Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0160
LOG Titel: IX. Ueber die Convergenz und Stetigkeit einiger unendlichen Reihen.
LOG Typ: chapter

IX. Ueber die Convergenz und Stetigkeit einiger unendlichen Reihen.

§. 143.

Die von *Abel**) herrührende Methode der theilweisen Summation, welche in §. 101 bei der Untersuchung der Convergenz und Stetigkeit einer unendlichen Reihe angewendet ist, findet gewissermassen ihre Erschöpfung bei dem Beweise des folgenden allgemeinen Satzes, in welchem aus gewissen, von einander unabhängigen Voraussetzungen über zwei Grössenreihen

$$a_1, a_2, a_3 \ldots \tag{a}$$

$$b_1, b_2, b_3 \ldots \tag{b}$$

Schlüsse auf die aus ihnen zusammengesetzte Grössenreihe

$$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \ldots$$

gezogen werden.

Wenn bei unbegrenzt wachsendem n der Modulus der Summe

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

endlich bleibt, wenn ferner die aus den Moduln der Differenzen $b_1 - b_2, b_2 - b_3 \ldots$ gebildete Reihe $\mathfrak{B}$ convergirt, und ausserdem b_n mit wachsendem n unendlich klein wird; so convergirt die Reihe

$$\mathfrak{P} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots,$$

und ihr Werth ändert sich stetig mit den Grössen (b), *vorausgesetzt, dass auch $\mathfrak{B}$ sich stetig ändert.*

---

*) *Recherches sur la série etc.*, Œuvres complètes. 1839. T. I. p. 66; Crelle's Journal I. p. 311.

Aus der Annahme, dass der Modulus von A_n stets kleiner als eine angebbare Constante H bleibt, und dass die Reihe $\mathfrak{B}$ einen endlichen Werth besitzt, folgt zunächst die unbedingte Convergenz der Reihe

$$\mathfrak{Q} = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots,$$

weil selbst die Moduln ihrer Glieder eine convergente Reihe bilden, deren Summe $< H\mathfrak{B}$ ist. Bezeichnet man nun die Summen der ersten n Glieder der Reihen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ resp. mit P_n, Q_n, so ist $P_n = Q_{n-1} + A_n b_n$, und da b_n mit wachsendem n unendlich klein wird, so convergirt auch die Reihe $\mathfrak{P}$, und ihr Werth ist gleich dem der Reihe $\mathfrak{Q}$.

Es genügt daher, den letzten Theil des Satzes für die Reihe $\mathfrak{Q}$ nachzuweisen. Setzt man nun $\mathfrak{Q} = Q_n + \mathfrak{Q}_n$ und $\mathfrak{B} = B_n + \mathfrak{B}_n$, wo B_n die Summe der ersten n Glieder der Reihe $\mathfrak{B}$ bedeutet, so ist der Modul von $\mathfrak{Q}_n < H\mathfrak{B}_n$; bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{Q}'$, Q'_n, $\mathfrak{B}'$ ... diejenigen Werthe von $\mathfrak{Q}$, Q_n, $\mathfrak{B}$ ..., welche einem bestimmten System (b′) entsprechen, so wird, wenn die veränderlichen Grössen b_n sich den Grössen b'_n unbegrenzt und zwar der Art annähern, dass $\mathfrak{B}$ sich dem Werthe $\mathfrak{B}'$ nähert, auch $\mathfrak{B}_n$ sich dem Grenzwerthe $\mathfrak{B}'_n$ nähern. Nun kann man, wie klein auch eine gegebene positive Grösse δ sein mag, immer n so gross wählen, dass $H\mathfrak{B}'_n < \delta$ ist; mithin wird im Verlaufe der Annäherung auch $H\mathfrak{B}_n$, und folglich auch der Modul des Restes $\mathfrak{Q}_n$ definitiv $< \delta$ werden, während der erste Bestandtheil Q_n sich seinem Grenzwerthe Q'_n nähert; hieraus folgt, dass der Modul von $\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}'$ schliesslich unter 2δ herabsinkt, dass also $\mathfrak{Q}$ sich dem Grenzwerthe $\mathfrak{Q}'$ nähert, was zu beweisen war*).

