + \frac{a}{(b+2a)^{1+\varrho}} + \frac{a}{(b+3a)^{1+\varrho}} + \dots < \frac{1}{\varrho b^\varrho},$$

oder es ist, wenn auf beiden Seiten $ab^{-1-\varrho}$ addirt wird,

$$aS < \frac{1}{\varrho b^\varrho} + \frac{a}{b^{1+\varrho}},$$

woraus folgt, dass die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe S wirklich für jeden positiven Werth von ϱ convergirt.

Construirt man nun über jedem der obigen Abscissenstücke als Grundlinie ein zweites Rechteck, dessen Höhe gleich der ersten Ordinate in diesem Stück ist, so sind diese Rechtecke, deren Flächeninhalt gleich

$$\frac{a}{b^{1+\varrho}}, \frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}}, \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}} \dots,$$

nothwendig grösser als die über denselben Stücken liegenden, bis zur Curve fortgesetzten Flächenstreifen, aus dem schon oben angeführten Grunde, weil mit wachsendem x die Ordinate y stetig abnimmt. Die Summe aller dieser Rechtecke ist daher grösser als die gesammte, oben von der Curve begrenzte Fläche, d. h. es ist

$$aS > \frac{1}{\varrho b^\varrho}.$$