

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0152

**LOG Titel:** S. 137. Beweis des Satzes über die arithmetische Progression

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

wo  $t'$  endlich bleibt; folglich ist die ganze rechte Seite der obigen Gleichung von der Form

$$-(2m - 1) \log \frac{1}{\rho} + T,$$

wo  $T$  mit unendlich abnehmendem  $\rho$  jedenfalls nicht positiv über alle Grenzen wachsen kann. Existirte also mindestens eine Reihe  $L_3$  dritter Classe, welche mit  $\rho$  unendlich klein würde, d. h. wäre  $m$  mindestens  $= 1$ , so würde die ganze rechte Seite unserer Gleichung mit unendlich abnehmendem positiven  $\rho$  *negativ* unendlich wachsen. Dies ist aber unmöglich, da die linke Seite für alle Werthe von  $\rho$  positiv bleibt. Mithin ist  $m = 0$ , d. h. jede Reihe der dritten Classe nähert sich einem von Null verschiedenen Grenzwert, was zu beweisen war.

Hieraus folgt endlich noch, dass auch jede der Reihen  $\log L_3$  einen endlichen Grenzwert haben muss, wenn man berücksichtigt, dass nach dem früher Bewiesenen (§. 133) jede solche Reihe sich stetig mit  $s$  ändert, so lange  $s > 1$  ist.

§. 137.

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchungen besteht darin, dass bei dem unendlichen Abnehmen der positiven Grösse  $\rho = s - 1$  die Reihe  $\log L_1$  positiv über alle Grenzen wächst, während alle übrigen Reihen  $\log L$  sich endlichen Grenzwerten nähern. Mit Hülfe desselben sind wir im Stande, den Satz über die arithmetische Progression vollständig zu beweisen.

Es sei nämlich  $m$  irgend eine relative Primzahl zu  $k$ , so multipliciren wir jede der  $\varphi(k)$  Reihen von der Form

$$\sum \psi(q) + \frac{1}{2} \sum \psi(q^2) + \frac{1}{3} \sum \psi(q^3) + \dots = \log L,$$

welche einem bestimmten System von Einheits-Wurzeln  $\theta, \eta, \omega, \omega' \dots$  entspricht, mit dem correspondirenden Werth

$$\theta^{-\alpha_1} \eta^{-\beta_1} \omega^{-\gamma_1} \omega'^{-\gamma_1'} \dots = \chi,$$

wo  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \gamma_1' \dots$  die Indices der Zahl  $m$  bedeuten, und addiren alle Producte; dann wird, wenn wieder  $\alpha, \beta, \gamma, \gamma' \dots$  die Indices einer bestimmten Primzahl  $q$  sind, das Glied

$$\frac{1}{\mu} \frac{1}{q^{\mu s}}$$

den Coefficienten

$$\Sigma \theta^{\alpha\mu - \alpha_1} \eta^{\beta\mu - \beta_1} \omega^{\gamma\mu - \gamma_1} \omega' \gamma'^{\mu - \gamma'_1} \dots$$

erhalten, wo sich das Summenzeichen auf alle  $\varphi(k)$  Wurzel-Systeme bezieht; dieser Coefficient ist daher auch gleich dem Product aus den einzelnen Summen

$$\Sigma \theta^{\alpha\mu - \alpha_1}, \Sigma \eta^{\beta\mu - \beta_1}, \Sigma \omega^{\gamma\mu - \gamma_1}, \Sigma \omega' \gamma'^{\mu - \gamma'_1} \dots,$$

in welchen die Buchstaben  $\theta, \eta, \omega, \omega' \dots$  resp. ihre  $a, b, c, c' \dots$  verschiedenen Werthe durchlaufen müssen; dieser Coefficient wird folglich nur dann von Null verschieden, und zwar  $= abc c' \dots = \varphi(k)$  sein, wenn die Exponenten  $\alpha\mu - \alpha_1, \beta\mu - \beta_1, \gamma\mu - \gamma_1, \gamma'\mu - \gamma'_1 \dots$  resp. durch  $a, b, c, c' \dots$  theilbar sind, d. h. wenn

$$q^\mu \equiv m \pmod{k}$$

ist. Die Summation aller Producte  $\chi \log L$  giebt daher das Resultat

$$\varphi(k) \left\{ \Sigma \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3} \Sigma \frac{1}{q^{3s}} + \dots \right\} \\ = \Sigma \chi \log L,$$

wo auf der linken Seite das erste, zweite, dritte Summenzeichen u. s. f. sich auf alle Primzahlen  $q$  bezieht, welche resp. den Bedingungen  $q \equiv m, q^2 \equiv m, q^3 \equiv m \pmod{k}$  u. s. f. genügen, während das Summenzeichen auf der rechten Seite sich auf die sämtlichen  $\varphi(k)$  verschiedenen Wurzel-Systeme  $\theta, \eta, \omega, \omega' \dots$  bezieht. Bezeichnet man nun mit  $z$  alle positiven ganzen Zahlen mit Ausnahme von 1, so ist offenbar

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3} \Sigma \frac{1}{q^{3s}} + \frac{1}{4} \Sigma \frac{1}{q^{4s}} + \dots = Q$$

kleiner als

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{z^4} + \dots,$$

wo in jeder Summe  $z$  alle seine Werthe durchläuft; da nun, sobald  $z \geq 2$ , immer

$$\frac{1}{z^3} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{z^2}, \quad \frac{1}{z^4} \leq \frac{1}{4} \frac{1}{z^2}, \quad \frac{1}{z^5} \leq \frac{1}{8} \frac{1}{z^2} \dots$$

ist, so ergibt sich

$$Q < \Sigma \frac{1}{z^2};$$

während daher  $s$  abnehmend sich dem Werthe 1 nähert, bleibt  $Q$  fortwährend unterhalb einer endlichen Grösse. Da ferner alle Glieder  $\chi \log L$  sich endlichen Grenzwerten nähern, mit Ausnahme des einzigen Gliedes  $\log L_1$ , welches über alle Grenzen wächst, so muss auch die Summe

$$\sum \frac{1}{q^s}$$

über alle Grenzen wachsen; dies wäre aber nicht möglich, wenn diese Summe aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestände, und folglich muss es unendlich viele Primzahlen  $q$  geben, welche  $\equiv m \pmod{k}$  sind; d. h. also:

*Jede unbegrenzte arithmetische Progression  $kx + m$ , deren Anfangsglied  $m$  und Differenz  $k$  relative Primzahlen sind, enthält unendlich viele positive Primzahlen  $q$ .\*).*

---

\*) Ueber die Ausdehnung dieses Satzes auf Linearformen mit complexen Coefficienten, sowie auf quadratische Formen siehe *Dirichlet: Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen*, Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1841; Monatsbericht der Berliner Akademie (März 1840) oder *Crelle's Journal XXI*; *Comptes rendus der Pariser Akademie 1849*, T. X, p. 285.