Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0148
LOG Titel: §. 133. Specialisirung dieses Satzes; Eintheilung der Reihen L in drei Classen L1, L2, L3
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 133.

Es sei nun (wie in §. 131) k eine beliebige positive ganze Zahl, und zwar

$$k = 2^\lambda p^\pi p'^{\pi'} \ldots,$$

wo $p, p' \ldots$ von einander verschiedene ungerade Primzahlen bedeuten; wir geben ferner den Buchstaben

$$a, \quad b, \quad c, \quad c' \ldots$$

ihre frühere Bedeutung (§. 131) und bezeichnen entsprechend mit

$$\theta, \quad \eta, \quad \omega, \quad \omega' \ldots$$

irgend welche Wurzeln der Gleichungen

$$\theta^a = 1, \quad \eta^b = 1, \quad \omega^c = 1, \quad \omega'^{c'} = 1 \ldots$$

Ist nun n irgend eine positive ganze Zahl und zugleich relative Primzahl zu k, und sind ihre Indices

$$\alpha \,(\text{mod. } a), \quad \beta \,(\text{mod. } b), \quad \gamma \,(\text{mod. } c), \quad \gamma' \,(\text{mod. } c') \ldots,$$

so genügt, wie man leicht sieht, der Ausdruck

$$\psi(n) = \frac{\theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega'^{\gamma'} \ldots}{n^s}$$

der Bedingung $\psi(n)\,\psi(n') = \psi(n n')$ *); wenn ferner der Exponent $s > 1$ ist, was wir im Folgenden annehmen wollen, so ist die Summe der Moduln n^{-s} aller Glieder $\psi(n)$ endlich (§. 117), und folglich gelten die Gleichungen (I) und (II) des vorigen Paragraphen

$$\Pi \frac{1}{1 - \psi(q)} = \Sigma\, \psi(n) = L$$

$$\Sigma\, \psi(q) + \tfrac{1}{2} \Sigma\, \psi(q^2) + \tfrac{1}{3} \Sigma\, \psi(q^3) + \cdots = \log L$$

in welchen q alle in k nicht aufgehenden Primzahlen, n alle relativen Primzahlen zu k durchlaufen muss; beide Reihen haben, so lange $s > 1$ ist, bestimmte von der Anordnung ihrer Glieder un-

*) Der Zähler $\chi(n) = \theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega'^{\gamma'} \ldots$ besitzt die charakteristischen Eigenschaften $\chi(n)\,\chi(n') = \chi(n n')$ und, wenn $n' \equiv n''$ (mod. k) ist, $\chi(n') = \chi(n'')$. Umgekehrt, wenn eine Function $\chi(n)$ die erste Eigenschaft hat, und wenn sie ausserdem nur eine *endliche* Anzahl m (von Null verschiedener) Werthe $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m$ besitzt, so sind diese letzteren nothwendig die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $\omega^m = 1$.

abhängige Summen. Wir können hinzufügen, dass beide Reihen auch *stetige* Functionen von s sind, so lange $s > 1$ ist; wir beweisen diese Behauptung für alle Werthe von s, welche grösser als ein beliebiger unechter Bruch σ sind, weil hieraus offenbar die Stetigkeit dieser Reihen für alle Werthe von $s > 1$ (excl. 1) folgt.

