

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0154

**LOG Titel:** S. 138. Beweis einer Eigenschaft des Ausdrucks  $\phi(m)$ .

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## VII. Ueber einige Sätze aus der Theorie der Kreis- theilung.

§. 138.

Sind  $p, p', p'' \dots$  positive und von einander verschiedene Primzahlen, so stimmen (nach §. 9) die Glieder des entwickelten Productes

$$(p + 1) (p' + 1) (p'' + 1) \dots$$

mit den sämtlichen Divisoren des Productes

$$P = p p' p'' \dots$$

überein; dieselben Divisoren entstehen offenbar auch durch die Entwicklung des Productes

$$(p - 1) (p' - 1) (p'' - 1) \dots,$$

aber die eine Hälfte derselben wird mit positivem, die andere mit negativem Zeichen behaftet sein; wir wollen die erstern mit  $\delta_1$ , die letztern mit  $\delta_2$  bezeichnen, so dass

$$(p - 1) (p' - 1) (p'' - 1) \dots = \Sigma \delta_1 - \Sigma \delta_2$$

wird, und wir bemerken, dass die Zahl  $P$  selbst zu der Classe der erstern gehört. Ist nun  $\delta$  irgend ein Divisor von  $P$ , aber  $< P$ , so lässt sich leicht zeigen, dass die Anzahl der durch  $\delta$  theilbaren Zahlen  $\delta_1$  genau gleich der Anzahl der durch  $\delta$  theilbaren Zahlen  $\delta_2$  ist. Denn wenn man mit  $q, q', q'' \dots$  alle diejenigen Primfactoren von  $P$  bezeichnet, welche nicht in  $\delta$  aufgehen, so stimmen die durch  $\delta$  theilbaren Zahlen  $\delta_1$  und  $-\delta_2$  resp. mit den positiven und negativen Gliedern des entwickelten Productes

$$\delta (q - 1) (q' - 1) (q'' - 1) \dots$$

überein, und da  $\delta < P$  ist, also mindestens eine solche Primzahl  $q$  vorhanden ist, so ist die Anzahl der positiven Glieder dieses Productes genau gleich der Anzahl der negativen.

Dieser Satz lässt sich leicht verallgemeinern. Bedeutet  $m$  irgend eine positive ganze Zahl  $> 1$ , und sind  $p, p', p'' \dots$  die sämtlichen von einander verschiedenen in  $m$  aufgehenden positiven Primzahlen, so kann man

$$m \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p'}\right) \left(1 - \frac{1}{p''}\right) \dots = \sum \mu_1 - \sum \mu_2$$

setzen, wo mit  $\mu_1$  und  $-\mu_2$  resp. alle positiven und negativen Glieder des entwickelten Productes linker Hand bezeichnet sind. Behält man die vorhergehenden Bezeichnungen bei, so stimmen offenbar die Zahlen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  resp. mit den Zahlen  $m' \delta_1$  und  $m' \delta_2$  überein, wenn zur Abkürzung  $m = m' P$  gesetzt wird. Bedeutet nun  $\mu$  irgend einen Divisor von  $m$ , mit Ausnahme von  $m$  selbst, so folgt hieraus wieder, dass unter den Zahlen  $\mu_1$  ebenso viele durch  $\mu$  theilbar sein werden, wie unter den Zahlen  $\mu_2$ . Denn, wenn  $\mu'$  der grösste gemeinschaftliche Divisor von  $\mu$  und  $m'$  ist, so kann man  $\mu = \mu' \delta$  setzen, wo  $\delta$  nothwendig ein Divisor von  $P$ , und zwar  $< P$  sein muss; und da eine Zahl  $\mu_1 = m' \delta_1$  oder  $\mu_2 = m' \delta_2$  stets und nur dann durch  $\mu = \mu' \delta$  theilbar ist, sobald resp.  $\delta_1$  oder  $\delta_2$  durch  $\delta$  theilbar ist, so ergiebt sich in der That, dass die Anzahl der durch  $\mu$  theilbaren Zahlen  $\mu_1$  genau gleich der Anzahl der durch  $\mu$  theilbaren Zahlen  $\mu_2$  ist.

