

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0156

LOG Titel: S. 140. Berechnung der Coefficienten dieser Factoren

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Gleichungen (und ebenso ihr Product) wieder Wurzeln von primären Gleichungen sind; da nun θ die Wurzel einer primären Gleichung ist, so gilt dasselbe von jedem Coefficienten der Functionen $A(x)$ und $B(x)$ und folglich auch von

$$2y \text{ und } 2z i^{1/4(P-1)^2} \sqrt{P},$$

und hieraus folgt sogleich, dass die rationalen Zahlen $2y$ und $2z$ ganze Zahlen sein müssen.

Fasst man dies zusammen, so ergibt sich, dass man gleichzeitig

$$2A(x) = Y(x) - Z(x) i^{1/4(P-1)^2} \sqrt{P}$$

$$2B(x) = Y(x) + Z(x) i^{1/4(P-1)^2} \sqrt{P}$$

setzen kann, wo $Y(x)$ und $Z(x)$ ganze Functionen bedeuten, deren sämtliche Coefficienten ganze rationale Zahlen sind*). Multiplirt man die beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$Y(x)^2 - \left(\frac{-1}{P}\right) P Z(x)^2 = 4 \frac{\prod (x^{\mu_1} - 1)}{\prod (x^{\mu_2} - 1)}.$$

§. 140.

Wir bemerken nun noch, dass man immer nur die Hälfte der Coefficienten von $Y(x)$ und $Z(x)$ zu berechnen braucht. Es ist nämlich

$$x^\tau A\left(\frac{1}{x}\right) = \prod (1 - \theta^a x) = (-1)^\tau \theta^{\Sigma a} \prod (x - \theta^{-a})$$

$$x^\tau B\left(\frac{1}{x}\right) = \prod (1 - \theta^b x) = (-1)^\tau \theta^{\Sigma b} \prod (x - \theta^{-b});$$

nun ist, je nachdem $P \equiv 1$, oder $P \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = +1, \text{ oder } \left(\frac{-1}{P}\right) = -1,$$

und folglich

$$\prod (x - \theta^{-a}) = A(x), \quad \prod (x - \theta^{-b}) = B(x)$$

oder

$$\prod (x - \theta^{-a}) = B(x), \quad \prod (x - \theta^{-b}) = A(x);$$

*) Vergl. Gauss: *D. A.* art. 357.

ist ferner P nicht $= 3$, so existirt unter den Zahlen a eine Zahl a' von der Beschaffenheit, dass $(a' - 1)$ relative Primzahl zu P ist, und da die Reste der Producte aa' mit den Zahlen a , und die Reste der Producte ba' mit den Zahlen b im Complex übereinstimmen, so ist

$$a' \sum a \equiv \sum a, \quad a' \sum b \equiv \sum b \pmod{P}$$

und folglich

$$\sum a \equiv 0, \quad \sum b \equiv 0 \pmod{P},$$

also

$$\theta^{\sum a} = 1, \quad \theta^{\sum b} = 1.$$

Mithin ergibt sich (da τ gerade, sobald $P \equiv 1 \pmod{4}$)

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= x^\tau A\left(\frac{1}{x}\right) \\ B(x) &= x^\tau B\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \right\}, \text{ wenn } P \equiv 1 \pmod{4}$$

und, mit Ausnahme von $P = 3$,

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= (-x)^\tau B\left(\frac{1}{x}\right) \\ B(x) &= (-x)^\tau A\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \right\}, \text{ wenn } P \equiv 3 \pmod{4}$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} Y(x) &= x^\tau Y\left(\frac{1}{x}\right) \\ Z(x) &= x^\tau Z\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \right\}, \text{ wenn } P \equiv 1 \pmod{4}$$

und, mit Ausnahme von $P = 3$,

$$\left. \begin{aligned} Y(x) &= (-x)^\tau Y\left(\frac{1}{x}\right) \\ -Z(x) &= (-x)^\tau Z\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \right\}, \text{ wenn } P \equiv 3 \pmod{4}$$

Diese Gleichungen enthalten Relationen zwischen je zwei gleich weit vom Anfang und Ende abstehenden Coefficienten der Functionen $Y(x)$ und $Z(x)$.

