Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0156
LOG Titel: §. 140. Berechnung der Coefficienten dieser Factoren
LOG Typ: chapter

Gleichungen (und ebenso ihr Product) wieder Wurzeln von primären Gleichungen sind; da nun θ die Wurzel einer primären Gleichung ist, so gilt dasselbe von jedem Coefficienten der Functionen $A(x)$ und $B(x)$ und folglich auch von

$$2y \quad \text{und} \quad 2z i^{1/4(P-1)^2} \sqrt{P},$$

und hieraus folgt sogleich, dass die rationalen Zahlen $2y$ und $2z$ *ganze* Zahlen sein müssen.

Fasst man dies zusammen, so ergiebt sich, dass man gleichzeitig

$$2A(x) = Y(x) - Z(x)\, i^{1/4(P-1)^2} \sqrt{P}$$
$$2B(x) = Y(x) + Z(x)\, i^{1/4(P-1)^2} \sqrt{P}$$

setzen kann, wo $Y(x)$ und $Z(x)$ ganze Functionen bedeuten, deren sämmtliche Coefficienten ganze rationale Zahlen sind*). Multiplicirt man die beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$Y(x)^2 - \left(\frac{-1}{P}\right) P\, Z(x)^2 = 4\, \frac{\Pi\,(x^{\mu_1} - 1)}{\Pi\,(x^{\mu_2} - 1)}.$$

§. 140.

Wir bemerken nun noch, dass man immer nur die Hälfte der Coefficienten von $Y(x)$ und $Z(x)$ zu berechnen braucht. Es ist nämlich

$$x^\tau A\left(\frac{1}{x}\right) = \Pi\,(1 - \theta^a x) = (-1)^\tau \theta^{\Sigma a}\, \Pi\,(x - \theta^{-a})$$
$$x^\tau B\left(\frac{1}{x}\right) = \Pi\,(1 - \theta^b x) = (-1)^\tau \theta^{\Sigma b}\, \Pi\,(x - \theta^{-b});$$

nun ist, je nachdem $P \equiv 1$, oder $P \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = +1, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = -1,$$

und folglich

$$\Pi\,(x - \theta^{-a}) = A(x), \quad \Pi\,(x - \theta^{-b}) = B(x)$$

oder

$$\Pi\,(x - \theta^{-a}) = B(x), \quad \Pi\,(x - \theta^{-b}) = A(x);$$

*) Vergl. *Gauss: D. A.* art. 357.

ist ferner P nicht $= 3$, so existirt unter den Zahlen a eine Zahl a' von der Beschaffenheit, dass $(a'-1)$ relative Primzahl zu P ist, und da die Reste der Producte $a a'$ mit den Zahlen a, und die Reste der Producte $b a'$ mit den Zahlen b im Complex übereinstimmen, so ist

$$a' \sum a \equiv \sum a, \quad a' \sum b \equiv \sum b \pmod{P}$$

und folglich

$$\sum a \equiv 0, \quad \sum b \equiv 0 \pmod{P},$$

also

$$\theta^{\Sigma a} = 1, \quad \theta^{\Sigma b} = 1.$$

Mithin ergiebt sich (da τ gerade, sobald $P \equiv 1 \pmod{4}$)

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= x^\tau A\left(\frac{1}{x}\right) \\ B(x) &= x^\tau B\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } P \equiv 1 \pmod{4}$$

und, mit Ausnahme von $P = 3$,

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= (-x)^\tau B\left(\frac{1}{x}\right) \\ B(x) &= (-x)^\tau A\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } P \equiv 3 \pmod{4}$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} Y(x) &= x^\tau Y\left(\frac{1}{x}\right) \\ Z(x) &= x^\tau Z\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } P \equiv 1 \pmod{4}$$

und, mit Ausnahme von $P = 3$,

$$\left.\begin{aligned} Y(x) &= (-x)^\tau Y\left(\frac{1}{x}\right) \\ -Z(x) &= (-x)^\tau Z\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } P \equiv 3 \pmod{4}$$

Diese Gleichungen enthalten Relationen zwischen je zwei gleich weit vom Anfang und Ende abstehenden Coefficienten der Functionen $Y(x)$ und $Z(x)$.