Dem vorstehenden Beweise des obigen Satzes fügen wir noch folgende Bemerkungen hinzu. Die Convergenz der Reihe $\mathfrak{Q}$ folgt schon aus den beiden Annahmen, dass A_n endlich bleibt, und dass die Reihe $\mathfrak{B}$ convergirt; zufolge der letzteren muss b_n mit wachsendem n sich einem bestimmten Grenzwerthe $\mathfrak{b}$ nähern, weil ja die aus den Differenzen $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3$ ... gebildete Reihe

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots = b_1 - \mathfrak{b}$$

---

*) Offenbar bleibt $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ auch dann noch stetig, wenn die oben als constant vorausgesetzten Grössen (a) sich zugleich der Art stetig ändern, dass das Maximum H der Moduln von A_n auch während der Aenderung endlich bleibt.

ebenfalls convergiren muss; aber dieser Grenzwerth $\mathfrak{b}$ kann sehr wohl von Null verschieden sein, und es leuchtet ein, dass in diesem Fall die Reihe $\mathfrak{P}$ stets und nur dann convergirt, wenn A_n mit wachsendem n sich ebenfalls einem bestimmten Grenzwerthe $\mathfrak{A}$ nähert, d. h. wenn die Reihe

$$\mathfrak{A} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

convergirt; und zwar ist dann $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{A}\mathfrak{b}$. Durch diese Verschärfung der Annahme über die Constanten (a) wird es also gestattet, die Annahme $\mathfrak{b} = 0$ aufzugeben, während die Annahme, dass $\mathfrak{B}$ einen endlichen Werth besitzt, bestehen bleibt*). Von besonderer Wichtigkeit ist aber die Bemerkung, dass jetzt die Reihe $\mathfrak{P}$ sich schon dann mit den Grössen (b) *stetig* ändert, wenn $\mathfrak{B}$ im Verlaufe der Aenderung *endlich* bleibt, während $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{b}$ auch *unstetig* werden kann. Setzt man nämlich $\mathfrak{A} = A_n + \mathfrak{A}_n$, so wird $a_n = \mathfrak{A}_{n-1} - \mathfrak{A}_n$, und

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} b_1 - \mathfrak{A}_1 (b_1 - b_2) - \mathfrak{A}_2 (b_2 - b_3) - \cdots;$$

ist nun δ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse, so kann man ν so gross wählen, dass für *alle***) Werthe $n \geqq \nu$ der Modul von $\mathfrak{A}_n < \delta$ wird; während daher die Summe der ersten ν Glieder rechter Hand sich stetig mit den Grössen (b) ändert, bleibt der Modul des Restes $< \delta \mathfrak{B}$ und kann folglich, da $\mathfrak{B}$ endlich bleibt, durch δ so klein gemacht werden, wie man will; mithin ändert sich $\mathfrak{P}$ stetig, was zu beweisen war.

---

*) Die Grössenreihen (b), denen endliche Werthe $\mathfrak{B}$ entsprechen, besitzen unter andern merkwürdigen Eigenschaften die, dass aus je zwei solchen Systemen (b'), (b'') unendlich viele andere abgeleitet werden können, deren allgemeines Glied $c + c' b'_n + c'' b''_n$ ist, wo c, c', c'' beliebige, von n unabhängige Grössen bedeuten.

**) Ist das System (a) ebenfalls veränderlich, so ist die Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}$ sich stetig mit den Grössen (a) ändert, noch nicht hinreichend für die Stetigkeit von $\mathfrak{P}$, wovon man sich durch die genaue Prüfung des folgenden Beispiels überzeugen wird. Es sei $\psi(x)$ eine stetige Function, welche sowohl für unendlich kleine als auch für unendlich grosse Werthe x unendlich klein wird, wie z. B. $x:(1+x^2)$; ist nun $h \geqq 0$ eine veränderliche Grösse, und $a_n = \psi(nh) - \psi((n-1)h)$, ferner $b_n = 1 - nh$ oder $= 0$, je nachdem $nh < 1$ oder > 1 ist, so nähert sich $\mathfrak{P}$, wenn h unendlich klein wird, nicht dem Werthe Null, welcher $h = 0$ entspricht, sondern dem Werthe

$$\int_0^1 \psi(x)\, dx,$$

obgleich $\mathfrak{A}$ stetig $= 0$, und $\mathfrak{B}$ zwar nicht stetig, aber doch endlich bleibt.

