IV. Ueber die Geschlechter, in welche die Classen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zerfallen *).

§. 121.

Ist (a, b, c) eine quadratische Form von der Determinante $b^2 - ac = D$, und sind z, z' irgend zwei durch diese Form darstellbare Zahlen (wobei es gleichgültig ist, ob die darstellenden Zahlen relative Primzahlen sind oder nicht), so lässt sich das Product zz' stets in die Form $x^2 - Dy^2$ bringen, wo x und y ganze Zahlen bedeuten; denn aus der Annahme

$$z = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \quad z' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2$$

folgt (nach §. 54), dass die Form (a, b, c) durch die Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ in eine Form (z, x, z') übergeht, deren Determinante $x^2 - zz'$ von der Form Dy^2 ist. Aus dieser Bemerkung lassen sich folgende Schlüsse ziehen **).

1. Ist l eine ungerade in D aufgehende Primzahl, so hat für alle durch l nicht theilbaren Zahlen n, welche durch die Form (a, b, c) darstellbar sind, das Symbol

$$\left(\frac{n}{l}\right)$$

einen und denselben Werth. Denn sind n und n' irgend zwei solche durch l nicht theilbare und durch (a, b, c) darstellbare

*) *Dirichlet: Recherches sur diverses applications* etc. §§. 3, 6 (Crelle's Journal XIX).

**) Vergl. *Gauss: D. A.* artt. 229—231.

Zahlen, so folgt aus $nn' = x^2 - Dy^2$, dass $nn' \equiv x^2 \pmod{l}$, und folglich

$$\left(\frac{nn'}{l}\right) = +1, \quad \text{also} \quad \left(\frac{n}{l}\right) = \left(\frac{n'}{l}\right)$$

ist.

2. Ist $D \equiv 3 \pmod{4}$, so hat für alle ungeraden durch die Form darstellbaren Zahlen n der Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn sind n und n' irgend zwei solche ungerade Zahlen, so ist

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 + y^2 \pmod{4};$$

da ferner nn' eine ungerade Zahl ist, so muss eine der beiden Zahlen x, y gerade, die andere ungerade sein; hieraus folgt $nn' \equiv 1 \pmod{4}$, also auch $n \equiv n' \pmod{4}$, und hieraus

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n'-1)}.$$

3. Ist $D \equiv 2 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n der Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn aus

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 - 2y^2 \pmod{8}$$

folgt, da x ungerade ist, $nn' \equiv \pm 1 \pmod{8}$, also auch $n \equiv \pm n' \pmod{8}$, woraus die obige Behauptung sich unmittelbar ergiebt.

4. Ist $D \equiv 6 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n der Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{8}(n^2-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn aus

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 + 2y^2 \pmod{8}$$

folgt, da x ungerade ist, $nn' \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{8}$, je nachdem y gerade oder ungerade ist; dann ist entsprechend $n \equiv n'$ oder $\equiv 3n' \pmod{8}$, und man findet leicht, dass in beiden Fällen

$$\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8} \equiv \frac{n'-1}{2} + \frac{n'^2-1}{8} \pmod{2}$$

ist, was zu beweisen war.

5. Ist $D \equiv 4 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n der Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn aus $nn' = x^2 - Dy^2$ folgt, da x ungerade ist, $nn' \equiv 1 \pmod{4}$, also $n \equiv n' \pmod{4}$.

6. Ist $D \equiv 0 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n jeder der beiden Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \quad \text{und} \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}$$

für sich einen unveränderlichen Werth. Denn aus

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

folgt $n \equiv n' \pmod{8}$.

§. 122.

Auf den Sätzen des vorigen Paragraphen beruht die Eintheilung der quadratischen Formen einer gegebenen Determinante D in *Geschlechter*; wir beschränken uns hier auf die *ursprünglichen* Formen, weil das, was für sie gilt, leicht auf die anderen Formen übertragen werden kann; ausserdem betrachten wir für den Fall einer negativen Determinante nur *positive*, d. h. solche Formen, deren äussere Coefficienten positiv sind. Es sei also (a, b, c) eine ursprüngliche Form der σten Art (§. 61), so wissen wir (§. 93), dass man den Variabeln derselben stets solche Werthe x, y beilegen kann, dass

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma} = n$$

positiv und relative Primzahl zu $2D$ wird; dabei ist es gleichgültig, ob x und y relative Primzahlen zu einander sind oder nicht. Bezeichnet man nun mit $l, l', l'' \ldots$ alle von einander verschiedenen in D aufgehenden ungeraden Primzahlen, so hat für alle durch eine und dieselbe Form (a, b, c) erzeugten Zahlen σn jedes der Symbole

$$\left(\frac{\sigma n}{l}\right), \left(\frac{\sigma n}{l'}\right), \left(\frac{\sigma n}{l''}\right) \cdots$$

und folglich auch jedes der Symbole

$$\left(\frac{n}{l}\right), \left(\frac{n}{l'}\right), \left(\frac{n}{l''}\right) \cdots$$

für sich einen unveränderlichen Werth; ist ferner D nicht $\equiv 1$ (mod. 4), also $\sigma = 1$, so gilt dasselbe, je nachdem $D \equiv 3$ (mod. 4), $D \equiv 2$ (mod. 8), $D \equiv 6$ (mod. 8), $D \equiv 4$ (mod. 8), $D \equiv 0$ (mod. 8) ist, entsprechend von dem Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{8}(n^2-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

oder von jedem der beiden Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \quad \text{und} \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}.$$

