Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0138
LOG Titel: §. 125. Beweis, dass der einen Hälfte der angebbaren Totalcharaktere wirklich existirende Geschlechter entsprechen, und dass jedes dieser Geschlechter gleich viele Formenclassen enthält
LOG Typ: chapter

Die Richtigkeit der obigen Gleichung ist also hiermit ebenfalls erwiesen.

Bei einer aufmerksamen Prüfung der vorstehenden Ableitung wird man leicht den Zusammenhang zwischen ihr und dem (in §. 91 aufgestellten) Satze über die sämmtlichen Darstellungen einer Zahl σn durch das vollständige System S der ursprünglichen Formen der σten Art erkennen, und man wird auf diese Weise zu einem sehr einfachen Beweise dieses letztern Satzes gelangen, wenn man von dem in §. 60 oder §. 86 gewonnenen Resultat ausgeht, dass die Anzahl der verschiedenen *Gruppen* von *eigentlichen* Darstellungen einer Zahl σm durch die Formen des Systems S gleich 2^μ ist, wo μ die Anzahl der verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen bedeutet.

Schliesslich bemerken wir, dass der Satz sich bedeutend verallgemeinern lässt, wenn man statt des in ihm vorkommenden Jacobi'schen Symbols irgend eine Function $\theta(n)$ einführt, welche der Bedingung $\theta(n')\,\theta(n'') = \theta(n'n'')$ genügt und nur eine *endliche* Anzahl verschiedener Werthe besitzt.

§. 125.

Nach §. 123 zerfallen die sämmtlichen (positiven) Formen von der Determinante D und von der σten Art, und also auch die sämmtlichen h Formenclassen in höchstens $\tau = 2^{\lambda-1}$ verschiedene Geschlechter, deren Total-Charaktere sämmtlich der Bedingung

$$\Pi\, C' = +1$$

genügen, und die wir mit

$$G_1, G_2 \ldots G_\tau$$

bezeichnen wollen; die Anzahl der Formen-Classen, welche diese Geschlechter enthalten, sollen entsprechend mit

$$g_1, g_2 \ldots g_\tau$$

bezeichnet werden, so dass also, wenn eins dieser Geschlechter, z. B. G_r, nicht wirklich vorhanden sein sollte, $g_r = 0$ zu setzen ist. Es soll nun gerade im Folgenden gezeigt werden, dass dies niemals eintritt, dass also diese τ Geschlechter wirklich existiren, und ausserdem, dass sie alle gleich viele Formen-Classen enthalten, dass also

$$g_1 = g_2 = g_3 \cdots = \frac{1}{\tau}\, h$$

ist.

Zu diesem Zweck benutzen wir die im vorigen Paragraphen bewiesene Gleichung*), indem wir

$$\psi(n) = \frac{\chi(n)}{n^s}$$

setzen, wo $\chi(n)$ irgend eins der $2^\lambda = 2\tau$ Glieder der Summe bedeutet, welche durch die Entwicklung des über alle λ Charaktere C erstreckten Productes

$$\Pi(1 + C)$$

entsteht; der Bedingung $\psi(n)\ \psi(n') = \psi(nn')$ geschieht offenbar durch jede solche Specialisirung Genüge, denn alle Factoren C, aus denen eine solche Function $\chi(n)$ zusammengesetzt ist, genügen derselben Bedingung. Da ausserdem $\chi(n)$ für jede Zahl n, die relative Primzahl zu $2D$ ist, $= \pm 1$ ist, so convergiren die vier in der Gleichung vorkommenden unendlichen Reihen unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder für jeden positiven Werth $s > 1$. Es ist also unter dieser Annahme, da $\chi(n^2) = \chi(n)\ \chi(n) = +1$ ist,

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}}\ \Sigma\ \chi(m)\frac{2^\mu}{m^s} = \Sigma \frac{\chi(n)}{n^s}\ \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Denken wir uns nun wieder (wie in §. 88) ein vollständiges System S von h Formen

$$(a, b, c),\ \ (a', b', c') \ldots$$

von der Determinante D und von der σten Art aufgeschrieben, und unterwerfen wir die Variabeln x, y jeder Form den dort angegebenen Bedingungen I., II., III., so wird jede Zahl σm im Ganzen auf $\varkappa\ .\ 2^\mu$ verschiedene Arten erzeugt, wo $\varkappa$ die ebendaselbst festgesetzte, nur von D und σ abhängige Bedeutung hat. Die sämmtlichen h Formen des Systemes S zerfallen nun in zwei Gruppen, nämlich in eine Gruppe von H Formen, die wir mit (a, b, c) bezeichnen wollen, für welche $\chi(m) = +1$ ist, und in

