Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0130
LOG Titel: §. 119. Beweis desselben
LOG Typ: chapter

§. 119.

Wir gehen nun zu dem Beweise des allgemeinen Satzes über und beginnen damit, die in K enthaltenen Zahlwerthe k ihrer Grösse nach zu ordnen und mit Indices zu versehen, in der Weise, dass

$$k_1 \leqq k_2 \leqq k_3 \leqq k_4 \leqq k_5 \ldots$$

wird; dies ist offenbar möglich, da unterhalb eines beliebigen endlichen positiven Werthes t immer nur eine endliche Anzahl von Zahlwerthen k vorhanden ist; sind mehrere Zahlen k gleich gross, so muss jede einzelne ihren besondern Index erhalten, so dass dann mehreren auf einander folgenden Indices gleich grosse Zahlwerthe k entsprechen.

Sehen wir ab von dem interesselosen Falle, in welchem nur eine endliche Anzahl von Werthen k vorhanden ist, so lässt sich zunächst zeigen, dass mit unbegrenzt wachsendem n auch der Quotient

$$h_n = \frac{n}{k_n}$$

sich demselben Grenzwerth ω nähert, und durch diese Bemerkung wird dann der allgemeine Satz auf den vorher (§. 117) behandelten speciellen Fall zurückgeführt.

In der That, wenn δ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse bedeutet, so kann man entsprechend einen positiven Werth τ immer so gross wählen, dass für alle Werthe $t \geqq \tau$ die Bedingung

$$\omega - \delta < \frac{T}{t} < \omega + \delta$$

erfüllt ist. Es sei ferner ν derjenige Werth von T, welcher $t = \tau$ entspricht, also $k_\nu \leqq \tau < k_{\nu+1}$, und n irgend eine der positiven ganzen Zahlen $\nu + 1$, $\nu + 2$, $\nu + 3 \ldots$; dann ist jedenfalls $k_n > \tau$, und wenn mehrere auf einander folgende Grössen k denselben Werth wie k_n besitzen, so sei k_{m+1} die erste, k_r die letzte von ihnen, also n eine der Zahlen $m + 1$, $m + 2 \ldots r_r$. Nähert sich nun t von k_m ab wachsend dem Werthe k_n immer mehr an, so bleibt $T = m$, und der Quotient $T : t$ nähert sich abnehmend unbegrenzt dem Werthe $m : k_n$, und da $m < n$ ist, so folgt, dass

$$\frac{T}{t} < h_n$$

ist, sobald t sehr nahe unterhalb k_n liegt; für $t = k_n$ wird aber $T = r \geqq n$, und folglich

$$\frac{T}{t} \geqq h_n.$$

Da nun bei diesem Wachsen von $t < k_n$ bis $t = k_n > \tau$ der Quotient $T:t$ stets zwischen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegt, und zugleich, wie eben gezeigt ist, von Werthen, die $< h_n$ sind, auf einen Werth springt, der $\geqq h_n$ ist, so muss auch $\omega - \delta < h_n < \omega + \delta$ sein. Wie klein also auch δ sein mag, so kann n stets so gross gewählt werden, dass h_n definitiv um weniger als δ von ω verschieden wird, d. h. h_n nähert sich mit unbegrenzt wachsendem n demselben Grenzwerth ω.

Mit Hülfe dieses Resultates lässt sich der Beweis des allgemeinen Satzes leicht führen. Da nämlich

$$S = \Sigma \frac{1}{k^{1+\varrho}} = \frac{h_1^{1+\varrho}}{1^{1+\varrho}} + \frac{h_2^{1+\varrho}}{2^{1+\varrho}} + \frac{h_3^{1+\varrho}}{3^{1+\varrho}} + \cdots$$

ist, wo h_n mit unendlich wachsendem n sich dem Grenzwerthe ω nähert und folglich endlich, d. h. kleiner als eine angebbare Constante H bleibt, so ist die Summe S' der ersten n Glieder der Reihe S kleiner als das Product aus $H^{1+\varrho}$ und der Summe $\mathfrak{S}'$ der ersten n Glieder der folgenden Reihe

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \cdots;$$

da nun die letztere (nach §. 117) für jeden *positiven* Werth von ϱ convergirt, so *convergirt* auch die Reihe S. Setzt man nun $S = S' + S''$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$, so wird $S'' = h^{1+\varrho}\,\mathfrak{S}''$, wo h einen (jedenfalls positiven) Mittelwerth aus den Werthen $h_{n+1}, h_{n+2} \ldots$ bedeutet. Ist daher δ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse, und n so gross gewählt (was stets möglich ist), dass alle diese Werthe zwischen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen, so wird auch h, und für hinreichend kleine Werthe von ϱ auch $h^{1+\varrho}$ zwischen denselben Grenzen liegen. Da ferner (nach §. 117) das Product $\varrho\,\mathfrak{S}''$ mit unbegrenzt abnehmendem positiven ϱ sich der Einheit unendlich annähert, so wird für hinreichend kleine Werthe von ϱ auch das Product $\varrho S'' = h^{1+\varrho} . \varrho \mathfrak{S}''$ zwischen den Grenzen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen. Da endlich $\varrho S'$ gleichzeitig unendlich klein wird, weil S' nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält, so wird für sehr kleine Werthe von ϱ auch $\varrho S = \varrho S' + \varrho S''$ zwischen denselben Grenzen $\omega - \delta$ und $\omega + \delta$ liegen. Hiermit ist also auch bewiesen, dass mit unbegrenzt abnehmendem ϱ das Product ϱS *sich dem Grenzwerthe ω unendlich annähert**).

---

*) Es verdient bemerkt zu werden, dass man den obigen allgemeinen Satz nicht umkehren darf. Besteht z. B. das System K aus einer Zahl $k = 1$, aus $(\theta - 1)$ Zahlen $k = \theta$, aus $(\theta^2 - \theta)$ Zahlen $k = \theta^2$, aus $(\theta^3 - \theta^2)$ Zahlen $k = \theta^3$ u. s. f., wo θ eine positive ganze Zahl > 1 bedeutet, so ist für jeden positiven Werth von ϱ

$$S = 1 + \frac{\theta - 1}{\theta(\theta\varrho - 1)},$$

und das Product ϱS nähert sich mit unendlich abnehmendem ϱ dem Grenzwerthe

$$\omega = \frac{\theta - 1}{\theta \log \theta},$$

während der Quotient $T : t$ bei unendlich wachsendem t fortwährend von dem Werth 1 abnehmend durch ω hindurch geht bis zu dem Werth $1 : \theta$, dann aber sogleich wieder zu dem Werth 1 zurückspringt, um von Neuem denselben Veränderungsprocess zu erleiden (vergl. §. 144).