Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0135
LOG Titel: §. 122. Eintheilung der quadratischen Formen in Geschlechter.
LOG Typ: chapter

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

einen und denselben Werth. Denn aus $nn' = x^2 - Dy^2$ folgt, da x ungerade ist, $nn' \equiv 1 \pmod{4}$, also $n \equiv n' \pmod{4}$.

6. Ist $D \equiv 0 \pmod{8}$, so hat für alle durch dieselbe Form darstellbaren ungeraden Zahlen n jeder der beiden Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \quad \text{und} \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}$$

für sich einen unveränderlichen Werth. Denn aus

$$nn' = x^2 - Dy^2 \equiv x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

folgt $n \equiv n' \pmod{8}$.

§. 122.

Auf den Sätzen des vorigen Paragraphen beruht die Eintheilung der quadratischen Formen einer gegebenen Determinante D in *Geschlechter*; wir beschränken uns hier auf die *ursprünglichen* Formen, weil das, was für sie gilt, leicht auf die anderen Formen übertragen werden kann; ausserdem betrachten wir für den Fall einer negativen Determinante nur *positive*, d. h. solche Formen, deren äussere Coefficienten positiv sind. Es sei also (a, b, c) eine ursprüngliche Form der σten Art (§. 61), so wissen wir (§. 93), dass man den Variabeln derselben stets solche Werthe x, y beilegen kann, dass

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma} = n$$

positiv und relative Primzahl zu $2D$ wird; dabei ist es gleichgültig, ob x und y relative Primzahlen zu einander sind oder nicht. Bezeichnet man nun mit $l, l', l'' \ldots$ alle von einander verschiedenen in D aufgehenden ungeraden Primzahlen, so hat für alle durch eine und dieselbe Form (a, b, c) erzeugten Zahlen σn jedes der Symbole

$$\left(\frac{\sigma n}{l}\right), \left(\frac{\sigma n}{l'}\right), \left(\frac{\sigma n}{l''}\right) \cdots$$

und folglich auch jedes der Symbole

$$\left(\frac{n}{l}\right), \left(\frac{n}{l'}\right), \left(\frac{n}{l''}\right) \cdots$$

für sich einen unveränderlichen Werth; ist ferner D nicht $\equiv 1$ (mod. 4), also $\sigma = 1$, so gilt dasselbe, je nachdem $D \equiv 3$ (mod. 4), $D \equiv 2$ (mod. 8), $D \equiv 6$ (mod. 8), $D \equiv 4$ (mod. 8), $D \equiv 0$ (mod. 8) ist, entsprechend von dem Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{8}(n^2-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

oder von jedem der beiden Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \text{ und } (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}.$$

Die Anzahl dieser Ausdrücke

$$\left(\frac{n}{l}\right), \left(\frac{n}{l'}\right) \cdots (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \text{ u. s. w.,}$$

die wir die *Charaktere* C nennen wollen, hängt nur von der Determinante D ab und soll im Folgenden immer mit λ bezeichnet werden; offenbar ist λ gleich der Anzahl der in D aufgehenden ungeraden Primzahlen $l, l', l'' \ldots$, wenn $D \equiv 1$ (mod. 4); in den übrigen Fällen mit Ausnahme von $D \equiv 0$ (mod. 8) ist sie um 1 und im Falle $D \equiv 0$ (mod. 8) ist sie um 2 grösser. Das System der bestimmten Werthe ± 1, welche diesen λ Charakteren C für eine bestimmte Form (a, b, c) zukommen, wollen wir den *Total-Charakter* dieser Form nennen. Nach dem Ausfall dieses Total-Charakters theilen wir sämmtliche ursprüngliche Formen von gleicher Determinante und gleicher Art in *Geschlechter* ein, indem wir je zwei Formen in dasselbe Geschlecht oder in zwei verschiedene Geschlechter werfen, je nachdem der Total-Charakter der einen Form mit dem der andern identisch ist, oder nicht; ein Geschlecht ist hiernach der Inbegriff aller ursprünglichen Formen von gleicher Determinante und gleicher Art, für welche jeder der λ Charaktere C für sich genommen denselben Werth besitzt. Da nun alle Zahlen σn, welche durch eine bestimmte Form darstellbar sind, auch durch alle mit ihr äquivalenten Formen dargestellt werden können, so gehören alle Formen einer und derselben *Classe* auch in ein und dasselbe *Geschlecht*; ein Geschlecht ist daher immer der Inbegriff einer bestimmten Anzahl von Formen-Classen. Da ferner jeder der λ Charaktere C zwei einander entgegengesetzte Werthe haben kann, so leuchtet ein, dass die sämmtlichen ursprünglichen Formen von einer gegebenen Determinante D und von der σten Art *höchstens* 2^λ verschiedene Genera bilden können.