Die Anzahl dieser Ausdrücke

$$\left(\frac{n}{l}\right), \left(\frac{n}{l'}\right) \cdots (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \text{ u. s. w.,}$$

die wir die *Charaktere* C nennen wollen, hängt nur von der Determinante D ab und soll im Folgenden immer mit λ bezeichnet werden; offenbar ist λ gleich der Anzahl der in D aufgehenden ungeraden Primzahlen $l, l', l'' \ldots$, wenn $D \equiv 1$ (mod. 4); in den übrigen Fällen mit Ausnahme von $D \equiv 0$ (mod. 8) ist sie um 1 und im Falle $D \equiv 0$ (mod. 8) ist sie um 2 grösser. Das System der bestimmten Werthe ± 1, welche diesen λ Charakteren C für eine bestimmte Form (a, b, c) zukommen, wollen wir den *Total-Charakter* dieser Form nennen. Nach dem Ausfall dieses Total-Charakters theilen wir sämmtliche ursprüngliche Formen von gleicher Determinante und gleicher Art in *Geschlechter* ein, indem wir je zwei Formen in dasselbe Geschlecht oder in zwei verschiedene Geschlechter werfen, je nachdem der Total-Charakter der einen Form mit dem der andern identisch ist, oder nicht; ein Geschlecht ist hiernach der Inbegriff aller ursprünglichen Formen von gleicher Determinante und gleicher Art, für welche jeder der λ Charaktere C für sich genommen denselben Werth besitzt. Da nun alle Zahlen σn, welche durch eine bestimmte Form darstellbar sind, auch durch alle mit ihr äquivalenten Formen dargestellt werden können, so gehören alle Formen einer und derselben *Classe* auch in ein und dasselbe *Geschlecht*; ein Geschlecht ist daher immer der Inbegriff einer bestimmten Anzahl von Formen-Classen. Da ferner jeder der λ Charaktere C zwei einander entgegengesetzte Werthe haben kann, so leuchtet ein, dass die sämmtlichen ursprünglichen Formen von einer gegebenen Determinante D und von der σten Art *höchstens* 2^λ verschiedene Genera bilden können.

Wir bemerken nun noch, dass die äussern Coefficienten einer Form immer durch diese Form dargestellt werden, wenn man der einen Variabeln den Werth 1, der andern den Werth 0 beilegt; mithin können die Charaktere dieser Form immer aus einem dieser beiden Coefficienten erkannt werden.

Beispiel 1: Für die Determinante $D = -35 \equiv 1 \pmod{4}$ bilden (§. 67) die sechs Formen

$$(1, 0, 35),\quad (5, 0, 7),\quad (3, \pm 1, 12),\quad (4, \pm 1, 9)$$

ein vollständiges System nicht äquivalenter (positiver) Formen der ersten Art, und die beiden Formen

$$(2, 1, 18),\quad (6, 1, 6)$$

ein solches Formensystem der zweiten Art. Um diese Formen (oder die durch sie repräsentirten Classen) in Geschlechter einzutheilen, haben wir die beiden Charaktere

$$\left(\frac{n}{5}\right) \text{ und } \left(\frac{n}{7}\right)$$

zu betrachten, und da $\lambda = 2$ ist, so sind für jede der beiden Formenarten *höchstens vier* Geschlechter zu erwarten. Die wirkliche Untersuchung ergiebt als Resultat folgende Tabelle

(a, b, c)	$\left(\frac{n}{5}\right)$	$\left(\frac{n}{7}\right)$
(1, 0, 35)	+	+
(5, 0, 7)	−	−
(3, ±1, 12)	−	−
(4, ±1, 9)	+	+
(2, 1, 18)	+	+
(6, 1, 6)	−	−

Es zeigt sich also, dass jedes der beiden Systeme nur in *zwei* verschiedene Geschlechter zerfällt; die drei Formen

$$(1, 0, 35),\quad (4, \pm 1, 9)$$

bilden ein Geschlecht, dessen Total-Charakter durch

$$\left(\frac{n}{5}\right) = +1,\quad \left(\frac{n}{7}\right) = +1$$

bestimmt ist; die drei anderen Formen

$$(5, 0, 7), \quad (3, \pm 1, 12)$$

bilden ein zweites Geschlecht, dessen Total-Charakter durch

$$\left(\frac{n}{5}\right) = -1, \quad \left(\frac{n}{7}\right) = -1$$

bestimmt ist. Und jede der beiden Formen der zweiten Art bildet ein Geschlecht für sich.