*) Auch ohne Hülfe derselben gelangt man auf einem etwas kürzern, wenn auch principiell nicht verschiedenen Wege zum Ziele, wenn man von der aus §. 91 folgenden Gleichung $\varkappa \Sigma \tau_n \psi(n) = \Sigma \psi(\nu)$ ausgeht, wo ψ eine willkürliche Function, und $\sigma\nu$ alle die Zahlen bedeutet, welche durch das System der Formen (a, b, c) unter den Bedingungen I., II. des §. 90 erzeugt werden. Setzt man dann $\psi(n) = n^{-s}\, \Pi(1 + \gamma_r C)$, wo γ_r den Werth des Charakters C im Geschlechte G_r bedeutet, so wird dies letztere rechts sofort isolirt, während der Grenzprocess auf der linken Seite für jeden Bestandtheil $c_r\, \chi(n)$ des Productes $\Pi(1 + \gamma_r C)$ einzeln ausgeführt werden kann.

eine zweite Gruppe von H' Formen, die wir mit (a', b', c') bezeichnen wollen, für welche $\chi(m) = -1$ ist. Offenbar werden auf diese Weise alle g_r Formen des Systems S, welche einem und demselben Geschlecht G_r angehören, auch einer und derselben dieser beiden Gruppen zugetheilt; denn für alle diese Formen hat jeder Factor von $\chi(m)$ für sich genommen und folglich auch $\chi(m)$ selbst einen und denselben Werth. Und umgekehrt leuchtet ein, dass alle Zahlen σm, denen $\chi(m) = +1$ entspricht, ausschliesslich durch Formen der ersten Gruppe, und alle Zahlen σm, denen $\chi(m) = -1$ entspricht, ausschliesslich durch Formen der zweiten Gruppe erzeugt werden.

Mithin ist

$$\varkappa \sum \chi(m) \frac{2^{\mu}}{m^s} = \left\{ \begin{array}{l} + \sum \left(\dfrac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots\cdot \\ - \sum \left(\dfrac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{\sigma}\right)^{-s} - \cdots\cdot \end{array} \right\},$$

wo auf der rechten Seite die den H Formen (a, b, c) der ersten Gruppe entsprechenden Doppelsummen mit positivem Vorzeichen, und die den H' Formen (a', b', c') der zweiten Gruppe entsprechenden Doppelsummen mit negativem Vorzeichen behaftet sind.

Multiplicirt man jetzt die Gleichung mit der unendlichen Reihe

$$\sum \frac{1}{n^{2s}},$$

so erhält man links zufolge der obigen Gleichung das Resultat

$$\varkappa \sum \frac{\chi(n)}{n^s} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^s};$$

führt man ferner auf der rechten Seite die Multiplication wie in §. 90 aus, so verändert sich äusserlich ihre Gestalt nicht, sondern es fällt allein die frühere Bedingung III. fort, nach welcher die den Variabeln x, y beigelegten Werthe relative Primzahlen zu einander sein mussten. Man erhält daher

$$\varkappa \sum \frac{\chi(n)}{n^s} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^s} = \left\{ \begin{array}{l} + \sum \left(\dfrac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots\cdot \\ - \sum \left(\dfrac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{\sigma}\right)^{-s} - \cdots\cdot \end{array} \right\}.$$

Setzen wir jetzt $s = 1 + \varrho$, und multipliciren wir mit ϱ, so nähert sich mit unendlich abnehmendem positiven ϱ jedes der h Producte

$$\varrho\,\Sigma\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right)^{-(1+\varrho)}\cdots\varrho\,\Sigma\left(\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{\sigma}\right)^{-(1+\varrho)}\cdots$$

einem und demselben von Null verschiedenen Grenzwerth W, welcher für eine negative Determinante in §. 95, für eine positive in §. 98 bestimmt ist; mithin wird der Grenzwerth, welchem sich das Product aus ϱ und aus der rechten Seite der vorstehenden Gleichung nähert, gleich $(H-H')\,W$.

