Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0151
LOG Titel: §. 136. Beweis, dass die Grenzwerthe der Reihen L3 von Null verschieden sind
LOG Typ: chapter

$$\Sigma \left(\frac{m}{p}\right) m$$

ungerade, also von Null verschieden; im zweiten Fall ist (§. 107)

$$-\ \Sigma \left(\frac{m}{p}\right) \log \sin \frac{m\pi}{p} = \log \frac{y + z\sqrt{p}}{y - z\sqrt{p}},$$

wo die ganzen Zahlen y, z der Gleichung $y^2 - pz^2 = 4p$ genügen; es kann folglich z, und also auch der vorstehende Ausdruck nicht $= 0$ sein.

§. 136.

Um nun dasselbe auch für jede Reihe L_3 der dritten Classe zu beweisen, addiren wir alle $\varphi(k)$ Gleichungen von der Form

$$\Sigma\ \psi(q) + \tfrac{1}{2}\ \Sigma\ \psi(q^2) + \tfrac{1}{3}\ \Sigma\ \psi(q^3) + \cdots = \log L,$$

welche den verschiedenen Wurzel-Systemen θ, η, ω, ω' ... entsprechen. Bedeutet q irgend eine in k nicht aufgehende Primzahl, und μ irgend eine positive ganze Zahl, so liefert die linke Seite einer jeden solchen Gleichung ein Glied

$$\frac{1}{\mu}\ \psi(q^\mu),$$

in welchem

$$\frac{1}{\mu}\ \frac{1}{q^{\mu s}}$$

mit dem Coefficienten

$$\theta^{\alpha\mu}\ \eta^{\beta\mu}\ \omega^{\gamma\mu}\ \omega'^{\gamma'\mu}\ \ldots$$

behaftet ist, wo α, β, γ, γ' ... die Indices von q bedeuten. Die Summe aller dieser den verschiedenen Wurzelsystemen θ, η, ω, ω' ... entsprechenden Coefficienten wird daher gleich dem Product

$$\Sigma\ \theta^{\alpha\mu}\ \Sigma\ \eta^{\beta\mu}\ \Sigma\ \omega^{\gamma\mu}\ \Sigma\ \omega'^{\gamma'\mu}\ \ldots,$$

wo die Summenzeichen sich der Reihe nach auf die a, b, c, c' ... verschiedenen Werthe von θ, η, ω, ω' ... beziehen. Bekanntlich ist nun die Summe aller gleich hohen Potenzen der Wurzeln von einer Gleichung der Form $x^m = 1$ nur dann von Null verschieden, und zwar $= m$, wenn der Exponent dieser Potenzen durch m theilbar ist; mithin ist das vorstehende Product nur dann von Null verschieden, und zwar $= a b c c' \ldots = \varphi(k)$, wenn die Exponenten $\alpha\mu, \beta\mu, \gamma\mu, \gamma'\mu \ldots$ resp. durch $a, b, c, c' \ldots$ theilbar sind; da nun $\alpha\mu, \beta\mu, \gamma\mu, \gamma'\mu \ldots$ die Indices von q^μ sind, so wird dies nur dann und immer dann eintreten, wenn

$$q^\mu \equiv 1 \pmod{2^\lambda}, \quad q^\mu \equiv 1 \pmod{p^\pi}, \quad q^\mu \equiv 1 \pmod{p'^{\pi'}} \ldots,$$

d. h. also, wenn

$$q^\mu \equiv 1 \pmod{k}$$

ist. Mithin wird die Summe aller jener Gleichungen folgende Form annehmen

$$\varphi(k)\left\{\Sigma \frac{1}{q^s} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{q^{2s}} + \cdots + \frac{1}{\mu}\Sigma \frac{1}{q^{\mu s}} + \cdots\right\}$$
$$= \log L_1 + \Sigma \log L_2 + \Sigma \log (L_3 L'_3),$$

wo auf der linken Seite das erste, zweite Summenzeichen u. s. f. sich auf alle die in k nicht aufgehenden Primzahlen q bezieht, welche resp. den Bedingungen $q \equiv 1$, $q^2 \equiv 1 \pmod{k}$ u. s. f. Genüge leisten; auf der rechten Seite bezieht sich das erste Summenzeichen auf alle Reihen L_2 der zweiten Classe, das zweite auf alle verschiedenen Paare $L_3 L'_3$ conjugirter Reihen dritter Classe. Mit Hülfe dieser Gleichung sind wir im Stande zu beweisen, dass der endliche Grenzwerth, welchem sich irgend eine Reihe L_3 der dritten Classe nähert, von Null verschieden ist.

Dieser Beweis stützt sich auf das schon früher (§. 134) erhaltene Resultat, dass jede solche Reihe L_3 für alle positiven Werthe von s eine stetige Function von s ist, und dass dasselbe auch von ihrer Derivirten gilt. Wir können daher

$$L_3 = f(s) + iF(s)$$
$$L'_3 = f(s) - iF(s)$$

setzen, wo $f(s)$, $F(s)$ und die Derivirten $f'(s)$, $F'(s)$ stetige Functionen von s sind, so lange s positiv bleibt; da also der Grenzwerth von $L_3 = f(1) + iF(1)$ ist, so muss, falls derselbe $= 0$ ist, nothwendig $f(1) = 0$ und $F(1) = 0$ sein; hieraus folgt nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung, dass für jeden Werth $s = 1 + \varrho$, welcher > 1 ist,

$$L_3 = \varrho \,\{f'(1+\delta\varrho) + iF'(1+\varepsilon\varrho)\}$$
$$L'_3 = \varrho \,\{f'(1+\delta\varrho) - iF'(1+\varepsilon\varrho)\}$$

sein wird, wo δ und ε zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen; mithin wird

$$L_3 L'_3 = \varrho^2 \,\{f'(1+\delta\varrho)^2 + F'(1+\varepsilon\varrho)^2\} = \varrho^2 R,$$

wo R (in Folge der Endlichkeit und Stetigkeit der Derivirten $f'(s)$, $F'(s)$) mit unendlich abnehmendem positiven ϱ sich einem endlichen (nicht negativen) Grenzwerth

$$f'(1)^2 + F'(1)^2$$

nähert. Hieraus folgt nun

$$\log(L_3 L'_3) = -2\log\frac{1}{\varrho} + \log R,$$

wo $\log R$ mit unendlich abnehmendem ϱ sich entweder einem endlichen Grenzwerth nähert oder negativ über alle Grenzen wächst, falls R unendlich klein wird.

Sind im Ganzen m solche Paare von Reihen dritter Classe vorhanden, welche gleichzeitig mit ϱ unendlich klein werden, so ist folglich

$$\Sigma \log(L_3 L'_3) = -2m\log\frac{1}{\varrho} + t,$$

wo t jedenfalls nicht positiv über alle Grenzen wachsen kann, sondern entweder endlich bleibt, oder negativ über alle Grenzen wächst; denn da jedes Product $L_3 L'_3$ sich einem endlichen nicht negativen Werth nähert, so kann auch kein Glied $\log(L_3 L'_3)$ positiv über alle Grenzen wachsen.

Da ferner schon gezeigt ist, dass der Grenzwerth einer jeden Reihe L_2 der zweiten Classe von Null verschieden ist, so nähert sich die Summe

$$\Sigma \log L_2$$

der (jedenfalls reellen) Reihen $\log L_2$ einem endlichen Grenzwerth.

Ausserdem ist schon bewiesen, dass das Product ϱL_1 sich einem endlichen von Null verschiedenen Werth nähert; mithin ist

$$\log L_1 = \log\frac{1}{\varrho} + t',$$