Von dieser Eigenschaft der Zahlen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  kann man vielfache Anwendungen machen. Hängen z. B. zwei Functionen  $f(m)$  und  $F(m)$  einer beliebigen ganzen Zahl  $m$  durch eine der beiden Relationen

$$\sum f(\mu) = F(m)$$

oder

$$\prod f(\mu) = F(m)$$

zusammen, wo das Summen- oder Productzeichen sich jedesmal auf alle Divisoren  $\mu$  (incl.  $m$ ) der Zahl  $m$  bezieht, so folgt daraus resp. die Umkehrung

$$f(m) = \sum F(\mu_1) - \sum F(\mu_2)$$

oder

$$f(m) = \frac{\prod F(\mu_1)}{\prod F(\mu_2)},$$

wo die Summen- oder Productzeichen sich auf alle Werthe von  $\mu_1$  oder auf alle Werthe von  $\mu_2$  beziehen; denn ersetzt man rechts jeden Werth  $F(\mu_1)$  und  $F(\mu_2)$  durch die Summe oder das Product der Werthe  $f(\mu)$ , die den sämmtlichen Divisoren  $\mu$  von  $\mu_1$  oder  $\mu_2$  entsprechen, so werden zufolge der obigen Eigenschaft der Zahlen  $\mu_1, \mu_2$  alle Werthe  $f(\mu)$  sich aufheben, in welchen  $\mu < m$  ist, und es wird allein der Werth  $f(m)$  zurückbleiben.

Als Beispiel wählen wir die Aufgabe, die Anzahl  $\varphi(m)$  der ganzen Zahlen zu bestimmen, welche relative Primzahlen zu  $m$  und nicht grösser als  $m$  sind; aus dieser Definition der Function  $\varphi(m)$  ist in §. 13 ohne alle Rechnung der Satz abgeleitet, dass

$$\Sigma \varphi(\mu) = m$$

ist, wo das Summenzeichen sich auf alle Divisoren  $\mu$  von  $m$  bezieht; setzen wir daher  $F(m) = m$ , so ergibt sich umgekehrt

$$\varphi(m) = \Sigma \mu_1 - \Sigma \mu_2,$$

also

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p'}\right) \left(1 - \frac{1}{p''}\right) \dots;$$

diese Function ist daher durch den Satz des §. 13 schon vollständig charakterisirt.

Ein anderes Beispiel ist folgendes. Ist der Werth der Function  $f(m) = p$ , sobald die Zahl  $m$  eine Potenz einer Primzahl  $p$  ist, dagegen  $= 1$ , so oft  $m = 1$  oder durch mehrere verschiedene Primzahlen theilbar ist, so leuchtet ein, dass

$$\Pi f(\mu) = m$$

ist, wo das Productzeichen sich auf alle Divisoren  $\mu$  von  $m$  bezieht; hieraus folgt nach dem obigen Satze, dass umgekehrt der Quotient

$$\frac{\Pi \mu_1}{\Pi \mu_2} = f(m),$$

also nur dann von 1 verschieden ist, wenn  $m$  eine Potenz einer Primzahl ist; und zwar ist dieser Quotient dann gleich dieser Primzahl.

Aus der Definition der Divisoren  $\mu_1$  und  $\mu_2$  folgt endlich auch, dass stets

$\psi(m) (\psi(p) - 1) (\psi(p') - 1) (\psi(p'') - 1) \dots = \Sigma \psi(\mu_1) - \Sigma \psi(\mu_2)$   
ist, wenn die Function  $\psi$  die Eigenschaft  $\psi(z) \psi(z') = \psi(zz')$  besitzt.