§. 134.

Betrachten wir zunächst das Verhalten der ersten Reihe

$$L_1 = \Sigma \frac{1}{n^s} = \Sigma \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

in welcher n alle relativen Primzahlen zu k durchlaufen muss, so leuchtet ein, dass dieselbe als ein Aggregat von $\varphi(k)$ Partialreihen von der Form

$$\frac{1}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{1}{(\nu+k)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(\nu+2k)^{1+\varrho}} + \cdots$$

angesehen werden kann, wo ν relative Primzahl zu k und $\leqq k$ ist. Da nun (nach §. 117) das Product aus einer solchen Reihe und aus ϱ mit unendlich abnehmendem ϱ sich einem endlichen positiven, von Null verschiedenen Grenzwerth k^{-1} nähert, so können wir

$$L_1 = \frac{l}{\varrho}$$

setzen, wo l mit unendlich abnehmendem ϱ sich ebenfalls einem endlichen, positiven, von Null verschiedenen Grenzwerth nähert.

Ganz anders verhalten sich aber die Reihen L der zweiten und dritten Classe; wir haben gesehen, dass alle diese Reihen, so lange $s > 1$ ist, bestimmte von der Anordnung ihrer Glieder unabhängige Werthe besitzen; von jetzt an wollen wir aber ihre Glieder $\psi(n)$ so anordnen, dass die Zahlen n ihrer Grösse nach wachsend auf einander folgen; die so geordneten Reihen L der zweiten und dritten Classe *convergiren* dann für *alle positiven* Werthe von s und sind nebst ihren Derivirten auch *stetige* Functionen des positiven Exponenten s.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir zunächst die ganze rationale Function

$$f(x) = \Sigma\, \theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega'^{\gamma'} \ldots x^\nu$$

der Variabeln x, wo das Summenzeichen sich auf diejenigen $\varphi(k)$ positiven ganzen Zahlen ν bezieht, die relative Primzahlen zu k und $< k$ sind, und wo $\alpha, \beta, \gamma, \gamma' \ldots$ die Indices der Zahl ν bedeuten. Setzt man $x = 1$, so erhält man

$$f(1) = \Sigma\, \theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega'^{\gamma'} \ldots,$$

wo die Indices $\alpha, \beta, \gamma, \gamma' \ldots$ unabhängig von einander vollständige Restsysteme resp. in Bezug auf die Moduln $a, b, c, c' \ldots$ durchlaufen müssen; es ist daher

$$f(1) = \Sigma\, \theta^\alpha . \Sigma\, \eta^\beta . \Sigma\, \omega^\gamma . \Sigma\, \omega'^{\gamma'} \ldots$$

Da nun nach unserer Voraussetzung die Reihe L eine Reihe der zweiten oder dritten Classe und folglich mindestens eine der Einheitswurzeln $\theta, \eta, \omega, \omega' \ldots$ *nicht* $= +1$ ist, so ist auch mindestens eine der Summen

$$\Sigma\, \theta^\alpha, \quad \Sigma\, \eta^\beta, \quad \Sigma\, \omega^\gamma, \quad \Sigma\, \omega'^{\gamma'} \ldots$$

gleich Null, und hieraus folgt

$$f(1) = 0.$$

Mit Hülfe dieses Resultates kann man nun die oben behaupteten Eigenschaften der Reihen L auf verschiedene Arten nachweisen. Die eine besteht darin, dass man die Reihe L in ein bestimmtes Integral verwandelt. Nach der von *Legendre* eingeführten Bezeichnung ist

$$\Gamma(s) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx$$

eine für alle positiven Werthe von s endliche und stetige Function von s; bedeutet ferner n irgend einen positiven Werth, und ersetzt man x durch x^n, so ergiebt sich

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx;$$

und hieraus folgt leicht (ähnlich wie in den §§. 103, 105), dass die Summe der *ersten* $m\varphi(k)$ Glieder der Reihe L gleich

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} (1 - x^{mk})\, dx$$

ist. Da nun $f(x)$ eine durch x theilbare ganze Function von x ist, welche für $x = 1$ verschwindet, so bleibt innerhalb des ganzen Integrationsgebietes der Modulus der Function

$$\frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k}$$

unterhalb einer angebbaren endlichen Grösse, und hieraus folgt leicht, wenn man m unendlich wachsen lässt, dass

$$L = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx$$

ist. Es zeigt sich also in der That, dass die unendliche Reihe L der zweiten oder dritten Classe, wenn ihre Glieder in der angegebenen Weise geordnet sind, für jeden positiven Werth von s *convergirt*; beachtet man ferner, dass $\Gamma(s)$ für alle positiven Werthe von s ebenfalls positiv und von Null verschieden, sowie, dass die Derivirte von $\Gamma(s)$ eine stetige Function von s ist, so folgt aus dem vorstehenden geschlossenen Ausdruck für die Reihe L, dass dieselbe nebst ihrer Derivirten eine *stetige* Function von s ist, so lange s positiv bleibt.

Zu demselben Resultate gelangt man aber auch auf anderm Wege, nämlich mit Hülfe des weiter unten in §. 143 bewiesenen allgemeinen Satzes. Denn da zufolge der Gleichung $f(1) = 0$ die Summe der Coefficienten

$$\theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega'^{\gamma'} \ldots$$

von je $\varphi(k)$ auf einander folgenden Gliedern der Reihe L den Werth Null hat, so bildet die Reihe L eine solche unendliche Reihe, wie sie in §. 143 betrachtet wird; man braucht dort nur unter $k_1, k_2, k_3 \ldots$ die Werthe der successiven Zahlen n zu verstehen, so ergeben sich unmittelbar unsere obigen Behauptungen über die Convergenz und Stetigkeit der Reihe L und ihrer Derivirten.

Aus diesem Resultat ergiebt sich nun, dass jede Reihe L der zweiten oder dritten Classe, wenn der Exponent $s = 1 + \varrho$ abnehmend dem Werth 1 unendlich nahe kommt, sich einem völlig bestimmten *endlichen* Grenzwerth, nämlich dem Werth

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k} dx$$

nähert, welchen die Reihe L bei der oben angegebenen Anordnung ihrer Glieder für $s = 1$ annimmt.