

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0129

LOG Titel: S. 118. Ausspruch und Erläuterung eines allgemeineren Satzes.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Auf diese Weise ist der Werth der unendlichen Reihe S und folglich auch der des Productes ϱS in zwei Grenzen eingeschlossen; es ist nämlich

$$\frac{1}{ab^{\varrho}} < \varrho S < \frac{1}{ab^{\varrho}} + \frac{\varrho}{b^{1+\varrho}}.$$

Wenn nun der positive Werth ϱ unendlich klein wird, so nähert sich sowohl

$$\frac{1}{ab^{\varrho}}, \text{ als auch } \frac{1}{ab^{\varrho}} + \frac{\varrho}{b^{1+\varrho}}$$

einem und demselben Grenzwert a^{-1} ; mithin muss auch das Product ϱS sich demselben Grenzwert a^{-1} nähern, was zu beweisen war.

§. 118.

Der so eben bewiesene Satz bildet nur einen speciellen Fall des folgenden, welcher seiner zahlreichen Anwendungen wegen von der grössten Wichtigkeit ist:

Es sei K ein System von positiven Zahlwerthen k , und T diejenige unstetige Function von einer positiven stetigen Veränderlichen t , welche angiebt, wie viele der in K enthaltenen Zahlwerthe k den Werth t nicht übertreffen; wenn nun mit unendlich wachsendem t der Quotient $T : t$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwert ω nähert, so convergirt die Reihe

$$S = \sum \frac{1}{k^{1+\varrho}}$$

für jeden positiven Werth von ϱ , und das Product ϱS nähert sich mit unendlich abnehmendem ϱ demselben Grenzwert ω .

Es wird gut sein, dem Beweise dieses allgemeinen Princips*) einige erläuternde Bemerkungen voranzuschicken. Zufolge der Bedeutung von T entspricht jedem endlichen Werthe von t auch

*) *Dirichlet: Recherches etc. §. 1. — Dirichlet: Sur un théorème relatif aux séries, Crelle's Journal Bd. LIII.*

ein endlicher Werth von T ; denn wären in K unendlich viele Zahlen k enthalten, welche den endlichen Werth t nicht übertreffen, so würde auch jedem grössern Werthe von t eine unendliche Anzahl T entsprechen; es würde daher das Verhältniss $T : t$ fortwährend unendlich gross sein; dies widerspricht aber der Annahme, dass $T : t$ sich einem endlichen Grenzwert ω mit wachsendem t nähert. Es leuchtet ferner ein, dass die ganze Zahl T nur dann ihren Werth ändert, wenn t einen Werth erreicht, welcher einer oder mehreren einander gleichen in K enthaltenen Zahlen k gleich ist, und zwar wird T dann plötzlich um ebenso viele Einheiten zunehmen, als es Zahlen k giebt, welche diesem Werth t gleich sind.

In dem einfachsten Falle, wenn K nur aus einer endlichen Anzahl von Zahlwerthen k besteht, leuchtet die Richtigkeit des obigen Satzes unmittelbar ein; denn sobald t dem grössten dieser Werthe k gleich geworden ist, bleibt T bei weiter wachsendem t unverändert; es ist folglich $\omega = 0$; und da andererseits die Summe

$$\Sigma \frac{1}{k}$$

einen endlichen Werth hat, so wird auch das Product ρS mit unendlich kleinem ρ ebenfalls unendlich klein werden.

Ebenso bestätigt sich der allgemeine Satz in dem speciellen Falle, welcher in dem vorigen Paragraphen behandelt ist. Das System K besteht dort aus den sämtlichen Zahlen von der Form $b + na$, die den sämtlichen Werthen $0, 1, 2, 3 \dots$ von n entsprechen; wenn nun $t = b + na$ oder $> b + na$, aber $< b + (n + 1)a$ ist, so ist entsprechend $T = n + 1$, und folglich nähert sich der Quotient $T : t$ mit unendlich wachsendem t , also auch mit unendlich wachsendem n dem Grenzwert

$$\omega = \frac{1}{a};$$

und in der That haben wir gefunden, dass dieser Werth auch zugleich der Grenzwert des Productes ρS ist, wenn die positive Grösse ρ unendlich klein wird.