Beispiel 2: Für die Determinante $D = -5 \equiv 3 \pmod{4}$ bilden (§. 71) die beiden Formen

$$(1, 0, 5), \quad (2, 1, 3)$$

ein vollständiges System nicht äquivalenter (positiver) Formen; um sie in Geschlechter einzutheilen, müssen wir die beiden Charaktere

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \text{ und } \left(\frac{n}{5}\right)$$

betrachten. Der Form (1, 0, 5) entspricht

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = +1, \quad \left(\frac{n}{5}\right) = +1,$$

und der Form (2, 1, 3) entspricht

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = -1, \quad \left(\frac{n}{5}\right) = -1.$$

Jede dieser beiden Formen bildet also ein Geschlecht für sich; da $\lambda = 2$ ist, so ist auch hier die Anzahl der Geschlechter nicht $= 2^\lambda$, sondern nur $= 2^{\lambda-1}$.

Beispiel 3: Für die Determinante $D = 24 \equiv 0 \pmod{8}$ findet man leicht (nach §§. 75, 78, 82), dass folgende vier Formen

$$(1, 4, -8), \quad (-1, 4, 8), \quad (3, 3, -5), \quad (-3, 3, 5)$$

ein vollständiges Formensystem bilden; es sind hier die folgenden drei Charaktere zu betrachten:

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}, \quad \left(\frac{n}{3}\right);$$

der ersten der obigen Formen entspricht

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = +1, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = +1, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = +1;$$

der zweiten

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = -1, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = +1, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = -1;$$

der dritten

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = -1, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = -1, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = +1;$$

und der vierten

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = +1, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = -1, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = -1.$$

Auch hier zeigt sich also, dass die Anzahl der wirklich vorhandenen Geschlechter nicht $= 2^\lambda$, sondern nur $= 2^{\lambda-1}$ ist.

§. 123.

Mit Hülfe des Reciprocitätssatzes lässt sich nun in der That nachweisen, dass die Anzahl der verschiedenen Geschlechter *höchstens* $= 2^{\lambda-1}$ ist. Wir setzen $D = D'S^2$, wo S^2 das grösste in D aufgehende Quadrat bezeichnet, und legen den Buchstaben δ, ε, P dieselbe Bedeutung in Bezug auf D' bei, welche sie in §. 52 in Bezug auf die dort mit D bezeichnete Zahl erhalten haben. Dann wird

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D'}{n}\right) = \delta^{\frac{1}{2}(n-1)}\, \varepsilon^{\frac{1}{8}(n^2-1)} \left(\frac{n}{P}\right),$$

wo n jede beliebige positive ganze Zahl bedeutet, die relative Primzahl zu $2D$ ist. Da nun die Determinante D keine Quadratzahl, also D' nicht $= 1$ ist, so kann auch nicht gleichzeitig $\delta = +1$, $\varepsilon = +1$ und $P = 1$ sein, und hieraus folgt leicht, dass der Ausdruck

$$\delta^{\frac{1}{2}(n-1)}\, \varepsilon^{\frac{1}{8}(n^2-1)} \left(\frac{n}{P}\right)$$

entweder mit einem der Charaktere C, oder mit dem Producte aus mehreren dieser Charaktere identisch ist; bezeichnen wir diese Charaktere mit C' und ihr Product mit $\Pi C'$, so ist also stets

$$\Pi C' = \left(\frac{D}{n}\right),$$

sobald n positiv und relative Primzahl zu $2D$ ist. Da nun durch jede ursprüngliche Form der σten Art stets Zahlen σn dargestellt werden können, in welchen n dieser Bedingung genügt (§. 93), und zwar solche Zahlen σn, von welchen D quadratischer Rest ist

(§. 60), so ergiebt sich, dass der Total-Charakter einer jeden Form so beschaffen ist, dass stets

$$\Pi C' = +1$$

und niemals $\Pi C' = -1$ wird. Da nun unter den sämmtlichen 2^λ Zeichencombinationen, welche man erhält, wenn man jedem der λ Charaktere C sowohl den Werth $+1$ wie den Werth -1 beilegt, offenbar die Hälfte so beschaffen ist, dass $\Pi C' = -1$ wird, so folgt, dass diesen Zeichencombinationen oder Total-Charakteren keine wirklich existirenden Formen entsprechen können. Mithin ist die Anzahl der wirklich existirenden Geschlechter *höchstens* $= 2^{\lambda-1}$.

Im Folgenden soll nun bewiesen werden, dass allen denjenigen Total-Charakteren, welche in Uebereinstimmung mit der oben angegebenen Relation sind, wirklich existirende Formen entsprechen, dass also die Anzahl der wirklich vorhandenen Geschlechter $= 2^{\lambda-1}$ ist, und ausserdem, dass jedes Geschlecht eine gleiche Anzahl von Formen-Classen enthält.

§. 124.

Wir wollen wieder (wie in §. 89) mit n alle positiven ganzen Zahlen bezeichnen, die relative Primzahlen zu $2D$ sind, ferner mit m alle diejenigen Zahlen n, von welchen D quadratischer Rest ist, und mit μ die A[illegible]der von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahle[illegible]s sei ferner $\psi(n)$ eine der Bedingung $\psi(n')\,\psi(n'') = \psi(n'$[illegible]nügende Function, so ist stets

$$\Sigma\,\psi(n^2)\;\Sigma\,2^\mu\,\psi(m) = \Sigma\,\psi(n)\;\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\psi(n),$$

vorausgesetzt, dass die hier vorkommenden unendlichen Reihen bestimmte von der Anordnung der Glieder unabhängige Werthe haben. Offenbar geht diese Gleichung durch die Specialisirung $\psi(n) = n^{-s}$ in die Endgleichung des §. 89 über, und sie könnte auch genau auf dieselbe Art wie diese bewiesen werden. Wir ziehen hier folgende Verification vor.

