Auf diese Weise ist der Werth der unendlichen Reihe S und folglich auch der des Productes ϱS in zwei Grenzen eingeschlossen; es ist nämlich

$$\frac{1}{a b^\varrho} < \varrho S < \frac{1}{a b^\varrho} + \frac{\varrho}{b^{1+\varrho}}.$$

Wenn nun der positive Werth ϱ unendlich klein wird, so nähert sich sowohl

$$\frac{1}{a b^\varrho}, \text{ als auch } \frac{1}{a b^\varrho} + \frac{\varrho}{b^{1+\varrho}}$$

einem und demselben Grenzwerth a^{-1}; mithin muss auch das Product ϱS sich demselben Grenzwerth a^{-1} nähern, was zu beweisen war.

§. 118.

Der so eben bewiesene Satz bildet nur einen speciellen Fall des folgenden, welcher seiner zahlreichen Anwendungen wegen von der grössten Wichtigkeit ist:

Es sei K ein System von positiven Zahlwerthen k, und T diejenige unstetige Function von einer positiven stetigen Veränderlichen t, welche angiebt, wie viele der in K enthaltenen Zahlwerthe k den Werth t nicht übertreffen; wenn nun mit unendlich wachsendem t der Quotient $T : t$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwerthe ω nähert, so convergirt die Reihe

$$S = \Sigma \frac{1}{k^{1+\varrho}}$$

für jeden positiven Werth von ϱ, und das Product ϱS nähert sich mit unendlich abnehmendem ϱ demselben Grenzwerthe ω.

Es wird gut sein, dem Beweise dieses allgemeinen Princips*) einige erläuternde Bemerkungen voranzuschicken. Zufolge der Bedeutung von T entspricht jedem endlichen Werthe von t auch

*) *Dirichlet: Recherches* etc. §. 1. — *Dirichlet: Sur un théorème relatif aux séries*, Crelle's Journal Bd. LIII.

ein endlicher Werth von T; denn wären in K unendlich viele Zahlen k enthalten, welche den endlichen Werth t nicht übertreffen, so würde auch jedem grössern Werthe von t eine unendliche Anzahl T entsprechen; es würde daher das Verhältniss $T:t$ fortwährend unendlich gross sein; dies widerspricht aber der Annahme, dass $T:t$ sich einem endlichen Grenzwerth ω mit wachsendem t nähert. Es leuchtet ferner ein, dass die ganze Zahl T nur dann ihren Werth ändert, wenn t einen Werth erreicht, welcher einer oder mehreren einander gleichen in K enthaltenen Zahlen k gleich ist, und zwar wird T dann plötzlich um ebenso viele Einheiten zunehmen, als es Zahlen k giebt, welche diesem Werth t gleich sind.

In dem einfachsten Falle, wenn K nur aus einer endlichen Anzahl von Zahlwerthen k besteht, leuchtet die Richtigkeit des obigen Satzes unmittelbar ein; denn sobald t dem grössten dieser Werthe k gleich geworden ist, bleibt T bei weiter wachsendem t unverändert; es ist folglich $\omega = 0$; und da andererseits die Summe

$$\Sigma \frac{1}{k}$$

einen endlichen Werth hat, so wird auch das Product ϱS mit unendlich kleinem ϱ ebenfalls unendlich klein werden.

Ebenso bestätigt sich der allgemeine Satz in dem speciellen Falle, welcher in dem vorigen Paragraphen behandelt ist. Das System K besteht dort aus den sämmtlichen Zahlen von der Form $b + na$, die den sämmtlichen Werthen $0, 1, 2, 3 \ldots$ von n entsprechen; wenn nun $t = b + na$ oder $> b + na$, aber $< b + (n+1)a$ ist, so ist entsprechend $T = n + 1$, und folglich nähert sich der Quotient $T:t$ mit unendlich wachsendem t, also auch mit unendlich wachsendem n dem Grenzwerth

$$\omega = \frac{1}{a};$$

und in der That haben wir gefunden, dass dieser Werth auch zugleich der Grenzwerth des Productes ϱS ist, wenn die positive Grösse ϱ unendlich klein wird.