Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0152
LOG Titel: §. 137. Beweis des Satzes über die arithmetische Progression
LOG Typ: chapter

wo t' endlich bleibt; folglich ist die ganze rechte Seite der obigen Gleichung von der Form

$$-(2m-1)\log\frac{1}{\varrho}+T,$$

wo T mit unendlich abnehmendem ϱ jedenfalls nicht positiv über alle Grenzen wachsen kann. Existirte also mindestens eine Reihe L_3 dritter Classe, welche mit ϱ unendlich klein würde, d. h. wäre m mindestens $=1$, so würde die ganze rechte Seite unserer Gleichung mit unendlich abnehmendem positiven ϱ *negativ* unendlich wachsen. Dies ist aber unmöglich, da die linke Seite für alle Werthe von ϱ positiv bleibt. Mithin ist $m=0$, d. h. jede Reihe der dritten Classe nähert sich einem von Null verschiedenen Grenzwerth, was zu beweisen war.

Hieraus folgt endlich noch, dass auch jede der Reihen $\log L_3$ einen endlichen Grenzwerth haben muss, wenn man berücksichtigt, dass nach dem früher Bewiesenen (§. 133) jede solche Reihe sich stetig mit s ändert, so lange $s>1$ ist.

§. 137.

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchungen besteht darin, dass bei dem unendlichen Abnehmen der positiven Grösse $\varrho=s-1$ die Reihe $\log L_1$ positiv über alle Grenzen wächst, während alle übrigen Reihen $\log L$ sich endlichen Grenzwerthen nähern. Mit Hülfe desselben sind wir im Stande, den Satz über die arithmetische Progression vollständig zu beweisen.

Es sei nämlich m irgend eine relative Primzahl zu k, so multipliciren wir jede der $\varphi(k)$ Reihen von der Form

$$\Sigma\,\psi(q)+\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\psi(q^2)+\tfrac{1}{3}\,\Sigma\,\psi(q^3)+\cdots=\log L,$$

welche einem bestimmten System von Einheits-Wurzeln $\theta,\eta,\omega,\omega'\ldots$ entspricht, mit dem correspondirenden Werth

$$\theta^{-\alpha_1}\eta^{-\beta_1}\omega^{-\gamma_1}\omega'^{-\gamma_1'}\ldots=\chi,$$

wo $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\gamma_1'\ldots$ die Indices der Zahl m bedeuten, und addiren alle Producte; dann wird, wenn wieder $\alpha,\beta,\gamma,\gamma'\ldots$ die Indices einer bestimmten Primzahl q sind, das Glied

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{1}{q^{\mu s}}$$

den Coefficienten

$$\sum \theta^{\alpha\mu-\alpha_1}\, \eta^{\beta\mu-\beta_1}\, \omega^{\gamma\mu-\gamma_1}\, \omega'^{\gamma'\mu-\gamma_1'} \ldots$$

erhalten, wo sich das Summenzeichen auf alle $\varphi(k)$ Wurzel-Systeme bezieht; dieser Coefficient ist daher auch gleich dem Product aus den einzelnen Summen

$$\sum \theta^{\alpha\mu-\alpha_1},\ \sum \eta^{\beta\mu-\beta_1},\ \sum \omega^{\gamma\mu-\gamma_1},\ \sum \omega'^{\gamma'\mu-\gamma_1'} \ldots,$$

in welchen die Buchstaben $\theta, \eta, \omega, \omega' \ldots$ resp. ihre $a, b, c, c' \ldots$ verschiedenen Werthe durchlaufen müssen; dieser Coefficient wird folglich nur dann von Null verschieden, und zwar $= a\,b\,c\,c' \ldots = \varphi(k)$ sein, wenn die Exponenten $\alpha\mu - \alpha_1$, $\beta\mu - \beta_1$, $\gamma\mu - \gamma_1$, $\gamma'\mu - \gamma_1' \ldots$ resp. durch $a, b, c, c' \ldots$ theilbar sind, d. h. wenn

$$q^\mu \equiv m \pmod{k}$$

ist. Die Summation aller Producte $\chi \log L$ giebt daher das Resultat

$$\varphi(k) \left\{ \sum \frac{1}{q^s} + \tfrac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2s}} + \tfrac{1}{3} \sum \frac{1}{q^{3s}} + \cdots \right\} = \sum \chi \log L,$$

wo auf der linken Seite das erste, zweite, dritte Summenzeichen u. s. f. sich auf alle Primzahlen q bezieht, welche resp. den Bedingungen $q \equiv m$, $q^2 \equiv m$, $q^3 \equiv m \pmod{k}$ u. s. f. genügen, während das Summenzeichen auf der rechten Seite sich auf die sämmtlichen $\varphi(k)$ verschiedenen Wurzel-Systeme $\theta, \eta, \omega, \omega' \ldots$ bezieht. Bezeichnet man nun mit z alle positiven ganzen Zahlen mit Ausnahme von 1, so ist offenbar

$$\tfrac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2s}} + \tfrac{1}{3} \sum \frac{1}{q^{3s}} + \tfrac{1}{4} \sum \frac{1}{q^{4s}} + \cdots = Q$$

kleiner als

$$\tfrac{1}{2} \sum \frac{1}{z^2} + \tfrac{1}{2} \sum \frac{1}{z^3} + \tfrac{1}{2} \sum \frac{1}{z^4} + \cdots,$$

wo in jeder Summe z alle seine Werthe durchläuft; da nun, sobald $z \geqq 2$, immer

$$\frac{1}{z^3} \leqq \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2},\quad \frac{1}{z^4} \leqq \frac{1}{4}\,\frac{1}{z^2},\quad \frac{1}{z^5} \leqq \frac{1}{8}\,\frac{1}{z^2} \ldots$$

ist, so ergiebt sich

$$Q < \sum \frac{1}{z^2};$$

während daher s abnehmend sich dem Werthe 1 nähert, bleibt Q fortwährend unterhalb einer endlichen Grösse. Da ferner alle Glieder $\chi \log L$ sich endlichen Grenzwerthen nähern, mit Ausnahme des einzigen Gliedes $\log L_1$, welches über alle Grenzen wächst, so muss auch die Summe

$$\Sigma \frac{1}{q^s}$$

über alle Grenzen wachsen; dies wäre aber nicht möglich, wenn diese Summe aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestände, und folglich muss es unendlich viele Primzahlen q geben, welche $\equiv m$ (mod. k) sind; d. h. also:

Jede unbegrenzte arithmetische Progression $kx + m$, deren Anfangsglied m und Differenz k relative Primzahlen sind, enthält unendlich viele positive Primzahlen q *).

---

*) Ueber die Ausdehnung dieses Satzes auf Linearformen mit complexen Coefficienten, sowie auf quadratische Formen siehe *Dirichlet: Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen*, Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1841; Monatsbericht der Berliner Akademie (März 1840) oder Crelle's Journal XXI; Comptes rendus der Pariser Akademie 1849, T. X, p. 285.