

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN30976923X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN30976923X|LOG_0149

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 134.

Betrachten wir zunächst das Verhalten der ersten Reihe

$$L_1 = \sum \frac{1}{n^s} = \sum \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

in welcher n alle relativen Primzahlen zu k durchlaufen muss, so leuchtet ein, dass dieselbe als ein Aggregat von $\varphi(k)$ Partialreihen von der Form

$$\frac{1}{v^{1+\varrho}} + \frac{1}{(v+k)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(v+2k)^{1+\varrho}} + \dots$$

angesehen werden kann, wo v relative Primzahl zu k und $\leq k$ ist. Da nun (nach §. 117) das Product aus einer solchen Reihe und aus ϱ mit unendlich abnehmendem ϱ sich einem endlichen positiven, von Null verschiedenen Grenzwert k^{-1} nähert, so können wir

$$L_1 = \frac{l}{\varrho}$$

setzen, wo l mit unendlich abnehmendem ϱ sich ebenfalls einem endlichen, positiven, von Null verschiedenen Grenzwert nähert.

Ganz anders verhalten sich aber die Reihen L der zweiten und dritten Classe; wir haben gesehen, dass alle diese Reihen, so lange $s > 1$ ist, bestimmte von der Anordnung ihrer Glieder unabhängige Werthe besitzen; von jetzt an wollen wir aber ihre Glieder $\psi(n)$ so anordnen, dass die Zahlen n ihrer Grösse nach wachsend auf einander folgen; die so geordneten Reihen L der zweiten und dritten Classe *convergiren* dann für *alle positiven* Werthe von s und sind nebst ihren Derivirten auch *stetige* Functionen des positiven Exponenten s .

Um dies nachzuweisen, betrachten wir zunächst die ganze rationale Function

$$f(x) = \sum \theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega' \gamma' \dots x^\nu$$

der Variablen x , wo das Summenzeichen sich auf diejenigen $\varphi(k)$ positiven ganzen Zahlen ν bezieht, die relative Primzahlen zu k und $< k$ sind, und wo $\alpha, \beta, \gamma, \gamma' \dots$ die Indices der Zahl ν bedeuten. Setzt man $x = 1$, so erhält man

$$f(1) = \sum \theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega' \gamma' \dots,$$

wo die Indices $\alpha, \beta, \gamma, \gamma' \dots$ unabhängig von einander vollständige Restsysteme resp. in Bezug auf die Moduln $a, b, c, c' \dots$ durchlaufen müssen; es ist daher

$$f(1) = \sum \theta^\alpha \cdot \sum \eta^\beta \cdot \sum \omega^\gamma \cdot \sum \omega'^{\gamma'} \dots$$

Da nun nach unserer Voraussetzung die Reihe L eine Reihe der zweiten oder dritten Classe und folglich mindestens eine der Einheitswurzeln $\theta, \eta, \omega, \omega' \dots$ nicht $= +1$ ist, so ist auch mindestens eine der Summen

$$\sum \theta^\alpha, \sum \eta^\beta, \sum \omega^\gamma, \sum \omega'^{\gamma'} \dots$$

gleich Null, und hieraus folgt

$$f(1) = 0.$$

Mit Hülfe dieses Resultates kann man nun die oben behaupteten Eigenschaften der Reihen L auf verschiedene Arten nachweisen. Die eine besteht darin, dass man die Reihe L in ein bestimmtes Integral verwandelt. Nach der von *Legendre* eingeführten Bezeichnung ist

$$\Gamma(s) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x} \right)^{s-1} dx$$

eine für alle positiven Werthe von s endliche und stetige Function von s ; bedeutet ferner n irgend einen positiven Werth, und ersetzt man x durch x^n , so ergibt sich

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{s-1} dx;$$

und hieraus folgt leicht (ähnlich wie in den §§. 103, 105), dass die Summe der *ersten* $m\varphi(k)$ Glieder der Reihe L gleich

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{s-1} (1-x^{mk}) dx$$

ist. Da nun $f(x)$ eine durch x theilbare ganze Function von x ist, welche für $x = 1$ verschwindet, so bleibt innerhalb des ganzen Integrationsgebietes der Modulus der Function

$$\frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k}$$

unterhalb einer angebbaren endlichen Grösse, und hieraus folgt leicht, wenn man m unendlich wachsen lässt, dass

$$L = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{s-1} dx$$

ist. Es zeigt sich also in der That, dass die unendliche Reihe L der zweiten oder dritten Classe, wenn ihre Glieder in der angegebenen Weise geordnet sind, für jeden positiven Werth von s *convergirt*; beachtet man ferner, dass $\Gamma(s)$ für alle positiven Werthe von s ebenfalls positiv und von Null verschieden, sowie, dass die Derivirte von $\Gamma(s)$ eine stetige Function von s ist, so folgt aus dem vorstehenden geschlossenen Ausdruck für die Reihe L , dass dieselbe nebst ihrer Derivirten eine *stetige* Function von s ist, so lange s positiv bleibt.

Zu demselben Resultate gelangt man aber auch auf andern Wege, nämlich mit Hülfe des weiter unten in §. 143 bewiesenen allgemeinen Satzes. Denn da zufolge der Gleichung $f(1) = 0$ die Summe der Coefficienten

$$\theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega' \gamma' \dots$$

von je $\varphi(k)$ auf einander folgenden Gliedern der Reihe L den Werth Null hat, so bildet die Reihe L eine solche unendliche Reihe, wie sie in §. 143 betrachtet wird; man braucht dort nur unter $k_1, k_2, k_3 \dots$ die Werthe der successiven Zahlen n zu verstehen, so ergeben sich unmittelbar unsere obigen Behauptungen über die Convergenz und Stetigkeit der Reihe L und ihrer Derivirten.

Aus diesem Resultat ergibt sich nun, dass jede Reihe L der zweiten oder dritten Classe, wenn der Exponent $s = 1 + \varrho$ abnehmend dem Werth 1 unendlich nahe kommt, sich einem völlig bestimmten *endlichen* Grenzwert, nämlich dem Werth

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^k} dx$$

nähert, welchen die Reihe L bei der oben angegebenen Anordnung ihrer Glieder für $s = 1$ annimmt.