Wir wollen die vorstehenden Principien auf die *Dirichlet'schen Reihen* anwenden; unter dieser Benennung verstehen wir Reihen von folgender Form*)

$$f(s) = \frac{a_1}{k_1^s} + \frac{a_2}{k_2^s} + \frac{a_3}{k_3^s} + \cdots,$$

wo k_1, k_2 k_3 ... positive Constanten von der Art bedeuten, dass $k_n \leqq k_{n+1}$ ist, und dass k_n mit n über alle Grenzen wächst; die Constanten a_1, a_2, a_3 ... sind beliebige reelle oder complexe Grössen; ebenso kann die Veränderliche s beliebige reelle oder complexe Werthe annehmen, doch wollen wir uns hier der Einfachheit halber auf *reelle* Werthe s beschränken. Behält A_n die frühere Bedeutung, so ergiebt sich folgender Satz:

Bleibt A_n endlich bei wachsendem n, so convergirt die Reihe $f(s)$ für alle positiven Werthe s und ist nebst ihren sämmtlichen Derivirten stetig; convergirt die Reihe noch für $s = 0$, so ist sie auch an dieser Stelle stetig.

Die Behauptungen über $f(s)$ folgen unmittelbar aus der allgemeinen Untersuchung, wenn man $b_n = k_n^{-s}$ setzt, wodurch $\mathfrak{P}$ in die obige Reihe übergeht; denn $\mathfrak{B}$ ist $= k_1^{-s}$ oder $= 0$, je nachdem $s > 0$ oder $= 0$ ist. Um auch die Endlichkeit und Stetigkeit ihrer Derivirten $f'(s)$ darzuthun, setzen wir, wenn s einen festen positiven Werth, und ε eine sehr kleine positive oder negative Grösse bedeutet,

$$b_n = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{k_n^s} - \frac{1}{k_n^{s+\varepsilon}}\right),$$

so wird

$$\mathfrak{P} = \frac{f(s) - f(s+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Wählt man nun ν so gross, dass $s \log k_\nu > 1$, und ε so klein, dass

$$\frac{s}{\varepsilon}\log\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right) < s \log k_\nu$$

ist, so ist $b_\nu \geqq b_{\nu+1} \geqq b_{\nu+2}$ ..., weil die Derivirte der Function

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x^s} - \frac{1}{x^{s+\varepsilon}}\right)$$

*) Sie nehmen die Gestalt von Potenzenreihen an, wenn man $s = -\log x$ setzt.

für alle Werthe $x \geqq k_\nu$ negativ ist; ausserdem ist $\mathfrak{b} = 0$, also $\mathfrak{B}_{\nu-1} = b_\nu$. Wird nun ε unendlich klein, so nähert sich b_n dem Grenzwerthe

$$b'_n = \frac{\log k_n}{k_n^s},$$

und da $b'_\nu \geqq b'_{\nu+1} \geqq b'_{\nu+2} \ldots$, ferner $\mathfrak{b}' = 0$, also $\mathfrak{B}'_{\nu-1} = b'_\nu$ ist, so geht $\mathfrak{B}_{\nu-1}$ stetig in den Grenzwerth $\mathfrak{B}'_{\nu-1}$, und folglich auch $\mathfrak{B}$ stetig in den Werth $\mathfrak{B}'$ über. Mithin nähert sich auch $\mathfrak{P}$ dem Grenzwerthe $\mathfrak{P}'$, d. h. es ist

$$-f'(s) = \frac{a_1 \log k_1}{k_1^s} + \frac{a_2 \log k_2}{k_2^s} + \cdots,$$

und da diese Reihe wieder von derselben Beschaffenheit ist, so wird $f'(s)$ auch eine *stetige* Function von s. Ganz ähnlich lässt sich der Beweis für die Derivirten höherer Ordnung führen.

§. 144.

