

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0130

LOG Titel: S. 119. Beweis desselben

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 119.

Wir gehen nun zu dem Beweise des allgemeinen Satzes über und beginnen damit, die in K enthaltenen Zahlwerthe k ihrer Grösse nach zu ordnen und mit Indices zu versehen, in der Weise, dass

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq k_5 \dots$$

wird; dies ist offenbar möglich, da unterhalb eines beliebigen endlichen positiven Werthes t immer nur eine endliche Anzahl von Zahlwerthen k vorhanden ist; sind mehrere Zahlen k gleich gross, so muss jede einzelne ihren besondern Index erhalten, so dass dann mehreren auf einander folgenden Indices gleich grosse Zahlwerthe k entsprechen.

Sehen wir ab von dem interesselosen Falle, in welchem nur eine endliche Anzahl von Werthen k vorhanden ist, so lässt sich zunächst zeigen, dass mit unbegrenzt wachsendem n auch der Quotient

$$h_n = \frac{n}{k_n}$$

sich demselben Grenzwert ω nähert, und durch diese Bemerkung wird dann der allgemeine Satz auf den vorher (§. 117) behandelten speciellen Fall zurückgeführt.

In der That, wenn δ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse bedeutet, so kann man entsprechend einen positiven Werth τ immer so gross wählen, dass für alle Werthe $t \geq \tau$ die Bedingung

$$\omega - \delta < \frac{T}{t} < \omega + \delta$$

erfüllt ist. Es sei ferner ν derjenige Werth von T , welcher $t = \tau$ entspricht, also $k_\nu \leq \tau < k_{\nu+1}$, und n irgend eine der positiven ganzen Zahlen $\nu + 1, \nu + 2, \nu + 3 \dots$; dann ist jedenfalls $k_n > \tau$, und wenn mehrere auf einander folgende Grössen k denselben Werth wie k_n besitzen, so sei k_{m+1} die erste, k_r die letzte von ihnen, also n eine der Zahlen $m + 1, m + 2 \dots r$. Nähert sich nun t von k_m ab wachsend dem Werthe k_n immer mehr an, so bleibt $T = m$, und der Quotient $T:t$ nähert sich abnehmend unbegrenzt dem Werthe $m:k_n$, und da $m < n$ ist, so folgt, dass

$$\frac{T}{t} < h_n$$

ist, sobald t sehr nahe unterhalb k_n liegt; für $t = k_n$ wird aber $T = r \geq n$, und folglich

$$\frac{T}{t} \geq h_n.$$

Da nun bei diesem Wachsen von $t < k_n$ bis $t = k_n > \tau$ der Quotient $T:t$ stets zwischen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegt, und zugleich, wie eben gezeigt ist, von Werthen, die $< h_n$ sind, auf einen Werth springt, der $\geq h_n$ ist, so muss auch $\omega - \delta < h_n < \omega + \delta$ sein. Wie klein also auch δ sein mag, so kann n stets so gross gewählt werden, dass h_n definitiv um weniger als δ von ω verschieden wird, d. h. h_n nähert sich mit unbegrenzt wachsendem n demselben Grenzwert ω .

Mit Hülfe dieses Resultates lässt sich der Beweis des allgemeinen Satzes leicht führen. Da nämlich

$$S = \sum \frac{1}{k^{1+q}} = \frac{h_1^{1+q}}{1^{1+q}} + \frac{h_2^{1+q}}{2^{1+q}} + \frac{h_3^{1+q}}{3^{1+q}} + \dots$$

ist, wo h_n mit unendlich wachsendem n sich dem Grenzwert ω nähert und folglich endlich, d. h. kleiner als eine angebbare Constante H bleibt, so ist die Summe S' der ersten n Glieder der Reihe S kleiner als das Product aus H^{1+q} und der Summe \mathfrak{S}' der ersten n Glieder der folgenden Reihe

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{1^{1+q}} + \frac{1}{2^{1+q}} + \frac{1}{3^{1+q}} + \dots;$$

da nun die letztere (nach §. 117) für jeden positiven Werth von q convergirt, so convergirt auch die Reihe S . Setzt man nun $S = S' + S''$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$, so wird $S'' = h^{1+q} \mathfrak{S}''$, wo h einen (jedenfalls positiven) Mittelwerth (aus den Werthen $h_{n+1}, h_{n+2} \dots$) bedeutet. Ist daher δ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse, und n so gross gewählt (was stets möglich ist), dass alle diese Werthe zwischen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen, so wird auch h , und für hinreichend kleine Werthe von q auch h^{1+q} zwischen denselben Grenzen liegen. Da ferner (nach §. 117) das Product $q \mathfrak{S}''$ mit unbegrenzt abnehmendem positiven q sich der Einheit unendlich annähert, so wird für hinreichend kleine Werthe von q auch das Product $q S'' = h^{1+q} \cdot q \mathfrak{S}''$ zwischen den Grenzen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen. Da endlich $q S'$ gleichzeitig unendlich klein wird, weil S' nur

eine endliche Anzahl von Gliedern enthält, so wird für sehr kleine Werthe von ρ auch $\rho S = \rho S' + \rho S''$ zwischen denselben Grenzen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen. Hiermit ist also auch bewiesen, dass mit unbegrenzt abnehmendem ρ das Product ρS sich dem Grenzwerte ω unendlich annähert*).

*) Es verdient bemerkt zu werden, dass man den obigen allgemeinen Satz nicht umkehren darf. Besteht z. B. das System K aus einer Zahl $k = 1$, aus $(\theta - 1)$ Zahlen $k = \theta$, aus $(\theta^2 - \theta)$ Zahlen $k = \theta^2$, aus $(\theta^3 - \theta^2)$ Zahlen $k = \theta^3$ u. s. f., wo θ eine positive ganze Zahl > 1 bedeutet, so ist für jeden positiven Werth von ρ

$$S = 1 + \frac{\theta - 1}{\theta(\theta\rho - 1)},$$

und das Product ρS nähert sich mit unendlich abnehmendem ρ dem Grenzwerte

$$\omega = \frac{\theta - 1}{\theta \log \theta},$$

während der Quotient $T : t$ bei unendlich wachsendem t fortwährend von dem Werth 1 abnehmend durch ω hindurch geht bis zu dem Werth $1 : \theta$, dann aber sogleich wieder zu dem Werth 1 zurückspringt, um von Neuem denselben Veränderungsprocess zu erleiden (vergl. §. 144).