Verfährt man, wie in §. 91, so erhält man durch Ausführung der Multiplication der beiden unendlichen Reihen auf der rechten Seite

$$\Sigma\, \tau_n \psi(n),$$

wo

$$\tau_n = \Sigma \left(\frac{D}{\delta}\right)$$

ist, und δ alle Divisoren der Zahl n durchlaufen muss. Denkt man sich nun die Zahl n dargestellt als Product von Primzahlpotenzen $A, B \ldots$ und bezeichnet man mit a alle Divisoren von A, mit b alle Divisoren von B u. s. w., so leuchtet ein, dass τ_n das Product aus den Summen

$$\Sigma \left(\frac{D}{a}\right), \quad \Sigma \left(\frac{D}{b}\right) \cdots$$

ist. Wenn nun z. B. $A = q^\alpha$, und q eine Primzahl ist, so wird

$$\Sigma \left(\frac{D}{a}\right) = \alpha + 1,$$

wenn D quadratischer Rest von q ist; ist dagegen D Nichtrest von q, so wird

$$\Sigma \left(\frac{D}{a}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem α gerade oder ungerade, d. h. je nachdem A ein Quadrat oder kein Quadrat ist. Bezeichnet man daher mit k alle diejenigen Zahlen n, in welchen nur solche Primfactoren aufgehen, von denen D Nichtrest ist, so folgt hieraus, dass jede Zahl n, für welche τ_n von Null verschieden ausfällt, von der Form mk^2 ist; und zwar ist dann τ_n gleich der Anzahl τ_m aller Divisoren von m. Da ferner $\psi(mk^2) = \psi(m)\psi(k^2)$ ist, so wird die rechte Seite unserer Gleichung gleich

$$\Sigma\, \tau_m \psi(mk^2) = \Sigma\, \psi(k^2) \,.\, \Sigma\, \tau_m \psi(m).$$

Wir wenden uns nun zur linken Seite; da jede Zahl n von der Form km ist, so ergiebt sich zunächst

$$\Sigma\, \psi(n^2) = \Sigma\, \psi(k^2) \,.\, \Sigma\, \psi(m^2),$$

und folglich braucht nur noch gezeigt zu werden, dass

$$\Sigma\, \psi(m^2)\; \Sigma\, 2^\mu \psi(m) = \Sigma\, \tau_m \psi(m)$$

ist*). Führen wir links die Multiplication aus, indem wir alle Glieder des Productes, welche denselben Factor $\psi(m)$ enthalten, in ein einziges zusammenfassen, so erhalten wir ein Resultat von der Form

$$\Sigma\, \tau'_m \psi(m),$$

*) Der gemeinschaftliche Werth beider Seiten ist das Quadrat von $\Sigma\, \psi(m)$.

wo der Coefficient

$$\tau'_m = \sum 2^\nu$$

aus ebenso vielen Gliedern besteht, als die Zahl m quadratische Divisoren δ^2 besitzt, und wo die Zahl ν für jede Zerlegung von der Form $m = \varepsilon\delta^2$ angiebt, wie viele verschiedene Primzahlen in ε aufgehen. Es braucht daher jetzt nur noch nachgewiesen zu werden, dass $\tau'_m = \tau_m$ ist, d. h. es muss folgender Satz bewiesen werden:

Zerlegt man eine ganze positive Zahl m auf alle mögliche Arten in zwei Factoren, von denen der eine ein Quadrat δ^2 ist, und bezeichnet man mit ν jedesmal die Anzahl der in dem andern Factor ε aufgehenden von einander verschiedenen Primzahlen, so ist $\sum 2^\nu$ gleich der Anzahl τ_m aller Divisoren der Zahl m.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich aber leicht auf folgende Weise. Ist

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

wo $a, b, c \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten, so ist jeder Divisor ε von der Form

$$\varepsilon = ABC \ldots,$$

wo $A, B, C \ldots$ resp. irgend welche Glieder aus den Reihen

$$\begin{array}{llll} a^\alpha, & a^{\alpha-2}, & a^{\alpha-4} & \ldots \\ b^\beta, & b^{\beta-2}, & b^{\beta-4} & \ldots \\ c^\gamma, & c^{\gamma-2}, & c^{\gamma-4} & \ldots \end{array}$$

u. s. w. bedeuten, welche so weit fortzusetzen sind, als die Exponenten nicht negativ werden. Lässt man nun jedem Factor $A, B, C \ldots$ resp. einen Factor $A', B', C' \ldots$ entsprechen, welcher $= 2$ oder $= 1$ ist, je nachdem der entsprechende Exponent > 0 oder $= 0$ ist, so wird

$$2^\nu = A'B'C' \ldots,$$

und folglich

$$\sum 2^\nu = \sum A' . \sum B' . \sum C' \ldots;$$

da aber, wie unmittelbar einleuchtet

$$\sum A' = \alpha + 1, \quad \sum B' = \beta + 1, \quad \sum C' = \gamma + 1 \ldots$$

ist, so findet man

$$\sum 2^\nu = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots = \tau_m,$$

was zu beweisen war.

