

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0151

**LOG Titel:** S. 136. Beweis, dass die Grenzwerte der Reihen L3 von Null verschieden sind

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

$$\Sigma \left(\frac{m}{p}\right) m$$

ungerade, also von Null verschieden; im zweiten Fall ist (§. 107)

$$- \Sigma \left(\frac{m}{p}\right) \log \sin \frac{m\pi}{p} = \log \frac{y + z\sqrt{p}}{y - z\sqrt{p}},$$

wo die ganzen Zahlen  $y, z$  der Gleichung  $y^2 - pz^2 = 4p$  genügen; es kann folglich  $z$ , und also auch der vorstehende Ausdruck nicht  $= 0$  sein.

### §. 136.

Um nun dasselbe auch für jede Reihe  $L_3$  der dritten Classe zu beweisen, addiren wir alle  $\varphi(k)$  Gleichungen von der Form

$$\Sigma \psi(q) + \frac{1}{2} \Sigma \psi(q^2) + \frac{1}{3} \Sigma \psi(q^3) + \dots = \log L,$$

welche den verschiedenen Wurzel-Systemen  $\theta, \eta, \omega, \omega' \dots$  entsprechen. Bedeutet  $q$  irgend eine in  $k$  nicht aufgehende Primzahl, und  $\mu$  irgend eine positive ganze Zahl, so liefert die linke Seite einer jeden solchen Gleichung ein Glied

$$\frac{1}{\mu} \psi(q^\mu),$$

in welchem

$$\frac{1}{\mu} \frac{1}{q^{\mu s}}$$

mit dem Coefficienten

$$\theta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\mu} \omega^{\gamma\mu} \omega'^{\gamma'\mu} \dots$$

behaftet ist, wo  $\alpha, \beta, \gamma, \gamma' \dots$  die Indices von  $q$  bedeuten. Die Summe aller dieser den verschiedenen Wurzelsystemen  $\theta, \eta, \omega, \omega' \dots$  entsprechenden Coefficienten wird daher gleich dem Product

$$\Sigma \theta^{\alpha\mu} \Sigma \eta^{\beta\mu} \Sigma \omega^{\gamma\mu} \Sigma \omega'^{\gamma'\mu} \dots,$$

wo die Summenzeichen sich der Reihe nach auf die  $a, b, c, c' \dots$  verschiedenen Werthe von  $\theta, \eta, \omega, \omega' \dots$  beziehen. Bekanntlich ist nun die Summe aller gleich hohen Potenzen der Wurzeln von einer Gleichung der Form  $x^m = 1$  nur dann von Null verschieden,

und zwar  $= m$ , wenn der Exponent dieser Potenzen durch  $m$  theilbar ist; mithin ist das vorstehende Product nur dann von Null verschieden, und zwar  $= abc c' \dots = \varphi(k)$ , wenn die Exponenten  $\alpha\mu, \beta\mu, \gamma\mu, \gamma'\mu \dots$  resp. durch  $a, b, c, c' \dots$  theilbar sind; da nun  $\alpha\mu, \beta\mu, \gamma\mu, \gamma'\mu \dots$  die Indices von  $q^\mu$  sind, so wird dies nur dann und immer dann eintreten, wenn

$$q^\mu \equiv 1 \pmod{2^\lambda}, \quad q^\mu \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \quad q^\mu \equiv 1 \pmod{p'^{\alpha'}} \dots,$$

d. h. also, wenn

$$q^\mu \equiv 1 \pmod{k}$$

ist. Mithin wird die Summe aller jener Gleichungen folgende Form annehmen

$$\begin{aligned} \varphi(k) \left\{ \sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2s}} + \dots + \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{q^{\mu s}} + \dots \right\} \\ = \log L_1 + \sum \log L_2 + \sum \log(L_3 L'_3), \end{aligned}$$