Der wahre Charakter des zuletzt bewiesenen Satzes besteht darin, dass aus dem Verhalten einer Dirichlet'schen Reihe $f(s)$ für $s = 0$ ein Schluss auf ihr Verhalten für alle positiven Werthe s gezogen wird (man kann ihn leicht so umformen, dass von dem beliebigen Werthe $s = \sigma$ auf alle Werthe $s > \sigma$ geschlossen wird). Unter diesem Gesichtspuncte erscheint von besonderm Interesse eine Vergleichung dieses Satzes mit dem allgemeinen Princip des §. 118; beachtet man nämlich, dass, wenn die dort mit t bezeichnete Grösse zwischen k_n und $k_{n+1} > k_n$ liegt, die entsprechende Grösse $T = n$ nichts Anderes ist, als die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$\frac{1}{k_1^{1+s}} + \frac{1}{k_2^{1+s}} + \frac{1}{k_3^{1+s}} + \cdots$$

für $s = -1$, so erkennt man, dass dort aus dem Verhalten der Reihe für $s = -1$ ein Schluss auf ihr Verhalten für alle positiven Werthe s, und namentlich auf ihr Verhalten an der Stelle $s = 0$ gezogen wird. Eine genauere, auf die Vereinigung und Verallgemeinerung beider Sätze hinzielende Untersuchung führt zu den nachstehenden Resultaten, in welchen zur Abkürzung

$$S_n = \frac{a_1}{k_1^s} + \frac{a_2}{k_2^s} + \cdots + \frac{a_n}{k_n^s}$$

gesetzt ist, während A_n seine frühere Bedeutung behält.

1. *Bleibt* $S_n k_n^s$ *für einen bestimmten negativen Werth* s *endlich bei wachsendem* n, *so gilt Dasselbe für jeden negativen Werth* s, *und ebenso bleibt* $A_n : \log k_n$ *endlich.*

2. *Bleibt* $A_n : \log k_n$ *endlich bei wachsendem* n, *so convergirt die Reihe* $f(s)$ *für jeden positiven Werth* s.

3. *Nähern sich* $s\,S_n k_n^s$ *und* $s\,S_n k_{n+1}^s$ *für einen bestimmten negativen Werth* s *bei wachsendem* n *einem gemeinschaftlichen Grenzwerthe* $-\omega$, *so gilt Dasselbe für jeden negativen Werth* s, *und ebenso nähern sich* $A_n : \log k_n$ *und* $A_n : \log k_{n+1}$ *dem gemeinschaftlichen Grenzwerthe* $+\omega$.

4. *Nähern sich* $A_n : \log k_n$ *und* $A_n : \log k_{n+1}$ *bei wachsendem* n *einem gemeinschaftlichen Grenzwerthe* ω, *so nähert sich* $s f(s)$, *wenn* s *positiv unendlich klein wird, demselben Grenzwerthe* ω.

Offenbar entspringt der Satz des vorigen Paragraphen aus 2., und der Satz des §. 118 aus 3. und 4.; um die Beweise kurz zu führen, bemerken wir, dass, wenn

$$R_n = \frac{a_1}{k_1^r} + \frac{a_2}{k_2^r} + \cdots + \frac{a_n}{k_n^r}$$

gesetzt wird,

$$S_n - R_n k_n^{r-s} = R_1 (k_1^{r-s} - k_2^{r-s}) + \cdots + R_{n-1} (k_{n-1}^{r-s} - k_n^{r-s})$$

ist; zerlegt man die Summe rechter Hand in zwei Bestandtheile, von denen der eine die ersten $(m-1)$ Glieder, der andere die übrigen $(n-m)$ Glieder enthält, und berücksichtigt, dass man allgemein

$$\frac{k_\nu^{r-s} - k_{\nu+1}^{r-s}}{r-s} = \int_{k_{\nu+1}}^{k_\nu} x^{r-s-1}\,dx = h_\nu^r \int_{k_{\nu+1}}^{k_\nu} x^{-s-1}\,dx = h_\nu^r\,\frac{k_{\nu+1}^{-s} - k_\nu^{-s}}{s}$$

setzen kann, wo $k_\nu \leqq h_\nu \leqq k_{\nu+1}$ ist, so erhält man

$$S_n - R_n k_n^{r-s} = \frac{r-s}{s} \left\{ M(k_m^{-s} - k_1^{-s}) + N(k_n^{-s} - k_m^{-s}) \right\},$$

wo M und N Mittelwerthe*) aus den Grössen $R_\nu h_\nu^r$ resp. von

*) Unter einem Mittelwerthe aus complexen Grössen z ist jeder complexe Werth ζ von der Beschaffenheit zu verstehen, dass die reellen Bestandtheile von ζ und ζi resp. Mittelwerthe aus den reellen Bestandtheilen der Grössen z und der Grössen zi sind.

