und da ausserdem

$$g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_\tau = h$$

ist, so folgt

$$2\tau g_1 - 2h = 0, \text{ also } g_1 = \frac{h}{\tau} = \frac{h}{2^{\lambda-1}}.$$

Da endlich für jedes andere Geschlecht G_2, G_3 ... G_τ die Untersuchung ebenso geführt werden kann, wie für das Geschlecht G_1, so erhalten wir als Endresultat den Satz*):

Die Anzahl der wirklich existirenden Geschlechter ist gleich $2^{\lambda-1}$, *und alle diese Geschlechter enthalten gleich viele Formenclassen.*

§. 126.

Zur Vervollständigung des vorstehenden Beweises haben wir nun noch zu zeigen, dass für jede der $2\tau - 2$ Specialisirungen von $\chi(n)$, welche den Gliedern des obigen entwickelten Ausdrucks entsprechen, jede der beiden unendlichen Reihen

$$\Sigma \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}, \quad \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$$

mit unendlich abnehmendem positiven ϱ sich einem endlichen Grenzwerth nähert. Dies kann mit Rücksicht auf frühere Untersuchungen (§. 101) in folgender Weise geschehen.

Jede der beiden in Rede stehenden Summen ist von der Form

$$\Sigma \frac{\alpha_n}{n^s} = \Sigma\, \theta^{\frac{1}{2}(n-1)}\, \eta^{\frac{1}{8}(n^2-1)} \left(\frac{n}{L}\right) \frac{1}{n^s},$$

---

*) *Gauss: D. A.* artt. 252, 261, 287. — Mit Hülfe des Satzes über die arithmetische Progression (Supplement VI.) lässt sich der obige Satz sehr kurz beweisen. Da nämlich alle Zahlen n, für welche jeder der λ Charaktere C einen vorgeschriebenen Werth ± 1 besitzt, in gewissen arithmetischen Reihen enthalten sind, deren Differenz $4D$ ist, während ihre Anfangsglieder relative Primzahlen zu $4D$ sind (vergl. §. 52), so existiren unter diesen Zahlen n auch *Primzahlen* p; genügen nun die für die Charaktere C vorgeschriebenen Werthe ± 1 der Bedingung $\Pi C' = +1$, so ist D *quadratischer Rest von* p, und folglich existirt eine (positive) ursprüngliche Form erster Art, deren erster Coefficient $= p$ ist, welche mithin den vorgeschriebenen Total-Charakter besitzt.

wo $\theta^2 = 1$, $\eta^2 = 1$, und L irgend ein ungerader Divisor von D ist; da quadratische Factoren im Nenner eines Jacobi'schen Symbols fortgelassen werden dürfen, so können wir annehmen, dass L durch keine Quadratzahl (ausser 1) theilbar ist. Ferner ist jedenfalls nicht gleichzeitig $\theta = +1$, $\eta = +1$, $L = 1$; denn sonst wäre entweder $\chi(n) = 1$, oder $\chi(n) = \Pi C'$, gegen unsere Voraussetzung.

Bezeichnen wir mit LL' das Product aus allen von einander verschiedenen in D aufgehenden ungeraden Primzahlen, so ist das System der Zahlen n identisch mit dem System aller positiven ganzen Zahlen, welche relative Primzahlen zu $8LL'$ sind; wir betrachten zunächst nur die ersten $\varphi(8LL')$ Zahlen n, d. h. diejenigen Zahlen n, welche kleiner als $8LL'$ sind, und zeigen, dass die Summe der entsprechenden Werthe von α_n gleich Null ist. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit a irgend eine der vier Zahlen 1, 3, 5, 7; mit b irgend eine der $\varphi(L)$ Zahlen, welche relative Primzahlen zu L und nicht grösser als L sind; endlich mit b' irgend eine der $\varphi(L')$ Zahlen, welche relative Primzahlen zu L' und nicht grösser als L' sind. Es wird dann (nach §. 25) durch die drei Congruenzen

$$n \equiv a \pmod{8}, \quad n \equiv b \pmod{L}, \quad n \equiv b' \pmod{L'}$$

eine und nur eine Zahl n bestimmt, welche relative Primzahl zu $8LL'$ und zugleich kleiner als $8LL'$ ist; und wenn jede der drei Zahlen a, b, b' unabhängig von den anderen alle ihr zukommenden Werthe durchläuft, so werden auf diese Weise auch alle $\varphi(8LL')$ Zahlen n erzeugt, die relative Primzahlen zu $8LL'$ und kleiner als $8LL'$ sind. Da nun jedesmal

$$\theta^{\frac{1}{2}(n-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = \theta^{\frac{1}{2}(a-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(a^2-1)}, \quad \left(\frac{n}{L}\right) = \left(\frac{b}{L}\right)$$

ist, so wird die über diese Werthe von n ausgedehnte Summe

$$\Sigma\,\alpha_n = \varphi(L') \,.\, \Sigma\, \theta^{\frac{1}{2}(a-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(a^2-1)} \,.\, \Sigma \left(\frac{b}{L}\right);$$

nun ist aber (nach §. 52, I.)

$$\Sigma \left(\frac{b}{L}\right) = 0,$$

ausgenommen, wenn $L = 1$ ist; ausserdem findet man leicht, dass auch

$$\Sigma\, \theta^{\frac{1}{2}(a-1)}\,\eta^{\frac{1}{8}(a^2-1)} = 0$$

ist, ausgenommen, wenn $\theta = \eta = +1$ ist. Da nun, wie schon oben bemerkt ist, diese beiden Ausnahmefälle jedenfalls nicht gleichzeitig eintreten, so ist

$$\Sigma\, \alpha_n = 0,$$

wo das Summenzeichen sich auf die angegebenen Werthe von n bezieht.

Da ferner, sobald $n' \equiv n$ (mod. $8LL'$), auch $\alpha_{n'} = \alpha_n$ ist, so wird immer

$$\Sigma\, \alpha_n = 0$$

sein, wenn die Summation auf beliebige $\varphi(8LL')$ auf einander folgende, also nach dem Modul $8LL'$ incongruente Werthe von n ausgedehnt wird. Und hieraus folgt unmittelbar, dass die Summe aller Werthe von α_n, die beliebig vielen auf einander folgenden Werthen von n entsprechen (von $n = 1$ an gerechnet) stets unterhalb einer endlichen angebbaren Grenze bleibt. Nach einer frühern Untersuchung (§. 101) ist daher die Reihe

$$\Sigma\, \frac{\alpha_n}{n^s},$$

wenn ihre Glieder nach der Grösse der Nenner geordnet werden, eine für jeden positiven Werth von s endliche und stetige Function von s; also nähert sich auch jede der beiden obigen Reihen mit unendlich abnehmendem positiven ϱ einem endlichen Grenzwerth, was zu beweisen war.