

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0131

LOG Titel: III. Ueber einen geometrischen Satz.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

III. Ueber einen geometrischen Satz.

§. 120.

In einer Ebene sei eine vollständig begrenzte Figur F von allenthalben endlichen Dimensionen construirt, deren Flächeninhalt wir mit A bezeichnen wollen. Sind ferner X und Y zwei auf einander senkrechte Axen, und construirt man parallel mit ihnen zwei Systeme äquidistanter Parallelen, welche ein über die ganze Ebene ausgebreitetes Gitter bilden, so wird, wenn δ der Abstand je zweier benachbarter Parallelen, und T die Anzahl der Gitterpunkte ist, welche innerhalb F liegen, das Product $T\delta^2$ mit unendlich abnehmendem δ sich dem Grenzwerthe A nähern*).

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir das System der mit Y parallelen Geraden und nehmen der Einfachheit halber an, dass jede derselben die Begrenzung der Figur nur zweimal schneidet; bezeichnen wir mit h die Länge des innerhalb F liegenden Stückes irgend einer solchen Parallelen, so ist $h\delta$ nahezu der Flächeninhalt des zwischen dieser und der folgenden Parallelen enthaltenen Theiles der Fläche F , und es wird in der Lehre von der Quadratur bewiesen, dass die Summe aller dieser Rechtecke $h\delta$ sich mit unendlich abnehmendem δ dem wahren Flächeninhalt A der Figur unbegrenzt nähert. Bezeichnen wir nun mit n die Anzahl der auf h liegenden Gitterpunkte (wobei es gleichgültig ist, ob ein zufällig auf der Begrenzung von F liegender Gitterpunkt mitgezählt oder ausgeschlossen wird), so besteht h aus $(n - 1)$ Stücken $= \delta$ und aus einem Rest, welcher höchstens $= 2\delta$ ist,

*) *Dirichlet: Recherches etc.* §. 1.

so dass wir $h = n\delta + \varepsilon\delta$ setzen können, wo ε einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet. Es ist daher

$$\Sigma h\delta = \Sigma (n\delta^2 + \varepsilon\delta^2) = T\delta^2 + \delta \Sigma \varepsilon\delta;$$

es ist ferner, da ε absolut genommen höchstens $= 1$ ist, die Summe $\Sigma \varepsilon\delta$ höchstens gleich der endlichen Ausdehnung der Figur F in der Richtung der Axe X , und es wird daher $\delta \Sigma \varepsilon\delta$ mit δ gleichzeitig unendlich klein. Folglich nähert sich das Product $T\delta^2$ demselben Grenzwerthe A , welchem sich $\Sigma h\delta$ nähert; was zu beweisen war.

Es leuchtet übrigens ein, dass dieser Satz nicht an die Beschränkung gebunden ist, nach welcher die Parallelen mit der Axe Y nur einmal in die Figur F ein- und nur einmal aus ihr austreten. Man kann immer die Figur F als ein Aggregat von positiven und negativen Flächentheilen ansehen, welche einzeln der angegebenen Bedingung genügen; und wendet man auf jeden einzelnen Theil den Satz an, so ergiebt sich daraus sofort die Richtigkeit desselben für die ganze Figur F .