Die Richtigkeit der obigen Gleichung ist also hiermit ebenfalls erwiesen.

Bei einer aufmerksamen Prüfung der vorstehenden Ableitung wird man leicht den Zusammenhang zwischen ihr und dem (in §. 91 aufgestellten) Satze über die sämmtlichen Darstellungen einer Zahl σn durch das vollständige System S der ursprünglichen Formen der σten Art erkennen, und man wird auf diese Weise zu einem sehr einfachen Beweise dieses letztern Satzes gelangen, wenn man von dem in §. 60 oder §. 86 gewonnenen Resultat ausgeht, dass die Anzahl der verschiedenen *Gruppen* von *eigentlichen* Darstellungen einer Zahl σm durch die Formen des Systems S gleich 2^μ ist, wo μ die Anzahl der verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen bedeutet.

Schliesslich bemerken wir, dass der Satz sich bedeutend verallgemeinern lässt, wenn man statt des in ihm vorkommenden Jacobi'schen Symbols irgend eine Function $\theta(n)$ einführt, welche der Bedingung $\theta(n')\,\theta(n'') = \theta(n'n'')$ genügt und nur eine *endliche* Anzahl verschiedener Werthe besitzt.

§. 125.

Nach §. 123 zerfallen die sämmtlichen (positiven) Formen von der Determinante D und von der σten Art, und also auch die sämmtlichen h Formenclassen in höchstens $\tau = 2^{\lambda-1}$ verschiedene Geschlechter, deren Total-Charaktere sämmtlich der Bedingung

$$\Pi\, C' = +1$$

genügen, und die wir mit

$$G_1,\ G_2 \ldots G_\tau$$

bezeichnen wollen; die Anzahl der Formen-Classen, welche diese Geschlechter enthalten, sollen entsprechend mit

$$g_1,\ g_2 \ldots g_\tau$$

bezeichnet werden, so dass also, wenn eins dieser Geschlechter, z. B. G_r, nicht wirklich vorhanden sein sollte, $g_r = 0$ zu setzen ist. Es soll nun gerade im Folgenden gezeigt werden, dass dies niemals eintritt, dass also diese τ Geschlechter wirklich existiren, und ausserdem, dass sie alle gleich viele Formen-Classen enthalten, dass also

$$g_1 = g_2 = g_3 \cdots = \frac{1}{\tau}\, h$$

ist.

Zu diesem Zweck benutzen wir die im vorigen Paragraphen bewiesene Gleichung*), indem wir

$$\psi(n) = \frac{\chi(n)}{n^s}$$

setzen, wo $\chi(n)$ irgend eins der $2^\lambda = 2\tau$ Glieder der Summe bedeutet, welche durch die Entwicklung des über alle λ Charaktere C erstreckten Productes

$$\Pi\,(1 + C)$$

entsteht; der Bedingung $\psi(n)\,\psi(n') = \psi(nn')$ geschieht offenbar durch jede solche Specialisirung Genüge, denn alle Factoren C, aus denen eine solche Function $\chi(n)$ zusammengesetzt ist, genügen derselben Bedingung. Da ausserdem $\chi(n)$ für jede Zahl n, die relative Primzahl zu $2D$ ist, $= \pm 1$ ist, so convergiren die vier in der Gleichung vorkommenden unendlichen Reihen unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder für jeden positiven Werth $s > 1$. Es ist also unter dieser Annahme, da $\chi(n^2) = \chi(n)\,\chi(n) = +1$ ist,

$$\Sigma\,\frac{1}{n^{2s}}\,\Sigma\,\chi(m)\,\frac{2^\mu}{m^s} = \Sigma\,\frac{\chi(n)}{n^s}\,\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Denken wir uns nun wieder (wie in §. 88) ein vollständiges System S von h Formen

$$(a, b, c),\quad (a', b', c')\ldots$$

von der Determinante D und von der σten Art aufgeschrieben, und unterwerfen wir die Variabeln x, y jeder Form den dort angegebenen Bedingungen I., II., III., so wird jede Zahl σm im Ganzen auf $\varkappa \,.\, 2^\mu$ verschiedene Arten erzeugt, wo $\varkappa$ die ebendaselbst festgesetzte, nur von D und σ abhängige Bedeutung hat. Die sämmtlichen h Formen des Systemes S zerfallen nun in zwei Gruppen, nämlich in eine Gruppe von H Formen, die wir mit (a, b, c) bezeichnen wollen, für welche $\chi(m) = +1$ ist, und in

*) Auch ohne Hülfe derselben gelangt man auf einem etwas kürzern, wenn auch principiell nicht verschiedenen Wege zum Ziele, wenn man von der aus §. 91 folgenden Gleichung $\varkappa\,\Sigma\,\tau_n\,\psi(n) = \Sigma\,\psi(\nu)$ ausgeht, wo ψ eine willkürliche Function, und $\sigma\nu$ alle die Zahlen bedeutet, welche durch das System der Formen (a, b, c) unter den Bedingungen I., II. des §. 90 erzeugt werden. Setzt man dann $\psi(n) = n^{-s}\,\Pi(1 + \gamma_r\,C)$, wo γ_r den Werth des Charakters C im Geschlechte G_r bedeutet, so wird dies letztere rechts sofort isolirt, während der Grenzprocess auf der linken Seite für jeden Bestandtheil $c_r\,\chi(n)$ des Productes $\Pi(1 + \gamma_r\,C)$ einzeln ausgeführt werden kann.

