III. Ueber einen geometrischen Satz.

§. 120.

In einer Ebene sei eine vollständig begrenzte Figur F von allenthalben endlichen Dimensionen construirt, deren Flächeninhalt wir mit A bezeichnen wollen. Sind ferner X und Y zwei auf einander senkrechte Axen, und construirt man parallel mit ihnen zwei Systeme äquidistanter Parallelen, welche ein über die ganze Ebene ausgebreitetes Gitter bilden, so wird, wenn δ der Abstand je zweier benachbarter Parallelen, und T die Anzahl der Gitterpuncte ist, welche innerhalb F liegen, das Product $T\delta^2$ mit unendlich abnehmendem δ sich dem Grenzwerthe A nähern*).

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir das System der mit Y parallelen Geraden und nehmen der Einfachheit halber an, dass jede derselben die Begrenzung der Figur nur zweimal schneidet; bezeichnen wir mit h die Länge des innerhalb F liegenden Stückes irgend einer solchen Parallelen, so ist $h\delta$ nahezu der Flächeninhalt des zwischen dieser und der folgenden Parallelen enthaltenen Theiles der Fläche F, und es wird in der Lehre von der Quadratur bewiesen, dass die Summe aller dieser Rechtecke $h\delta$ sich mit unendlich abnehmendem δ dem wahren Flächeninhalt A der Figur unbegrenzt nähert. Bezeichnen wir nun mit n die Anzahl der auf h liegenden Gitterpuncte (wobei es gleichgültig ist, ob ein zufällig auf der Begrenzung von F liegender Gitterpunct mitgezählt oder ausgeschlossen wird), so besteht h aus $(n-1)$ Stücken $= \delta$ und aus einem Rest, welcher höchstens $= 2\delta$ ist,

*) *Dirichlet*: *Recherches* etc. §. 1.

so dass wir $h = n\delta + \varepsilon\delta$ setzen können, wo ε einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet. Es ist daher

$$\sum h\delta = \sum (n\delta^2 + \varepsilon\delta^2) = T\delta^2 + \delta \sum \varepsilon\delta;$$

es ist ferner, da ε absolut genommen höchstens $= 1$ ist, die Summe $\sum \varepsilon\delta$ höchstens gleich der endlichen Ausdehnung der Figur F in der Richtung der Axe X, und es wird daher $\delta \sum \varepsilon\delta$ mit δ gleichzeitig unendlich klein. Folglich nähert sich das Product $T\delta^2$ demselben Grenzwerthe A, welchem sich $\sum h\delta$ nähert; was zu beweisen war.

Es leuchtet übrigens ein, dass dieser Satz nicht an die Beschränkung gebunden ist, nach welcher die Parallelen mit der Axe Y nur einmal in die Figur F ein- und nur einmal aus ihr austreten. Man kann immer die Figur F als ein Aggregat von positiven und negativen Flächentheilen ansehen, welche einzeln der angegebenen Bedingung genügen; und wendet man auf jeden einzelnen Theil den Satz an, so ergiebt sich daraus sofort die Richtigkeit desselben für die ganze Figur F.