

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0134

LOG Titel: S. 121. Sätze über den Charakter aller durch eine und dieselbe quadratische Form darstellbaren Zahlen

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

IV. Ueber die Geschlechter, in welche die Classen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zerfallen*).

§. 121.

Ist (a, b, c) eine quadratische Form von der Determinante $b^2 - ac = D$, und sind z, z' irgend zwei durch diese Form darstellbare Zahlen (wobei es gleichgültig ist, ob die darstellenden Zahlen relative Primzahlen sind oder nicht), so lässt sich das Product $z z'$ stets in die Form $x^2 - Dy^2$ bringen, wo x und y ganze Zahlen bedeuten; denn aus der Annahme

$$z = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \quad z' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2$$

folgt (nach §. 54), dass die Form (a, b, c) durch die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in eine Form (z, x, z') übergeht, deren Determinante $x^2 - z z'$ von der Form Dy^2 ist. Aus dieser Bemerkung lassen sich folgende Schlüsse ziehen**).

1. Ist l eine ungerade in D aufgehende Primzahl, so hat für alle durch l nicht theilbaren Zahlen n , welche durch die Form (a, b, c) darstellbar sind, das Symbol

$$\left(\frac{n}{l}\right)$$

einen und denselben Werth. Denn sind n und n' irgend zwei solche durch l nicht theilbare und durch (a, b, c) darstellbare

*) *Dirichlet: Recherches sur diverses applications etc.* §§. 3, 6 (Crelle's Journal XIX).

**) Vergl. *Gauss: D. A.* artt. 229—231.

Zahlen, so folgt aus $nn' = x^2 - Dy^2$, dass $nn' \equiv x^2 \pmod{l}$, und folglich

$$\left(\frac{nn'}{l}\right) = +1, \quad \text{also} \quad \left(\frac{n}{l}\right) = \left(\frac{n'}{l}\right)$$

ist.

2. Ist $D \equiv 3 \pmod{4}$, so hat für alle ungeraden durch die Form darstellbaren Zahlen n der Ausdruck

$$(-1)^{1/2(n-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn sind n und n' irgend zwei solche ungerade Zahlen, so ist

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 + y^2 \pmod{4};$$

da ferner nn' eine ungerade Zahl ist, so muss eine der beiden Zahlen x, y gerade, die andere ungerade sein; hieraus folgt $nn' \equiv 1 \pmod{4}$, also auch $n \equiv n' \pmod{4}$, und hieraus

$$(-1)^{1/2(n-1)} = (-1)^{1/2(n'-1)}.$$

3. Ist $D \equiv 2 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n der Ausdruck

$$(-1)^{1/8(n^2-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn aus

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 - 2y^2 \pmod{8}$$

folgt, da x ungerade ist, $nn' \equiv \pm 1 \pmod{8}$, also auch $n \equiv \pm n' \pmod{8}$, woraus die obige Behauptung sich unmittelbar ergibt.

4. Ist $D \equiv 6 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n der Ausdruck

$$(-1)^{1/2(n-1) + 1/8(n^2-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn aus

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 + 2y^2 \pmod{8}$$

folgt, da x ungerade ist, $nn' \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{8}$, je nachdem y gerade oder ungerade ist; dann ist entsprechend $n \equiv n'$ oder $\equiv 3n' \pmod{8}$, und man findet leicht, dass in beiden Fällen

$$\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8} \equiv \frac{n'-1}{2} + \frac{n'^2-1}{8} \pmod{2}$$

ist, was zu beweisen war.

5. Ist $D \equiv 4 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n der Ausdruck