eine zweite Gruppe von H' Formen, die wir mit (a', b', c') bezeichnen wollen, für welche $\chi(m) = -1$ ist. Offenbar werden auf diese Weise alle g_r Formen des Systems S, welche einem und demselben Geschlecht G_r angehören, auch einer und derselben dieser beiden Gruppen zugetheilt; denn für alle diese Formen hat jeder Factor von $\chi(m)$ für sich genommen und folglich auch $\chi(m)$ selbst einen und denselben Werth. Und umgekehrt leuchtet ein, dass alle Zahlen σm, denen $\chi(m) = +1$ entspricht, ausschliesslich durch Formen der ersten Gruppe, und alle Zahlen σm, denen $\chi(m) = -1$ entspricht, ausschliesslich durch Formen der zweiten Gruppe erzeugt werden.

Mithin ist

$$\varkappa \sum \chi(m) \frac{2^\mu}{m^s} = \left\{ \begin{array}{l} + \sum \left(\dfrac{a x^2 + 2 b x y + c y^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots \\ - \sum \left(\dfrac{a' x^2 + 2 b' x y + c' y^2}{\sigma}\right)^{-s} - \cdots \end{array} \right\},$$

wo auf der rechten Seite die den H Formen (a, b, c) der ersten Gruppe entsprechenden Doppelsummen mit positivem Vorzeichen, und die den H' Formen (a', b', c') der zweiten Gruppe entsprechenden Doppelsummen mit negativem Vorzeichen behaftet sind.

Multiplicirt man jetzt die Gleichung mit der unendlichen Reihe

$$\sum \frac{1}{n^{2s}},$$

so erhält man links zufolge der obigen Gleichung das Resultat

$$\varkappa \sum \frac{\chi(n)}{n^s} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^s};$$

führt man ferner auf der rechten Seite die Multiplication wie in §. 90 aus, so verändert sich äusserlich ihre Gestalt nicht, sondern es fällt allein die frühere Bedingung III. fort, nach welcher die den Variabeln x, y beigelegten Werthe relative Primzahlen zu einander sein mussten. Man erhält daher

$$\varkappa \sum \frac{\chi(n)}{n^s} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^s} = \left\{ \begin{array}{l} + \sum \left(\dfrac{a x^2 + 2 b x y + c y^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots \\ - \sum \left(\dfrac{a' x^2 + 2 b' x y + c' y^2}{\sigma}\right)^{-s} - \cdots \end{array} \right\}.$$

Setzen wir jetzt $s = 1 + \varrho$, und multipliciren wir mit ϱ, so nähert sich mit unendlich abnehmendem positiven ϱ jedes der h Producte

$$\varrho \sum \left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right)^{-(1+\varrho)} \cdots \varrho \sum \left(\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{\sigma}\right)^{-(1+\varrho)} \cdots$$

einem und demselben von Null verschiedenen Grenzwerth W, welcher für eine negative Determinante in §. 95, für eine positive in §. 98 bestimmt ist; mithin wird der Grenzwerth, welchem sich das Product aus ϱ und aus der rechten Seite der vorstehenden Gleichung nähert, gleich $(H - H')\, W$.

Für die beiden Fälle nun, in welchen für $\chi(n)$ entweder das Anfangsglied 1 oder das Glied $\Pi\, C'$ der Entwicklung des Productes $\Pi(1+C)$ genommen wird, ist $H = h$ und $H' = 0$; und die obige Gleichung stimmt genau mit der in §. 90 überein, welche später zur Bestimmung der Classenanzahl h führte. In den übrigen $(2\tau - 2)$ Fällen, d. h. also, wenn unter $\chi(n)$ irgend ein Glied des entwickelten Ausdrucks

$$\Pi\,(1+C) - 1 - \Pi\, C'$$

verstanden wird, nähert sich aber, wie im folgenden Paragraphen nachträglich gezeigt werden soll, jede der beiden unendlichen Reihen

$$\sum \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}} \quad \text{und} \quad \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$$

mit unendlich abnehmendem ϱ einem *endlichen* Grenzwerth, und folglich das Product

$$\varrho\, \varkappa \sum \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}} \cdot \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$$

dem Grenzwerth Null. Vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Grenzwerth $(H - H')\, W$, wo W eine von Null verschiedene Grösse war, so ergiebt sich

$$H - H' = 0,$$

d. h. jedem dieser $(2\tau - 2)$ Fälle entspricht eine Eintheilung aller h Formen des Systems S in zwei Gruppen, deren jede eine gleiche Anzahl $H = H' = {}^1\!/_2\, h$ Formen enthält.