$\nu = 1$ bis $\nu = m - 1$, und von $\nu = m$ bis $\nu = n - 1$ bedeuten. Nimmt man nun, wie im *dritten* Satze an, dass die Grössen $r R_\nu k_\nu^r$, $r R_\nu k_{\nu+1}^r$, also auch die Grössen $r R_\nu h_\nu^r$ mit wachsendem ν sich einem Grenzwerthe $-\omega$ nähern, und lässt man m mit n, doch so langsam über alle Grenzen wachsen, dass $k_m : k_n$ unendlich klein wird, so nähert sich rN dem Grenzwerthe $-\omega$, während M endlich bleibt, und folglich wird, wenn s negativ ist, $s S_n k_n^s$ sich ebenfalls dem Grenzwerthe $-\omega$ nähern. Ist aber $s = 0$, so folgt

$$A_n - R_n k_n^r = r\left\{M \log\left(\frac{k_1}{k_m}\right) + N \log\left(\frac{k_m}{k_n}\right)\right\},$$

und wenn man m der Art mit n über alle Grenzen wachsen lässt, dass $\log k_m : \log k_n$ unendlich klein wird, so ergiebt sich, dass $A_n : \log k_n$ sich dem Werthe $+\omega$ nähert. Die Behauptungen über $s S_n k_{n+1}^s$ und $A_n : \log k_{n+1}$ ergeben sich von selbst, weil aus der Annahme hervorgeht, dass, wenn ω von Null verschieden ist, nothwendig $k_n : k_{n+1}$ sich dem Werthe 1 nähert. Zugleich leuchtet ein, dass der Beweis des *ersten* Satzes auf dieselbe Weise geführt werden kann, und zwar viel einfacher, weil es gar keiner Zerlegung der obigen Summe in zwei Bestandtheile bedarf*).

Der Beweis des *zweiten* und *vierten* Satzes lässt sich in ähnlicher Weise führen; setzt man nämlich, wenn s einen *positiven* Werth hat,

$$K_n = \int_{k_n}^{\infty} \frac{s \log x \, dx}{x^{s+1}} = \frac{1 + s \log k_n}{s k_n^s},$$

so ist

$$K_n - K_{n+1} = \int_{k_n}^{k_{n+1}} \frac{s \log x \, dx}{x^{s+1}} = \log h_n (k_n^{-s} - k_{n+1}^{-s});$$

nimmt man daher an, dass $A_n : \log k_n$ endlich bleibt, so folgt hieraus leicht**), dass die unendliche Reihe

---

*) Die auf den ersten Blick auffallende Erscheinung, dass der obige Beweis auch für positive Werthe r gilt, hängt mit ähnlichen Sätzen über das Verschwinden von $f(s) - S_n$ für positive Werthe s bei wachsendem n zusammen.

**) Offenbar darf man, ohne die Allgemeinheit der Sätze zu beeinträchtigen, bei ihrem Beweise annehmen, dass schon $k_1 > 1$ ist.

$$A_1(k_1^{-s} - k_2^{-s}) + A_2(k_2^{-s} - k_3^{-s}) + \cdots$$
$$= \frac{A_1}{\log h_1}(K_1 - K_2) + \frac{A_2}{\log h_2}(K_2 - K_3) + \cdots$$

convergirt, und dass ihre Summe mit $f(s)$ übereinstimmt, womit der zweite Satz bewiesen ist. Bezeichnet man ferner mit M und M' Mittelwerthe aus den Grössen $A_n : \log h_n$ resp. von $n = 1$ bis $n = m - 1$, und von $n = m$ bis $n = \infty$, so kann man

$$f(s) = M(K_1 - K_m) + M' K_m$$

setzen; nimmt man nun (wie im vierten Satze) an, dass die Grössen $A_n : \log k_n$ und $A_n : \log k_{n+1}$ sich einem gemeinschaftlichen Grenzwerthe ω nähern, so gilt Dasselbe von $A_n : \log h_n$; lässt man daher, während s positiv unendlich klein wird, gleichzeitig m über alle Grenzen, doch so langsam wachsen, dass $s \log k_m$ unendlich klein wird, so nähert sich M' dem Grenzwerthe ω, während M endlich bleibt, und da sK_1 und sK_m sich dem gemeinschaftlichen Grenzwerthe 1 nähern, so nähert sich $sf(s)$ dem Grenzwerthe ω, was zu beweisen war.

