II. Ueber den Grenzwerth einer unendlichen Reihe.

§. 117.

Lehrsatz: Sind a und b zwei positive Constanten, so convergirt die unendliche Reihe

$$S = \frac{1}{b^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}} + \cdots$$

für jeden positiven Werth von ϱ, *und bei unbegrenzter Abnahme dieser positiven Zahl* ϱ *nähert sich das Product* ϱS *dem Grenzwerthe* a^{-1}.

Beweis. Construiren wir für einen bestimmten positiven Werth von ϱ die Curve, deren Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$y = \frac{1}{x^{1+\varrho}}$$

ist, so hat die Fläche, welche zwischen ihr und der unendlichen positiven Abscissenaxe liegt, von $x = b$ an gerechnet, den endlichen Werth

$$\int_b^{+\infty} y\,dx = \frac{1}{\varrho\, b^{\varrho}}.$$

Die Ordinaten der Curve, welche den Abscissen

$$b,\quad b+a,\quad b+2a,\quad b+3a\ \ldots$$

entsprechen, sind

$$\frac{1}{b^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}}\cdots;$$

ihre Fusspuncte sind äquidistant und zerlegen die Abscissenaxe in unendlich viele Stücke von der Grösse a. Construirt man über jedem dieser Stücke als Grundlinie ein Rechteck, dessen Höhe gleich der letzten Ordinate in diesem Stück ist, so haben diese Rechtecke der Reihe nach den Flächeninhalt

$$\frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}},\ \frac{a}{(b+2a)^{1+\varrho}},\ \frac{a}{(b+3a)^{1+\varrho}}\cdots$$

Da nun die Ordinate y der Curve mit stetig wachsendem x stetig abnimmt, so ist jedes dieser Rechtecke kleiner als der über demselben Abscissenstück liegende, bis zur Curve ausgedehnte Flächenstreifen, und folglich ist die Summe von noch so vielen jener Rechtecke stets kleiner als die gesammte, oben von der Curve begrenzte Fläche; d. h. es ist

$$\frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{a}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\frac{a}{(b+3a)^{1+\varrho}}+\cdots<\frac{1}{\varrho b^{\varrho}},$$

oder es ist, wenn auf beiden Seiten $ab^{-1-\varrho}$ addirt wird,

$$aS<\frac{1}{\varrho b^{\varrho}}+\frac{a}{b^{1+\varrho}},$$

woraus folgt, dass die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe S wirklich für jeden positiven Werth von ϱ convergirt.

Construirt man nun über jedem der obigen Abscissenstücke als Grundlinie ein zweites Rechteck, dessen Höhe gleich der ersten Ordinate in diesem Stück ist, so sind diese Rechtecke, deren Flächeninhalt gleich

$$\frac{a}{b^{1+\varrho}},\ \frac{a}{(b+a)^{1+\varrho}},\ \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}\cdots,$$

nothwendig grösser als die über denselben Stücken liegenden, bis zur Curve fortgesetzten Flächenstreifen, aus dem schon oben angeführten Grunde, weil mit wachsendem x die Ordinate y stetig abnimmt. Die Summe aller dieser Rechtecke ist daher grösser als die gesammte, oben von der Curve begrenzte Fläche, d. h. es ist

$$aS>\frac{1}{\varrho b^{\varrho}}.$$