Zufolge der obigen Bemerkung, dass die g_r Formen des Systems S, welche einem und demselben Geschlecht G_r angehören, bei jeder einzelnen Specialisirung von $\chi(n)$ entweder alle in die erste, oder alle in die zweite Gruppe fallen, lässt sich jede solche Gleichung von der Form $H - H' = 0$, welche einem dieser $(2\tau - 2)$ Fälle entspricht, in folgender Weise aufschreiben

$$g_1 \pm g_2 \pm g_3 \pm \cdots \pm g_\tau = 0, \qquad (g)$$

wo die Anzahl g_1 jedesmal mit positivem, irgend eine andere Anzahl g_r aber mit positivem oder negativem Vorzeichen behaftet ist, je nachdem in diesem Fall die Formen des Geschlechts G_r derselben Gruppe angehören, wie die Formen des Geschlechts G_1, oder nicht, d. h. je nachdem die Werthe, welche $\chi(n)$ in dem Geschlecht G_1 und in dem Geschlecht G_r erhält, gleich oder entgegengesetzt sind. Ist Δ der Ueberschuss der Anzahl der Fälle, in welchen das Erstere eintritt, über die Anzahl der übrigen, so wird, wenn man alle Gleichungen (g) addirt, die den $(2\tau - 2)$ verschiedenen Fällen entsprechen, der Coefficient von g_1 gleich $(2\tau - 2)$, und der von g_r gleich Δ werden. Um nun diesen Ueberschuss Δ zu bestimmen, bezeichnen wir mit γ_1 und γ_r die bestimmten Werthe ± 1, welche irgend einer der λ Charaktere C resp. in dem Geschlecht G_1 und G_r annimmt, und unter diesen mit γ_1' und γ_r' diejenigen Werthe, welche den Charakteren C' entsprechen; man überzeugt sich dann leicht, dass

$$\Delta = \Pi\,(1 + \gamma_1\gamma_r) - 1 - \Pi\,\gamma_1'\gamma_r'$$

ist; denn wenn wir das erste, aus λ Factoren von der Form $(1 + \gamma_1\gamma_r)$ bestehende, Product rechter Hand entwickeln und die daraus entstehenden beiden Glieder 1 und $\Pi\,\gamma_1'\gamma_r'$ gegen die beiden andern Glieder fortheben, so bleiben $2^\lambda - 2 = 2\tau - 2$ Glieder zurück, deren jedes einem bestimmten Gliede des entwickelten Ausdrucks

$$\Pi\,(1 + C) - 1 - \Pi\,C',$$

d. h. einer bestimmten Specialisirung von $\chi(n)$ entspricht, und zwar wird ein solches Glied $= +1$ oder $= -1$ werden, je nachdem die beiden Werthe, welche das correspondirende $\chi(n)$ im Geschlecht G_1 und im Geschlecht G_r annimmt, gleich oder entgegengesetzt ausfallen; die algebraische Summe aller dieser Glieder ist also in der That gleich dem Ueberschuss Δ, was zu beweisen war. Da nun die beiden Geschlechter G_1 und G_r verschieden sind, so ist mindestens einer der λ Factoren $(1 + \gamma_1\gamma_r)$ gleich Null, und da ausserdem $\Pi\,\gamma_1' = 1$, $\Pi\,\gamma_r' = 1$ und folglich auch $\Pi\,\gamma_1'\gamma_r' = 1$ ist, so erhalten wir $\Delta = -2$. Da dieser Ueberschuss Δ nun für alle von G_1 verschiedenen Geschlechter gleich gross ist, so erhalten wir durch Addition sämmtlicher $(2\tau - 2)$ Gleichungen (g) das Resultat

$$(2\tau - 2)\,g_1 - 2\,(g_2 + g_3 + \cdots + g_\tau) = 0,$$

und da ausserdem

$$g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_\tau = h$$

ist, so folgt

$$2\tau g_1 - 2h = 0, \text{ also } g_1 = \frac{h}{\tau} = \frac{h}{2^{\lambda-1}}.$$

Da endlich für jedes andere Geschlecht G_2, $G_3 \ldots G_\tau$ die Untersuchung ebenso geführt werden kann, wie für das Geschlecht G_1, so erhalten wir als Endresultat den Satz*):

Die Anzahl der wirklich existirenden Geschlechter ist gleich $2^{\lambda-1}$, *und alle diese Geschlechter enthalten gleich viele Formenclassen.*

§. 126.

Zur Vervollständigung des vorstehenden Beweises haben wir nun noch zu zeigen, dass für jede der $2\tau - 2$ Specialisirungen von $\chi(n)$, welche den Gliedern des obigen entwickelten Ausdrucks entsprechen, jede der beiden unendlichen Reihen

$$\sum \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}, \quad \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$$

mit unendlich abnehmendem positiven ϱ sich einem endlichen Grenzwerth nähert. Dies kann mit Rücksicht auf frühere Untersuchungen (§. 101) in folgender Weise geschehen.

