

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0161

LOG Titel: S. 143. Methode der theilweisen Summation

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

IX. Ueber die Convergenz und Stetigkeit einiger unendlichen Reihen.

§. 143.

Die von *Abel**) herrührende Methode der theilweisen Summation, welche in §. 101 bei der Untersuchung der Convergenz und Stetigkeit einer unendlichen Reihe angewendet ist, findet gewissermassen ihre Erschöpfung bei dem Beweise des folgenden allgemeinen Satzes, in welchem aus gewissen, von einander unabhängigen Voraussetzungen über zwei Grössenreihen

$$a_1, a_2, a_3 \dots \quad (a)$$

$$b_1, b_2, b_3 \dots \quad (b)$$

Schlüsse auf die aus ihnen zusammengesetzte Grössenreihe

$$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \dots$$

gezogen werden.

Wenn bei unbegrenzt wachsendem n der Modulus der Summe

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

endlich bleibt, wenn ferner die aus den Moduln der Differenzen $b_1 - b_2, b_2 - b_3 \dots$ gebildete Reihe \mathfrak{B} convergirt, und ausserdem b_n mit wachsendem n unendlich klein wird; so convergirt die Reihe

$$\mathfrak{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots,$$

und ihr Werth ändert sich stetig mit den Grössen (b), vorausgesetzt, dass auch \mathfrak{B} sich stetig ändert.

*) *Recherches sur la série etc.*, Œuvres complètes. 1839. T. I. p. 66; Crelle's Journal I. p. 311.

Aus der Annahme, dass der Modulus von A_n stets kleiner als eine angebbare Constante H bleibt, und dass die Reihe \mathfrak{B} einen endlichen Werth besitzt, folgt zunächst die unbedingte Convergenz der Reihe

$$\Omega = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \dots,$$

weil selbst die Moduln ihrer Glieder eine convergente Reihe bilden, deren Summe $< H\mathfrak{B}$ ist. Bezeichnet man nun die Summen der ersten n Glieder der Reihen \mathfrak{B} , Ω resp. mit P_n , Q_n , so ist $P_n = Q_{n-1} + A_n b_n$, und da b_n mit wachsendem n unendlich klein wird, so convergirt auch die Reihe \mathfrak{B} , und ihr Werth ist gleich dem der Reihe Ω :

Es genügt daher, den letzten Theil des Satzes für die Reihe Ω nachzuweisen. Setzt man nun $\Omega = Q_n + \Omega_n$ und $\mathfrak{B} = B_n + \mathfrak{B}_n$, wo B_n die Summe der ersten n Glieder der Reihe \mathfrak{B} bedeutet, so ist der Modul von $\Omega_n < H\mathfrak{B}_n$; bezeichnet man ferner mit Ω' , Q'_n , $\mathfrak{B}' \dots$ diejenigen Werthe von Ω , Q_n , $\mathfrak{B} \dots$, welche einem bestimmten System (b') entsprechen, so wird, wenn die veränderlichen Grössen b_n sich den Grössen b'_n unbegrenzt und zwar der Art nähern, dass \mathfrak{B} sich dem Werthe \mathfrak{B}' nähert, auch \mathfrak{B}_n sich dem Grenzwerte \mathfrak{B}'_n nähern. Nun kann man, wie klein auch eine gegebene positive Grösse δ sein mag, immer n so gross wählen, dass $H\mathfrak{B}'_n < \delta$ ist; mithin wird im Verlaufe der Annäherung auch $H\mathfrak{B}_n$, und folglich auch der Modul des Restes Ω_n definitiv $< \delta$ werden, während der erste Bestandtheil Q_n sich seinem Grenzwerte Q'_n nähert; hieraus folgt, dass der Modul von $\Omega - \Omega'$ schliesslich unter 2δ herabsinkt, dass also Ω sich dem Grenzwerte Ω' nähert, was zu beweisen war*).

Dem vorstehenden Beweise des obigen Satzes fügen wir noch folgende Bemerkungen hinzu. Die Convergenz der Reihe Ω folgt schon aus den beiden Annahmen, dass A_n endlich bleibt, und dass die Reihe \mathfrak{B} convergirt; zufolge der letzteren muss b_n mit wachsendem n sich einem bestimmten Grenzwerte b nähern, weil ja die aus den Differenzen $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3 \dots$ gebildete Reihe

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots = b_1 - b$$

*) Offenbar bleibt $\mathfrak{B} = \Omega$ auch dann noch stetig, wenn die oben als constant vorausgesetzten Grössen (a) sich zugleich der Art stetig ändern, dass das Maximum H der Moduln von A_n auch während der Aenderung endlich bleibt.

