Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0137
LOG Titel: §. 124. Beweis einer Gleichung zwischen zwei Producten aus je zwei unendlichen Reihen
LOG Typ: chapter

(§. 60), so ergiebt sich, dass der Total-Charakter einer jeden Form so beschaffen ist, dass stets

$$\Pi\, C' = +1$$

und niemals $\Pi\, C' = -1$ wird. Da nun unter den sämmtlichen 2^λ Zeichencombinationen, welche man erhält, wenn man jedem der λ Charaktere C sowohl den Werth $+1$ wie den Werth -1 beilegt, offenbar die Hälfte so beschaffen ist, dass $\Pi\, C' = -1$ wird, so folgt, dass diesen Zeichencombinationen oder Total-Charakteren keine wirklich existirenden Formen entsprechen können. Mithin ist die Anzahl der wirklich existirenden Geschlechter *höchstens* $= 2^{\lambda-1}$.

Im Folgenden soll nun bewiesen werden, dass allen denjenigen Total-Charakteren, welche in Uebereinstimmung mit der oben angegebenen Relation sind, wirklich existirende Formen entsprechen, dass also die Anzahl der wirklich vorhandenen Geschlechter $= 2^{\lambda-1}$ ist, und ausserdem, dass jedes Geschlecht eine gleiche Anzahl von Formen-Classen enthält.

§. 124.

Wir wollen wieder (wie in §. 89) mit n alle positiven ganzen Zahlen bezeichnen, die relative Primzahlen zu $2D$ sind, ferner mit m alle diejenigen Zahlen n, von welchen D quadratischer Rest ist, und mit μ die Anzahl der von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen; es sei ferner $\psi(n)$ eine der Bedingung $\psi(n')\,\psi(n'') = \psi(n'n'')$ genügende Function, so ist stets

$$\Sigma\, \psi(n^2)\, \Sigma\, 2^\mu \psi(m) = \Sigma\, \psi(n)\, \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \psi(n),$$

vorausgesetzt, dass die hier vorkommenden unendlichen Reihen bestimmte von der Anordnung der Glieder unabhängige Werthe haben. Offenbar geht diese Gleichung durch die Specialisirung $\psi(n) = n^{-s}$ in die Endgleichung des §. 89 über, und sie könnte auch genau auf dieselbe Art wie diese bewiesen werden. Wir ziehen hier folgende Verification vor.

Verfährt man, wie in §. 91, so erhält man durch Ausführung der Multiplication der beiden unendlichen Reihen auf der rechten Seite

$$\Sigma\, \tau_n \psi(n),$$

wo

$$\tau_n = \Sigma \left(\frac{D}{\delta}\right)$$

ist, und δ alle Divisoren der Zahl n durchlaufen muss. Denkt man sich nun die Zahl n dargestellt als Product von Primzahlpotenzen $A, B \ldots$ und bezeichnet man mit a alle Divisoren von A, mit b alle Divisoren von B u. s. w., so leuchtet ein, dass τ_n das Product aus den Summen

$$\Sigma \left(\frac{D}{a}\right), \quad \Sigma \left(\frac{D}{b}\right) \cdots$$

ist. Wenn nun z. B. $A = q^\alpha$, und q eine Primzahl ist, so wird

$$\Sigma \left(\frac{D}{a}\right) = \alpha + 1,$$

wenn D quadratischer Rest von q ist; ist dagegen D Nichtrest von q, so wird

$$\Sigma \left(\frac{D}{a}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem α gerade oder ungerade, d. h. je nachdem A ein Quadrat oder kein Quadrat ist. Bezeichnet man daher mit k alle diejenigen Zahlen n, in welchen nur solche Primfactoren aufgehen, von denen D Nichtrest ist, so folgt hieraus, dass jede Zahl n, für welche τ_n von Null verschieden ausfällt, von der Form mk^2 ist; und zwar ist dann τ_n gleich der Anzahl τ_m aller Divisoren von m. Da ferner $\psi(mk^2) = \psi(m)\psi(k^2)$ ist, so wird die rechte Seite unserer Gleichung gleich

$$\Sigma\, \tau_m \psi(mk^2) = \Sigma\, \psi(k^2) \,.\, \Sigma\, \tau_m \psi(m).$$

Wir wenden uns nun zur linken Seite; da jede Zahl n von der Form km ist, so ergiebt sich zunächst

$$\Sigma\, \psi(n^2) = \Sigma\, \psi(k^2) \,.\, \Sigma\, \psi(m^2),$$

und folglich braucht nur noch gezeigt zu werden, dass

$$\Sigma\, \psi(m^2)\; \Sigma\, 2^\mu \psi(m) = \Sigma\, \tau_m \psi(m)$$

ist*). Führen wir links die Multiplication aus, indem wir alle Glieder des Productes, welche denselben Factor $\psi(m)$ enthalten, in ein einziges zusammenfassen, so erhalten wir ein Resultat von der Form

$$\Sigma\, \tau'_m \psi(m),$$

---

*) Der gemeinschaftliche Werth beider Seiten ist das Quadrat von $\Sigma\, \psi(m)$.

wo der Coefficient

$$\tau'_m = \sum 2^\nu$$

aus ebenso vielen Gliedern besteht, als die Zahl m quadratische Divisoren δ^2 besitzt, und wo die Zahl ν für jede Zerlegung von der Form $m = \varepsilon\,\delta^2$ angiebt, wie viele verschiedene Primzahlen in ε aufgehen. Es braucht daher jetzt nur noch nachgewiesen zu werden, dass $\tau'_m = \tau_m$ ist, d. h. es muss folgender Satz bewiesen werden:

Zerlegt man eine ganze positive Zahl m auf alle mögliche Arten in zwei Factoren, von denen der eine ein Quadrat δ^2 ist, und bezeichnet man mit ν jedesmal die Anzahl der in dem andern Factor ε aufgehenden von einander verschiedenen Primzahlen, so ist $\sum 2^\nu$ gleich der Anzahl τ_m aller Divisoren der Zahl m.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich aber leicht auf folgende Weise. Ist

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

wo $a, b, c \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten, so ist jeder Divisor ε von der Form

$$\varepsilon = A B C \ldots,$$

wo A, B, $C \ldots$ resp. irgend welche Glieder aus den Reihen

$$\begin{array}{lll} a^\alpha, & a^{\alpha-2}, & a^{\alpha-4} \ldots \\ b^\beta, & b^{\beta-2}, & b^{\beta-4} \ldots \\ c^\gamma, & c^{\gamma-2}, & c^{\gamma-4} \ldots \end{array}$$

u. s. w. bedeuten, w[illegible] so weit fortzusetzen sind, als die Exponenten nicht neg[illegible] werden. Lässt man nun jedem Factor A, B, $C \ldots$ resp. einen Factor A', B', $C' \ldots$ entsprechen, welcher $= 2$ oder $= 1$ ist, je nachdem der entsprechende Exponent > 0 oder $= 0$ ist, so wird

$$2^\nu = A' B' C' \ldots,$$

und folglich

$$\sum 2^\nu = \sum A' \,.\, \sum B' \,.\, \sum C' \ldots;$$

da aber, wie unmittelbar einleuchtet

$$\sum A' = \alpha + 1, \quad \sum B' = \beta + 1, \quad \sum C' = \gamma + 1 \ldots$$

ist, so findet man

$$\sum 2^\nu = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots = \tau_m,$$

was zu beweisen war.