Für die beiden Fälle nun, in welchen für $\chi(n)$ entweder das Anfangsglied 1 oder das Glied $\Pi\,C'$ der Entwicklung des Productes $\Pi(1+C)$ genommen wird, ist $H=h$ und $H'=0$; und die obige Gleichung stimmt genau mit der in §. 90 überein, welche später zur Bestimmung der Classenanzahl h führte. In den übrigen $(2\tau-2)$ Fällen, d. h. also, wenn unter $\chi(n)$ irgend ein Glied des entwickelten Ausdrucks

$$\Pi\,(1+C)-1-\Pi\,C'$$

verstanden wird, nähert sich aber, wie im folgenden Paragraphen nachträglich gezeigt werden soll, jede der beiden unendlichen Reihen

$$\Sigma\,\frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}} \quad \text{und} \quad \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$$

mit unendlich abnehmendem ϱ einem *endlichen* Grenzwerth, und folglich das Product

$$\varrho\,\varkappa\,\Sigma\,\frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}\cdot\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$$

dem Grenzwerth Null. Vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Grenzwerth $(H-H')\,W$, wo W eine von Null verschiedene Grösse war, so ergiebt sich

$$H-H'=0,$$

d. h. jedem dieser $(2\tau-2)$ Fälle entspricht eine Eintheilung aller h Formen des Systems S in zwei Gruppen, deren jede eine gleiche Anzahl $H=H'={}^1\!/_2\,h$ Formen enthält.

Zufolge der obigen Bemerkung, dass die g_r Formen des Systems S, welche einem und demselben Geschlecht G_r angehören, bei jeder einzelnen Specialisirung von $\chi(n)$ entweder alle in die erste, oder alle in die zweite Gruppe fallen, lässt sich jede solche Gleichung von der Form $H-H'=0$, welche einem dieser $(2\tau-2)$ Fälle entspricht, in folgender Weise aufschreiben

$$g_1 \pm g_2 \pm g_3 \pm \cdots \pm g_\tau = 0, \qquad (g)$$

wo die Anzahl g_1 jedesmal mit positivem, irgend eine andere Anzahl g_r aber mit positivem oder negativem Vorzeichen behaftet ist, je nachdem in diesem Fall die Formen des Geschlechts G_r derselben Gruppe angehören, wie die Formen des Geschlechts G_1, oder nicht, d. h. je nachdem die Werthe, welche $\chi(n)$ in dem Geschlecht G_1 und in dem Geschlecht G_r erhält, gleich oder entgegengesetzt sind. Ist $\varDelta$ der Ueberschuss der Anzahl der Fälle, in welchen das Erstere eintritt, über die Anzahl der übrigen, so wird, wenn man alle Gleichungen (g) addirt, die den $(2\tau-2)$ verschiedenen Fällen entsprechen, der Coefficient von g_1 gleich $(2\tau-2)$, und der von g_r gleich $\varDelta$ werden. Um nun diesen Ueberschuss $\varDelta$ zu bestimmen, bezeichnen wir mit γ_1 und γ_r die bestimmten Werthe ± 1, welche irgend einer der λ Charaktere C resp. in dem Geschlecht G_1 und G_r annimmt, und unter diesen mit γ_1' und γ_r' diejenigen Werthe, welche den Charakteren C' entsprechen; man überzeugt sich dann leicht, dass

$$\varDelta = \Pi\,(1+\gamma_1\gamma_r) - 1 - \Pi\,\gamma_1'\gamma_r'$$

ist; denn wenn wir das erste, aus λ Factoren von der Form $(1+\gamma_1\gamma_r)$ bestehende, Product rechter Hand entwickeln und die daraus entstehenden beiden Glieder 1 und $\Pi\,\gamma_1'\gamma_r'$ gegen die beiden andern Glieder fortheben, so bleiben $2^\lambda - 2 = 2\tau - 2$ Glieder zurück, deren jedes einem bestimmten Gliede des entwickelten Ausdrucks

$$\Pi\,(1+C) - 1 - \Pi\,C',$$

d. h. einer bestimmten Specialisirung von $\chi(n)$ entspricht, und zwar wird ein solches Glied $= +1$ oder $= -1$ werden, je nachdem die beiden Werthe, welche das correspondirende $\chi(n)$ im Geschlecht G_1 und im Geschlecht G_r annimmt, gleich oder entgegengesetzt ausfallen; die algebraische Summe aller dieser Glieder ist also in der That gleich dem Ueberschuss $\varDelta$, was zu beweisen war. Da nun die beiden Geschlechter G_1 und G_r verschieden sind, so ist mindestens einer der λ Factoren $(1+\gamma_1\gamma_r)$ gleich Null, und da ausserdem $\Pi\,\gamma_1' = 1$, $\Pi\,\gamma_r' = 1$ und folglich auch $\Pi\,\gamma_1'\gamma_r' = 1$ ist, so erhalten wir $\varDelta = -2$. Da dieser Ueberschuss $\varDelta$ nun für alle von G_1 verschiedenen Geschlechter gleich gross ist, so erhalten wir durch Addition sämmtlicher $(2\tau-2)$ Gleichungen (g) das Resultat

$$(2\tau-2)\,g_1 - 2\,(g_2 + g_3 + \cdots + g_\tau) = 0,$$