wo auf der linken Seite das erste, zweite Summenzeichen u. s. f. sich auf alle die in  $k$  nicht aufgehenden Primzahlen  $q$  bezieht, welche resp. den Bedingungen  $q \equiv 1, q^2 \equiv 1 \pmod{k}$  u. s. f. Genüge leisten; auf der rechten Seite bezieht sich das erste Summenzeichen auf alle Reihen  $L_2$  der zweiten Classe, das zweite auf alle verschiedenen Paare  $L_3 L'_3$  conjugirter Reihen dritter Classe. Mit Hülfe dieser Gleichung sind wir im Stande zu beweisen, dass der endliche Grenzwert, welchem sich irgend eine Reihe  $L_3$  der dritten Classe nähert, von Null verschieden ist.

Dieser Beweis stützt sich auf das schon früher (§. 134) erhaltene Resultat, dass jede solche Reihe  $L_3$  für alle positiven Werthe von  $s$  eine stetige Function von  $s$  ist, und dass dasselbe auch von ihrer Derivirten gilt. Wir können daher

$$L_3 = f(s) + iF(s)$$

$$L'_3 = f(s) - iF(s)$$

setzen, wo  $f(s), F(s)$  und die Derivirten  $f'(s), F'(s)$  stetige Functionen von  $s$  sind, so lange  $s$  positiv bleibt; da also der Grenzwert von  $L_3 = f(1) + iF(1)$  ist, so muss, falls derselbe  $= 0$  ist, nothwendig  $f(1) = 0$  und  $F(1) = 0$  sein; hieraus folgt nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung, dass für jeden Werth  $s = 1 + \varrho$ , welcher  $> 1$  ist,

$$L_3 = \varrho \{f'(1 + \delta\varrho) + iF'(1 + \varepsilon\varrho)\}$$

$$L'_3 = \varrho \{f'(1 + \delta\varrho) - iF'(1 + \varepsilon\varrho)\}$$

sein wird, wo  $\delta$  und  $\varepsilon$  zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen; mit- hin wird

$$L_3 L'_3 = \varrho^2 \{f'(1 + \delta\varrho)^2 + F'(1 + \varepsilon\varrho)^2\} = \varrho^2 R,$$

wo  $R$  (in Folge der Endlichkeit und Stetigkeit der Derivirten  $f'(s)$ ,  $F'(s)$ ) mit unendlich abnehmendem positiven  $\varrho$  sich einem endlichen (nicht negativen) Grenzwert

$$f'(1)^2 + F'(1)^2$$

nähert. Hieraus folgt nun

$$\log(L_3 L'_3) = -2 \log \frac{1}{\varrho} + \log R,$$

wo  $\log R$  mit unendlich abnehmendem  $\varrho$  sich entweder einem endlichen Grenzwert nähert oder negativ über alle Grenzen wächst, falls  $R$  unendlich klein wird.

Sind im Ganzen  $m$  solche Paare von Reihen dritter Classe vorhanden, welche gleichzeitig mit  $\varrho$  unendlich klein werden, so ist folglich

$$\sum \log(L_3 L'_3) = -2m \log \frac{1}{\varrho} + t,$$

wo  $t$  jedenfalls nicht positiv über alle Grenzen wachsen kann, sondern entweder endlich bleibt, oder negativ über alle Grenzen wächst; denn da jedes Product  $L_3 L'_3$  sich einem endlichen nicht negativen Werth nähert, so kann auch kein Glied  $\log(L_3 L'_3)$  positiv über alle Grenzen wachsen.

Da ferner schon gezeigt ist, dass der Grenzwert einer jeden Reihe  $L_2$  der zweiten Classe von Null verschieden ist, so nähert sich die Summe

$$\sum \log L_2$$

der (jedenfalls reellen) Reihen  $\log L_2$  einem endlichen Grenzwert.

Ausserdem ist schon bewiesen, dass das Product  $\varrho L_1$  sich einem endlichen von Null verschiedenen Werth nähert; mit- hin ist

$$\log L_1 = \log \frac{1}{\varrho} + t',$$