Jede der beiden Reihen L und $\log L$ ist von der Form

$$\frac{\alpha_1}{1^s} + \frac{\alpha_2}{2^s} + \frac{\alpha_3}{3^s} + \cdots,$$

wo die Moduln der Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ sämmtlich eine endliche Grösse $A (= 1)$ nicht übertreffen. Um die Stetigkeit einer Function von s innerhalb eines gewissen Intervalls ($s \geqq \sigma$) zu beweisen, genügt es darzuthun, dass, wie klein auch eine positive gegebene Grösse δ sein mag, die Function jedesmal in einen ersten und zwar stetigen, und in einen zweiten Bestandtheil zerlegt werden kann, dessen Modulus innerhalb des ganzen Intervalls ($s \geqq \sigma$) $< \delta$ ist; denn hieraus folgt, dass der Modulus einer plötzlichen Werthänderung der ganzen Function, die doch nur von dem zweiten Bestandtheil herrühren kann, kleiner als 2δ, und folglich, da die gegebene Grösse δ beliebig klein sein darf, nothwendig $= 0$ sein muss (vergl. §§. 101, 143). In unserm Falle ergiebt sich die Möglichkeit einer solchen Zerlegung auf folgende Weise; ist n eine beliebige ganze Zahl, so ist die Summe der ersten n Glieder

$$\frac{\alpha_1}{1^s} + \frac{\alpha_2}{2^s} + \cdots + \frac{\alpha_n}{n^s}$$

eine stetige Function; der Modulus der Summe aller folgenden Glieder ist kleiner als

$$A\left(\frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \cdots\right)$$

und folglich für *alle* Werthe $s \geqq \sigma$ auch kleiner als

$$A\left(\frac{1}{(n+1)^\sigma} + \frac{1}{(n+2)^\sigma} + \cdots\right);$$

da nun σ ein unechter Bruch ist, und folglich (nach §. 117) die Reihe

$$\frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \cdots$$

convergirt, so kann für jede gegebene Grösse δ entsprechend n so gross gewählt werden, dass

$$A\left(\frac{1}{(n+1)^\sigma}+\frac{1}{(n+2)^\sigma}+\cdots\right)<\delta$$

wird; hiermit ist für jede gegebene Grösse δ die Möglichkeit einer Zerlegung unserer Reihe in zwei Bestandtheile von der obigen Art, und also auch die Stetigkeit der Reihen L und $\log L$ für jeden Werth $s > 1$ nachgewiesen.

Der Beweis des Satzes über die arithmetische Progression gründet sich nun auf die Untersuchung des Verhaltens der Reihen L und $\log L$ bei unbegrenzter Annäherung des Exponenten s an den Werth 1. Wir bemerken zunächst, dass diese Reihen je nach der Wahl der in dem Ausdrucke $\psi(n)$ vorkommenden Einheits-Wurzeln θ, η, ω, ω' ... ein ganz verschiedenes Verhalten zeigen; da diese Wurzeln resp. a, b, c, c' ... verschiedene Werthe haben können, so sind in der Form L im Ganzen

$$a\,b\,c\,c' \ldots = \varphi(k)$$

verschiedene besondere Reihen enthalten; wir theilen diese Reihen L in drei Classen ein:

In die *erste* Classe nehmen wir nur eine einzige Reihe L_1 auf, und zwar diejenige, in welcher alle Einheits-Wurzeln θ, η, ω, ω'... den Werth $+1$ haben.

In die *zweite* Classe nehmen wir alle übrigen Reihen L_2 auf, in welchen alle Einheits-Wurzeln reelle Werthe, also die Werthe ± 1 haben.

In die *dritte* Classe nehmen wir alle übrigen Reihen L_3 auf, d. h. alle diejenigen, in welchen wenigstens eine der Einheits-Wurzeln imaginär ist. Die Anzahl dieser Reihen ist jedenfalls gerade, und sie sind paarweise mit einander conjugirt; denn entspricht eine solche Reihe L_3 den Wurzeln θ, η, ω, ω' ..., so entspricht immer eine zweite solche Reihe L'_3 den Wurzeln θ^{-1}, η^{-1}, ω^{-1}, ω'^{-1} ..., und diese beiden Systeme von Wurzeln sind nicht identisch.

Wir wollen nun das Verhalten aller dieser Reihen genau untersuchen, wenn der Exponent $s = 1 + \varrho$ sich dem Werthe 1 nähert, d. h. also, wenn die positive Grösse ϱ unendlich klein wird.