Jede der beiden in Rede stehenden Summen ist von der Form

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum \theta^{\frac{1}{2}(n-1)} \eta^{\frac{1}{8}(n^2-1)} \left(\frac{n}{L}\right) \frac{1}{n^s},$$

---

*) *Gauss: D. A.* artt. 252, 261, 287. — Mit Hülfe des Satzes über die arithmetische Progression (Supplement VI.) lässt sich der obige Satz sehr kurz beweisen. Da nämlich alle Zahlen n, für welche jeder der λ Charaktere C einen vorgeschriebenen Werth ± 1 besitzt, in gewissen arithmetischen Reihen enthalten sind, deren Differenz $4D$ ist, während ihre Anfangsglieder relative Primzahlen zu $4D$ sind (vergl. §. 52), so existiren unter diesen Zahlen n auch *Primzahlen* p; genügen nun die für die Charaktere C vorgeschriebenen Werthe ± 1 der Bedingung $\Pi C' = +1$, so ist D *quadratischer Rest von* p, und folglich existirt eine (positive) ursprüngliche Form erster Art, deren erster Coefficient $= p$ ist, welche mithin den vorgeschriebenen Total-Charakter besitzt.

wo $\theta^2 = 1$, $\eta^2 = 1$, und L irgend ein ungerader Divisor von D ist; da quadratische Factoren im Nenner eines Jacobi'schen Symbols fortgelassen werden dürfen, so können wir annehmen, dass L durch keine Quadratzahl (ausser 1) theilbar ist. Ferner ist jedenfalls nicht gleichzeitig $\theta = +1$, $\eta = +1$, $L = 1$; denn sonst wäre entweder $\chi(n) = 1$, oder $\chi(n) = \Pi C'$, gegen unsere Voraussetzung.

Bezeichnen wir mit LL' das Product aus allen von einander verschiedenen in D aufgehenden ungeraden Primzahlen, so ist das System der Zahlen n identisch mit dem System aller positiven ganzen Zahlen, welche relative Primzahlen zu $8LL'$ sind; wir betrachten zunächst nur die ersten $\varphi(8LL')$ Zahlen n, d. h. diejenigen Zahlen n, welche kleiner als $8LL'$ sind, und zeigen, dass die Summe der entsprechenden Werthe von α_n gleich Null ist. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit a irgend eine der vier Zahlen 1, 3, 5, 7; mit b irgend eine der $\varphi(L)$ Zahlen, welche relative Primzahlen zu L und nicht grösser als L sind; endlich mit b' irgend eine der $\varphi(L')$ Zahlen, welche relative Primzahlen zu L' und nicht grösser als L' sind. Es wird dann (nach §. 25) durch die drei Congruenzen

$$n \equiv a \pmod{8}, \quad n \equiv b \pmod{L}, \quad n \equiv b' \pmod{L'}$$

eine und nur eine Zahl n bestimmt, welche relative Primzahl zu $8LL'$ und zugleich kleiner als $8LL'$ ist; und wenn jede der drei Zahlen a, b, b' unabhängig von den anderen alle ihr zukommenden Werthe durchläuft, so werden auf diese Weise auch alle $\varphi(8LL')$ Zahlen n erzeugt, die relative Primzahlen zu $8LL'$ und kleiner als $8LL'$ sind. Da nun jedesmal

$$\theta^{\frac{1}{2}(n-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = \theta^{\frac{1}{2}(a-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(a^2-1)}, \quad \left(\frac{n}{L}\right) = \left(\frac{b}{L}\right)$$

ist, so wird die über diese Werthe von n ausgedehnte Summe

$$\Sigma\,\alpha_n = \varphi(L') \,.\, \Sigma\,\theta^{\frac{1}{2}(a-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(a^2-1)} \,.\, \Sigma\left(\frac{b}{L}\right);$$

nun ist aber (nach §. 52, I.)

$$\Sigma\left(\frac{b}{L}\right) = 0,$$

ausgenommen, wenn $L = 1$ ist; ausserdem findet man leicht, dass auch

$$\Sigma\,\theta^{\frac{1}{2}(a-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(a^2-1)} = 0$$

ist, ausgenommen, wenn $\theta = \eta = +1$ ist. Da nun, wie schon oben bemerkt ist, diese beiden Ausnahmefälle jedenfalls nicht gleichzeitig eintreten, so ist

$$\Sigma\, \alpha_n = 0,$$

wo das Summenzeichen sich auf die angegebenen Werthe von n bezieht.

Da ferner, sobald $n' \equiv n \pmod{8LL'}$, auch $\alpha_{n'} = \alpha_n$ ist, so wird immer

$$\Sigma\, \alpha_n = 0$$

sein, wenn die Summation auf beliebige $\varphi(8LL')$ auf einander folgende, also nach dem Modul $8LL'$ incongruente Werthe von n ausgedehnt wird. Und hieraus folgt unmittelbar, dass die Summe aller Werthe von α_n, die beliebig vielen auf einander folgenden Werthen von n entsprechen (von $n = 1$ an gerechnet) stets unterhalb einer endlichen angebbaren Grenze bleibt. Nach einer frühern Untersuchung (§. 101) ist daher die Reihe

$$\Sigma\, \frac{\alpha_n}{n^s},$$

wenn ihre Glieder nach der Grösse der Nenner geordnet werden, eine für jeden positiven Werth von s endliche und stetige Function von s; also nähert sich auch jede der beiden obigen Reihen mit unendlich abnehmendem positiven ϱ einem endlichen Grenzwerth, was zu beweisen war.