Wir bemerken nun noch, dass die äussern Coefficienten einer Form immer durch diese Form dargestellt werden, wenn man der einen Variabeln den Werth 1, der andern den Werth 0 beilegt; mithin können die Charaktere dieser Form immer aus einem dieser beiden Coefficienten erkannt werden.

Beispiel 1: Für die Determinante $D = -35 \equiv 1 \pmod{4}$ bilden (§. 67) die sechs Formen

$$(1, 0, 35),\quad (5, 0, 7),\quad (3, \pm 1, 12),\quad (4, \pm 1, 9)$$

ein vollständiges System nicht äquivalenter (positiver) Formen der ersten Art, und die beiden Formen

$$(2, 1, 18),\quad (6, 1, 6)$$

ein solches Formensystem der zweiten Art. Um diese Formen (oder die durch sie repräsentirten Classen) in Geschlechter einzutheilen, haben wir die beiden Charaktere

$$\left(\frac{n}{5}\right) \text{ und } \left(\frac{n}{7}\right)$$

zu betrachten, und da $\lambda = 2$ ist, so sind für jede der beiden Formenarten *höchstens vier* Geschlechter zu erwarten. Die wirkliche Untersuchung ergiebt als Resultat folgende Tabelle

(a, b, c)	$\left(\frac{n}{5}\right)$	$\left(\frac{n}{7}\right)$
(1, 0, 35)	+	+
(5, 0, 7)	—	—
(3, ±1, 12)	—	—
(4, ±1, 9)	+	+
(2, 1, 18)	+	+
(6, 1, 6)	—	—

Es zeigt sich also, dass jedes der beiden Systeme nur in *zwei* verschiedene Geschlechter zerfällt; die drei Formen

$$(1, 0, 35),\quad (4, \pm 1, 9)$$

bilden ein Geschlecht, dessen Total-Charakter durch

$$\left(\frac{n}{5}\right) = +1,\quad \left(\frac{n}{7}\right) = +1$$

bestimmt ist; die drei anderen Formen

$$(5,\ 0,\ 7),\quad (3,\ \pm 1,\ 12)$$

bilden ein zweites Geschlecht, dessen Total-Charakter durch

$$\left(\frac{n}{5}\right) = -1,\quad \left(\frac{n}{7}\right) = -1$$

bestimmt ist. Und jede der beiden Formen der zweiten Art bildet ein Geschlecht für sich.

Beispiel 2: Für die Determinante $D = -5 \equiv 3 \pmod{4}$ bilden (§. 71) die beiden Formen

$$(1,\ 0,\ 5),\quad (2,\ 1,\ 3)$$

ein vollständiges System nicht äquivalenter (positiver) Formen; um sie in Geschlechter einzutheilen, müssen wir die beiden Charaktere

$$(-1)^{1/2(n-1)} \text{ und } \left(\frac{n}{5}\right)$$

betrachten. Der Form (1, 0, 5) entspricht

$$(-1)^{1/2(n-1)} = +1,\quad \left(\frac{n}{5}\right) = +1,$$

und der Form (2, 1, 3) entspricht

$$(-1)^{1/2(n-1)} = -1,\quad \left(\frac{n}{5}\right) = -1.$$

Jede dieser beiden Formen bildet also ein Geschlecht für sich; da $\lambda = 2$ ist, so ist auch hier die Anzahl der Geschlechter nicht $= 2^\lambda$, sondern nur $= 2^{\lambda-1}$.

Beispiel 3: Für die Determinante $D = 24 \equiv 0 \pmod{8}$ findet man leicht (nach §§. 75, 78, 82), dass folgende vier Formen

$$(1,\ 4,\ -8),\quad (-1,\ 4,\ 8),\quad (3,\ 3,\ -5),\quad (-3,\ 3,\ 5)$$

ein vollständiges Formensystem bilden; es sind hier die folgenden drei Charaktere zu betrachten:

$$(-1)^{1/2(n-1)},\quad (-1)^{1/8(n^2-1)},\quad \left(\frac{n}{3}\right);$$

der ersten der obigen Formen entspricht

$$(-1)^{1/2(n-1)} = +1,\quad (-1)^{1/8(n^2-1)} = +1,\quad \left(\frac{n}{3}\right) = +1;$$

der zweiten

$$(-1)^{1/2(n-1)} = -1,\quad (-1)^{1/8(n^2-1)} = +1,\quad \left(\frac{n}{3}\right) = -1;$$

der dritten