

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0159

LOG Titel: S. 142. Beweis des Satzes, dass der Gleichung immer durch ganze Zahlen t, u Genüge geschehen kann, deren letztere u von Null verschieden ist . . .

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

$$\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \frac{2}{m} \dots \frac{m-1}{m}, \frac{m}{m}$$

begrenzt werden, so muss, da die Anzahl $m + 1$ der Zahlenpaare x, y grösser ist als die Anzahl m dieser Intervalle, wenigstens eines dieser Intervalle mehr als einen, also mindestens zwei von den Werthen $x - y\sqrt{D}$ enthalten, die zwei *verschiedenen* Werthen von y entsprechen. Wir bezeichnen diese beiden Werthe mit $x' - y'\sqrt{D}$ und $x'' - y''\sqrt{D}$; dann ist, abgesehen vom Vorzeichen, ihr Unterschied

$$(x' - x'') - (y' - y'')\sqrt{D} = x - y\sqrt{D} < \frac{1}{m},$$

und da y', y'' ungleich, nicht negativ und $\leq m$ sind, so ist (abgesehen vom Vorzeichen) auch $y = y' - y'' \leq m$ und von Null verschieden; mithin wird $x - y\sqrt{D}$ auch $< y^{-1}$ und von Null verschieden, weil \sqrt{D} irrational ist. Hieraus folgt aber, wie oben, dass

$$x^2 - Dy^2 < 1 + 2\sqrt{D}$$

und von Null verschieden wird.

Dass nun aber auch unendlich viele solche Zahlenpaare x, y existiren, ergibt sich leicht; sind nämlich schon beliebig viele solche Zahlenpaare x, y gefunden, so kann man immer die ganze Zahl m so gross nehmen, dass m^{-1} kleiner wird als der kleinste der bisher gefundenen Werthe $x - y\sqrt{D}$; für diese Zahl m erhält man aber auf die angegebene Weise wieder ein Zahlenpaar x, y von der Beschaffenheit, dass $x - y\sqrt{D} < m^{-1}$ und folglich auch kleiner als alle früher gefundenen Werthe $x - y\sqrt{D}$ wird, woraus folgt, dass dieses Zahlenpaar x, y von den frühern verschieden ist; mithin ist die Anzahl dieser Zahlenpaare unbegrenzt.

§. 142.

Mit Hülfe dieses Resultates, dass immer unendlich viele Paare von ganzen Zahlen x, y existiren, für welche der absolute Werth von $x^2 - Dy^2 < 1 + 2\sqrt{D}$ und von Null verschieden wird, lässt sich nun leicht beweisen, dass die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ immer in ganzen Zahlen t, u lösbar ist, und zwar so, dass u von Null verschieden ausfällt.

Da die Anzahl der ganzen Zahlen, welche abgesehen vom Vorzeichen $< 1 + 2\sqrt{D}$ sind, endlich ist, so muss der Ausdruck $x^2 - Dy^2$ für unendlich viele Zahlenpaare x, y einer und derselben (von Null verschiedenen) Zahl k gleich werden; da ferner die Anzahl der verschiedenen Paare von Resten α, β , welche zwei Zahlen $x, y \pmod{k}$ lassen können, endlich, nämlich $= k^2$ ist, so leuchtet ebenso ein, dass mindestens ein solches Restsystem α, β unendlich oft auftreten muss, dass also unter den unendlich vielen Zahlenpaaren x, y , für welche $x^2 - Dy^2 = k$ wird, auch wieder unendlich viele Paare x, y sich finden müssen, in welchen $x \equiv \alpha, y \equiv \beta \pmod{k}$ ist, wo α, β zwei bestimmte Reste bedeuten. Sind nun x', y' und x'', y'' irgend zwei solche Zahlenpaare, d. h. ist gleichzeitig

$$x'^2 - Dy'^2 = x''^2 - Dy''^2 = k$$

und

$$x' \equiv x'', y' \equiv y'' \pmod{k},$$

so kann man

$$(x' - y'\sqrt{D})(x'' + y''\sqrt{D}) = k(t + u\sqrt{D})$$

setzen, wo t, u ganze Zahlen bedeuten, die offenbar der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

genügen; und zwar dürfen wir annehmen, dass u von Null verschieden ist; denn aus $u = 0, t = \pm 1$ ergibt sich vermöge der obigen Gleichung $x' - y'\sqrt{D} = \pm (x'' - y''\sqrt{D})$; da aber unendlich viele solche Zahlenpaare x', y' und x'', y'' existiren, so können wir auch immer zwei solche auswählen, dass x'', y'' verschieden von $\pm x', \pm y'$, und folglich u von Null verschieden ausfällt.

Hiermit ist also in der That bewiesen, dass immer eine Lösung t, u der vorstehenden Pell'schen Gleichung existirt, in welcher u von Null verschieden ist.

Hieraus lässt sich dann (wie in §. 85), ebenfalls ohne Hülfe der Theorie der reducirten Formen, zeigen, dass alle Auflösungen t, u sich aus der Gleichung

$$t + u\sqrt{D} = \pm (T + U\sqrt{D})^n$$

ergeben, wo T, U die kleinsten positiven ganzen Zahlen bedeuten, die der Gleichung genügen, und der Exponent n alle positiven und

negativen ganzen Zahlen durchläuft. Nur in der einen Beziehung bleibt diese Theorie der Pell'schen Gleichung unvollständig, dass aus ihr keine directe Methode fließt, diese kleinste positive Auflösung T, U unmittelbar zu finden. Hierzu und ebenso zur Beurtheilung der Aequivalenz zweier Formen und also auch der Darstellbarkeit einer Zahl durch eine Form bleibt die Theorie der reducirten Formen unentbehrlich.