Die wirkliche Berechnung der Coefficienten der beiden Functionen

$$Y(x) = y_0 x^\tau + y_1 x^{\tau-1} + \cdots + y_\tau$$
$$Z(x) = z_0 x^\tau + z_1 x^{\tau-1} + \cdots + z_\tau$$

geschieht nun auf folgende Art. Zuerst bildet man die Potenzsummen

$$S_k = \Sigma\, \theta^{ak} + \Sigma\, \theta^{bk}$$

für $k = 1, 2, 3 \ldots$ bis zu $\frac{1}{2}\tau$ oder $\frac{1}{2}(\tau - 1)$, je nachdem τ gerade oder ungerade ist; dies kann nach dem Obigen dadurch geschehen, dass man ebenso viele Coefficienten der ganzen Function

$$\frac{\Pi\,(x^{\mu_1} - 1)}{\Pi\,(x^{\mu_2} - 1)}$$

vom höchsten an gerechnet durch wirkliche Division bestimmt, und dann die Newton'schen Formeln anwendet; indessen hält es nicht schwer, durch Betrachtungen, welche ebenfalls auf der im §. 138 bewiesenen Haupteigenschaft der Zahlen μ_1 und μ_2 beruhen, folgende Regel abzuleiten: es sei Q der grösste gemeinschaftliche Divisor von k und $P = QR$, und r die Anzahl der in R aufgehenden Primzahlen, so ist*)

$$S_k = (-1)^r\, \varphi\,(Q).$$

Nachdem diese Werthe S_k gefunden sind, erhält man die Coefficienten der Functionen $Y(x)$ und $Z(x)$ durch die beiden aus den Newton'schen Formeln abgeleiteten Recursionsgleichungen

$$2\,k\,y_k = \left\{ \begin{array}{c} -\left[S_k y_0 + S_{k-1}\, y_1 + \cdots + S_1\, y_{k-1}\right] \\ +\left(\dfrac{-1}{P}\right) P \left[\left(\dfrac{k}{P}\right) z_0 + \left(\dfrac{k-1}{P}\right) z_1 + \cdots + \left(\dfrac{1}{P}\right) z_{k-1}\right] \end{array} \right\}$$

$$2\,k\,z_k = \left\{ \begin{array}{c} +\left[\left(\dfrac{k}{P}\right) y_0 + \left(\dfrac{k-1}{P}\right) y_1 + \cdots + \left(\dfrac{1}{P}\right) y_{k-1}\right] \\ -\left[S_k z_0 + S_{k-1}\, z_1 + \cdots + S_1\, z_{k-1}\right] \end{array} \right\}$$

wenn man noch berücksichtigt, dass

$$y_0 = 2, \quad z_0 = 0$$

ist.

---

*) Allgemeiner lautet diese Regel so: ist $m = m'P$ eine beliebige positive ganze Zahl, P das Product aus allen von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen, und S_k die Summe der $k$ten Potenzen aller primitiven Wurzeln der Gleichung $x^m = 1$, so ist $S_k = 0$, so oft k nicht durch m' theilbar ist; ist aber $k = m'K$, ferner Q der grösste gemeinschaftliche Divisor von K und $P = QR$, und r die Anzahl der in R aufgehenden Primzahlen, so ist

$$S_k = (-1)^r\, m'\, \varphi\,(Q).$$

Beispiel 1: $P = 3$; in diesem Falle müssen alle Coefficienten berechnet werden; da

$$S_1 = -1, \quad \left(\frac{1}{P}\right) = 1$$

ist, so erhält man

$$2y_1 = - S_1 y_0 = 2, \quad 2z_1 = \left(\frac{1}{P}\right) y_0 = 2,$$

und folglich

$$Y(x) = 2x + 1, \quad Z(x) = 1.$$

Beispiel 2: $P = 5$; $\tau = 2$; da wieder

$$S_1 = -1, \quad \left(\frac{1}{P}\right) = 1$$

ist, so erhält man auch wieder

$$y_1 = 1, \quad z_1 =$$

und folglich

$$Y(x) = 2x^2 + x + 2, \quad Z(x) = x.$$

Beispiel 3: $P = 15 = 3.5$; $\tau = 4$; hier ist

$$S_1 = S_2 = 1; \quad \left(\frac{1}{P}\right) = \left(\frac{2}{P}\right) = 1; \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = -1;$$

und folglich erhält man successive

$$y_1 = -1, \quad z_1 = 1$$

und

$$y_2 = -4, \quad z_2 = 0;$$

also ist

$$Y(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 2, \quad Z(x) = x^3 - x.$$