Nachdem die obigen Sätze bewiesen sind, führen wir einige Beispiele an, hauptsächlich um zu zeigen, dass sie nicht ohne Weiteres umgekehrt werden dürfen.

Beispiel 1. Ist $c > 1$, und $s > 0$, so ist

$$f(s) = \frac{a}{c^s} + \frac{b}{c^{2s}} + \frac{a}{c^{3s}} + \frac{b}{c^{4s}} + \cdots = \frac{ac^s + b}{c^{2s} - 1};$$

für jeden negativen Werth s ist bei wachsendem n

$$\lim S_{2n} c^{2ns} = \frac{ac^s + b}{1 - c^{2s}}, \quad \lim S_{2n+1} c^{(2n+1)s} = \frac{a + bc^s}{1 - c^{2s}},$$

also schwankt $S_n k_n^s$, und nur, wenn $b = a$ ist, wird

$$\lim S_n k_n^s = \frac{a}{1 - c^s};$$

trotzdem ist, auch wenn a und b ungleich sind,

$$\lim \frac{A_n}{\log k_n} = \lim \frac{A_n}{\log k_{n+1}} = \frac{a + b}{2 \log c},$$

und wirklich nähert sich $sf(s)$ für unendlich kleine positive Werthe von s demselben Grenzwerth.

Beispiel 2. Ist wieder $c > 1$, und $s > 0$, so ist

$$f(s) = \frac{1}{c^s} - \frac{2}{c^{2s}} + \frac{3}{c^{3s}} - \frac{4}{c^{4s}} + \cdots = \frac{c^s}{(c^s+1)^2};$$

da $A_{2n} = -n$, $A_{2n-1} = +n$ ist, so schwankt $A_n : \log k_n$; dennoch nähert sich $sf(s)$ dem bestimmten Grenzwerth Null, wenn s positiv unendlich klein wird.

Beispiel 3. Von grösserem Interesse ist die folgende Reihe

$$f(s) = e^{-s} + ce^{-sc} + c^2 e^{-sc^2} + c^3 e^{-sc^3} + \cdots,$$

wo c wieder > 1 ist; da $\log k_n = c^{n-1}$, und

$$A_n = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = \frac{c^n - 1}{c - 1},$$

so ergiebt sich bei wachsendem n

$$\lim \frac{A_n}{\log k_n} = \frac{c}{c-1}, \quad \lim \frac{A_n}{\log k_{n+1}} = \frac{1}{c-1},$$

und es zeigt sich, dass $sf(s)$ für unendlich kleine positive Werthe von s sich keinem Grenzwerthe nähert, sondern hin- und herschwankt. Ist nämlich r ein bestimmter positiver Werth, und lässt man $s = rc^{-\varrho}$ dadurch unendlich klein werden, dass ϱ wachsend alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, so nähert sich $sf(s)$ dem bestimmten, aber von r abhängigen Grenzwerth

$$\psi(r) = \Sigma\, r c^n e^{-rc^n},$$

wo n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen muss. Offenbar ist $\psi(r)$ eine periodische Function von $\log r$, welche sich in die Fourier'sche Reihe

$$\frac{1}{\log c} \Sigma\, z^n \Pi\left(\frac{2n\pi i}{\log c}\right)$$

verwandeln lässt, wo $\log z \log c = -2\pi i \log r$ ist, Π das Euler'sche Integral zweiter Art bedeutet, und n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; sie convergirt für jeden complexen Werth r, dessen reeller Bestandtheil positiv ist; sie ist zugleich der Grenzwerth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r c^x e^{-rc^x} dx . \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}$$

für unendlich grosse Werthe der positiven ganzen Zahl n. Wird s stetig positiv unendlich klein, so schwankt $sf(s)$ um den mittlern Werth $1 : \log c$, welcher auch zwischen den Grenzwerthen von $A_n : \log k_n$ und $A_n : \log k_{n+1}$ liegt.