ebenfalls convergiren muss; aber dieser Grenzwert b kann sehr wohl von Null verschieden sein, und es leuchtet ein, dass in diesem Fall die Reihe \mathfrak{B} stets und nur dann convergirt, wenn A_n mit wachsendem n sich ebenfalls einem bestimmten Grenzwert \mathfrak{A} nähert, d. h. wenn die Reihe

$$\mathfrak{A} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

convergirt; und zwar ist dann $\mathfrak{B} = \Omega + \mathfrak{A}b$. Durch diese Verschärfung der Annahme über die Constanten (a) wird es also gestattet, die Annahme $b = 0$ aufzugeben, während die Annahme, dass \mathfrak{B} einen endlichen Werth besitzt, bestehen bleibt*). Von besonderer Wichtigkeit ist aber die Bemerkung, dass jetzt die Reihe \mathfrak{B} sich schon dann mit den Grössen (b) *stetig* ändert, wenn \mathfrak{B} im Verlaufe der Aenderung *endlich* bleibt, während Ω mit \mathfrak{B} und b auch *unstetig* werden kann. Setzt man nämlich $\mathfrak{A} = A_n + \mathfrak{A}_n$, so wird $a_n = \mathfrak{A}_{n-1} - \mathfrak{A}_n$, und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}b_1 - \mathfrak{A}_1(b_1 - b_2) - \mathfrak{A}_2(b_2 - b_3) - \dots;$$

ist nun δ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse, so kann man ν so gross wählen, dass für *alle****) Werthe $n \geq \nu$ der Modul von $\mathfrak{A}_n < \delta$ wird; während daher die Summe der ersten ν Glieder rechter Hand sich stetig mit den Grössen (b) ändert, bleibt der Modul des Restes $< \delta \mathfrak{B}$ und kann folglich, da \mathfrak{B} endlich bleibt, durch δ so kleingemacht werden, wie man will; mithin ändert sich \mathfrak{B} stetig, was zu beweisen war.

*) Die Grössenreihen (b), denen endliche Werthe \mathfrak{B} entsprechen, besitzen unter andern merkwürdigen Eigenschaften die, dass aus je zwei solchen Systemen (b'), (b'') unendlich viele andere abgeleitet werden können, deren allgemeines Glied $c + c'b'_n + c''b''_n$ ist, wo c, c', c'' beliebige, von n unabhängige Grössen bedeuten.

**) Ist das System (a) ebenfalls veränderlich, so ist die Voraussetzung, dass \mathfrak{A} sich stetig mit den Grössen (a) ändert, noch nicht hinreichend für die Stetigkeit von \mathfrak{B} , wovon man sich durch die genaue Prüfung des folgenden Beispiels überzeugen wird. Es sei $\psi(x)$ eine stetige Function, welche sowohl für unendlich kleine als auch für unendlich grosse Werthe x unendlich klein wird, wie z. B. $x : (1 + x^2)$; ist nun $h \geq 0$ eine veränderliche Grösse, und $a_n = \psi(nh) - \psi((n-1)h)$, ferner $b_n = 1 - nh$ oder $= 0$, je nachdem $nh < 1$ oder > 1 ist, so nähert sich \mathfrak{B} , wenn h unendlich klein wird, nicht dem Werthe Null, welcher $h = 0$ entspricht, sondern dem Werthe

$$\int_0^1 \psi(x) dx,$$

obgleich \mathfrak{A} stetig $= 0$, und \mathfrak{B} zwar nicht stetig, aber doch endlich bleibt.

Wir wollen die vorstehenden Principien auf die *Dirichlet'schen Reihen* anwenden; unter dieser Benennung verstehen wir Reihen von folgender Form*)

$$f(s) = \frac{a_1}{k_1^s} + \frac{a_2}{k_2^s} + \frac{a_3}{k_3^s} + \dots,$$

wo $k_1, k_2, k_3 \dots$ positive Constanten von der Art bedeuten, dass $k_n \leq k_{n+1}$ ist, und dass k_n mit n über alle Grenzen wächst; die Constanten $a_1, a_2, a_3 \dots$ sind beliebige reelle oder complexe Grössen; ebenso kann die Veränderliche s beliebige reelle oder complexe Werthe annehmen, doch wollen wir uns hier der Einfachheit halber auf *reelle* Werthe s beschränken. Behält A_n die frühere Bedeutung, so ergibt sich folgender Satz:

Bleibt A_n endlich bei wachsendem n , so convergirt die Reihe $f(s)$ für alle positiven Werthe s und ist nebst ihren sämtlichen Derivirten stetig; convergirt die Reihe noch für $s = 0$, so ist sie auch an dieser Stelle stetig.

Die Behauptungen über $f(s)$ folgen unmittelbar aus der allgemeinen Untersuchung, wenn man $b_n = k_n^{-s}$ setzt, wodurch \mathfrak{B} in die obige Reihe übergeht; denn \mathfrak{B} ist $= k_1^{-s}$ oder $= 0$, je nachdem $s > 0$ oder $= 0$ ist. Um auch die Endlichkeit und Stetigkeit ihrer Derivirten $f'(s)$ darzuthun, setzen wir, wenn s einen festen positiven Werth, und ε eine sehr kleine positive oder negative Grösse bedeutet,

$$b_n = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{k_n^s} - \frac{1}{k_n^{s+\varepsilon}} \right),$$

so wird

$$\mathfrak{B} = \frac{f(s) - f(s + \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Wählt man nun ν so gross, dass $s \log k_\nu > 1$, und ε so klein, dass

$$\frac{s}{\varepsilon} \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{s} \right) < s \log k_\nu$$

ist, so ist $b_\nu \geq b_{\nu+1} \geq b_{\nu+2} \dots$, weil die Derivirte der Function

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{x^s} - \frac{1}{x^{s+\varepsilon}} \right)$$

*) Sie nehmen die Gestalt von Potenzenreihen an, wenn man $s = -\log x$ setzt.