Die wirkliche Berechnung der Coefficienten der beiden Functionen

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_0 x^\tau + y_1 x^{\tau-1} + \dots + y_\tau \\ Z(x) &= z_0 x^\tau + z_1 x^{\tau-1} + \dots + z_\tau \end{aligned}$$

geschieht nun auf folgende Art. Zuerst bildet man die Potenzsummen

$$S_k = \sum \theta^{ak} + \sum \theta^{bk}$$

für $k = 1, 2, 3 \dots$ bis zu $\frac{1}{2}\tau$ oder $\frac{1}{2}(\tau - 1)$, je nachdem τ gerade oder ungerade ist; dies kann nach dem Obigen dadurch geschehen, dass man ebenso viele Coefficienten der ganzen Function

$$\frac{\prod (x^{\mu_1} - 1)}{\prod (x^{\mu_2} - 1)}$$

vom höchsten an gerechnet durch wirkliche Division bestimmt, und dann die Newton'schen Formeln anwendet; indessen hält es nicht schwer, durch Betrachtungen, welche ebenfalls auf der im §. 138 bewiesenen Haupteigenschaft der Zahlen μ_1 und μ_2 beruhen, folgende Regel abzuleiten: es sei Q der grösste gemeinschaftliche Divisor von k und $P = QR$, und r die Anzahl der in R aufgehenden Primzahlen, so ist*)

$$S_k = (-1)^r \varphi(Q).$$

Nachdem diese Werthe S_k gefunden sind, erhält man die Coefficienten der Functionen $Y(x)$ und $Z(x)$ durch die beiden aus den Newton'schen Formeln abgeleiteten Recursionsgleichungen

$$2ky_k = \left\{ \begin{array}{l} -[S_k y_0 + S_{k-1} y_1 + \dots + S_1 y_{k-1}] \\ + \left(\frac{-1}{P}\right) P \left[\left(\frac{k}{P}\right) z_0 + \left(\frac{k-1}{P}\right) z_1 + \dots + \left(\frac{1}{P}\right) z_{k-1} \right] \end{array} \right\}$$

$$2kz_k = \left\{ \begin{array}{l} + \left[\left(\frac{k}{P}\right) y_0 + \left(\frac{k-1}{P}\right) y_1 + \dots + \left(\frac{1}{P}\right) y_{k-1} \right] \\ - [S_k z_0 + S_{k-1} z_1 + \dots + S_1 z_{k-1}] \end{array} \right\}$$

wenn man noch berücksichtigt, dass

$$y_0 = 2, \quad z_0 = 0$$

ist.

*) Allgemeiner lautet diese Regel so: ist $m = m'P$ eine beliebige positive ganze Zahl, P das Product aus allen von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen, und S_k die Summe der k ten Potenzen aller primitiven Wurzeln der Gleichung $x^m = 1$, so ist $S_k = 0$, so oft k nicht durch m' theilbar ist; ist aber $k = m'K$, ferner Q der grösste gemeinschaftliche Divisor von K und $P = QR$, und r die Anzahl der in R aufgehenden Primzahlen, so ist

$$S_k = (-1)^r m' \varphi(Q).$$

Beispiel 1: $P = 3$; in diesem Falle müssen alle Coefficienten berechnet werden; da

$$S_1 = -1, \quad \left(\frac{1}{P}\right) = 1$$

ist, so erhält man

$$2y_1 = -S_1y_0 = 2, \quad 2z_1 = \left(\frac{1}{P}\right)y_0 = 2,$$

und folglich

$$Y(x) = 2x + 1, \quad Z(x) = 1.$$

Beispiel 2: $P = 5$; $\tau = 2$; da wieder

$$S_1 = -1, \quad \left(\frac{1}{P}\right) = 1$$

ist, so erhält man auch wieder

$$y_1 = 1, \quad z_1 =$$

und folglich

$$Y(x) = 2x^2 + x + 2, \quad Z(x) = x.$$

Beispiel 3: $P = 15 = 3 \cdot 5$; $\tau = 4$; hier ist

$$S_1 = S_2 = 1; \quad \left(\frac{1}{P}\right) = \left(\frac{2}{P}\right) = 1; \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = -1;$$

und folglich erhält man successive

$$y_1 = -1, \quad z_1 = 1$$

und

$$y_2 = -4, \quad z_2 = 0;$$

also ist

$$Y(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 2, \quad Z(x) = x^3 - x.$$
