Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0162
LOG Titel: §. 144. Eigenschaften der Dirichlet'schen Reihen
LOG Typ: chapter

für alle Werthe $x \geqq k_\nu$ negativ ist; ausserdem ist $\mathfrak{b} = 0$, also $\mathfrak{B}_{\nu-1} = b_\nu$. Wird nun ε unendlich klein, so nähert sich b_n dem Grenzwerthe

$$b'_n = \frac{\log k_n}{k_n^s},$$

und da $b'_\nu \geqq b'_{\nu+1} \geqq b'_{\nu+2} \ldots$, ferner $\mathfrak{b}' = 0$, also $\mathfrak{B}'_{\nu-1} = b'_\nu$ ist, so geht $\mathfrak{B}_{\nu-1}$ stetig in den Grenzwerth $\mathfrak{B}'_{\nu-1}$, und folglich auch $\mathfrak{B}$ stetig in den Werth $\mathfrak{B}'$ über. Mithin nähert sich auch $\mathfrak{P}$ dem Grenzwerthe $\mathfrak{P}'$, d. h. es ist

$$-f'(s) = \frac{a_1 \log k_1}{k_1^s} + \frac{a_2 \log k_2}{k_2^s} + \cdots,$$

und da diese Reihe wieder von derselben Beschaffenheit ist, so wird $f'(s)$ auch eine *stetige* Function von s. Ganz ähnlich lässt sich der Beweis für die Derivirten höherer Ordnung führen.

§. 144.

Der wahre Charakter des zuletzt bewiesenen Satzes besteht darin, dass aus dem Verhalten einer Dirichlet'schen Reihe $f(s)$ für $s = 0$ ein Schluss auf ihr Verhalten für alle positiven Werthe s gezogen wird (man kann ihn leicht so umformen, dass von dem beliebigen Werthe $s = \sigma$ auf alle Werthe $s > \sigma$ geschlossen wird). Unter diesem Gesichtspuncte erscheint von besonderm Interesse eine Vergleichung dieses Satzes mit dem allgemeinen Princip des §. 118; beachtet man nämlich, dass, wenn die dort mit t bezeichnete Grösse zwischen k_n und $k_{n+1} > k_n$ liegt, die entsprechende Grösse $T = n$ nichts Anderes ist, als die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$\frac{1}{k_1^{1+s}} + \frac{1}{k_2^{1+s}} + \frac{1}{k_3^{1+s}} + \cdots$$

für $s = -1$, so erkennt man, dass dort aus dem Verhalten der Reihe für $s = -1$ ein Schluss auf ihr Verhalten für alle positiven Werthe s, und namentlich auf ihr Verhalten an der Stelle $s = 0$ gezogen wird. Eine genauere, auf die Vereinigung und Verallgemeinerung beider Sätze hinzielende Untersuchung führt zu den nachstehenden Resultaten, in welchen zur Abkürzung

$$S_n = \frac{a_1}{k_1^s} + \frac{a_2}{k_2^s} + \cdots + \frac{a_n}{k_n^s}$$

gesetzt ist, während A_n seine frühere Bedeutung behält.

1. *Bleibt $S_n k_n^s$ für einen bestimmten negativen Werth s endlich bei wachsendem n, so gilt Dasselbe für jeden negativen Werth s, und ebenso bleibt $A_n : \log k_n$ endlich.*

2. *Bleibt $A_n : \log k_n$ endlich bei wachsendem n, so convergirt die Reihe $f(s)$ für jeden positiven Werth s.*

3. *Nähern sich $s S_n k_n^s$ und $s S_n k_{n+1}^s$ für einen bestimmten negativen Werth s bei wachsendem n einem gemeinschaftlichen Grenzwerthe $-\omega$, so gilt Dasselbe für jeden negativen Werth s, und ebenso nähern sich $A_n : \log k_n$ und $A_n : \log k_{n+1}$ dem gemeinschaftlichen Grenzwerthe $+\omega$.*

4. *Nähern sich $A_n : \log k_n$ und $A_n : \log k_{n+1}$ bei wachsendem n einem gemeinschaftlichen Grenzwerthe ω, so nähert sich $s f(s)$, wenn s positiv unendlich klein wird, demselben Grenzwerthe ω.*

Offenbar entspringt der Satz des vorigen Paragraphen aus 2., und der Satz des §. 118 aus 3. und 4.; um die Beweise kurz zu führen, bemerken wir, dass, wenn

$$R_n = \frac{a_1}{k_1^r} + \frac{a_2}{k_2^r} + \cdots + \frac{a_n}{k_n^r}$$

gesetzt wird,

$$S_n - R_n k_n^{r-s} = R_1 (k_1^{r-s} - k_2^{r-s}) + \cdots + R_{n-1} (k_{n-1}^{r-s} - k_n^{r-s})$$

ist; zerlegt man die Summe rechter Hand in zwei Bestandtheile, von denen der eine die ersten $(m-1)$ Glieder, der andere die übrigen $(n-m)$ Glieder enthält, und berücksichtigt, dass man allgemein

$$\frac{k_\nu^{r-s} - k_{\nu+1}^{r-s}}{r-s} = \int_{k_{\nu+1}}^{k_\nu} x^{r-s-1}\, dx = h_\nu^r \int_{k_{\nu+1}}^{k_\nu} x^{-s-1}\, dx = h_\nu^r \frac{k_{\nu+1}^{-s} - k_\nu^{-s}}{s}$$

setzen kann, wo $k_\nu \leqq h_\nu \leqq k_{\nu+1}$ ist, so erhält man

$$S_n - R_n k_n^{r-s} = \frac{r-s}{s} \left\{ M(k_m^{-s} - k_1^{-s}) + N(k_n^{-s} - k_m^{-s}) \right\},$$

wo M und N Mittelwerthe*) aus den Grössen $R_\nu h_\nu^r$ resp. von

*) Unter einem Mittelwerthe aus complexen Grössen z ist jeder complexe Werth ζ von der Beschaffenheit zu verstehen, dass die reellen Bestandtheile von ζ und ζi resp. Mittelwerthe aus den reellen Bestandtheilen der Grössen z und der Grössen zi sind.

$\nu = 1$ bis $\nu = m - 1$, und von $\nu = m$ bis $\nu = n - 1$ bedeuten. Nimmt man nun, wie im *dritten* Satze an, dass die Grössen $r R_\nu k_\nu^r$, $r R_\nu k_{\nu+1}^r$, also auch die Grössen $r R_\nu h_\nu^r$ mit wachsendem ν sich einem Grenzwerthe $-\omega$ nähern, und lässt man m mit n, doch so langsam über alle Grenzen wachsen, dass $k_m : k_n$ unendlich klein wird, so nähert sich rN dem Grenzwerthe $-\omega$, während M endlich bleibt, und folglich wird, wenn s negativ ist, $s S_n k_n^s$ sich ebenfalls dem Grenzwerthe $-\omega$ nähern. Ist aber $s = 0$, so folgt

$$A_n - R_n k_n^r = r\left\{M \log\left(\frac{k_1}{k_m}\right) + N \log\left(\frac{k_m}{k_n}\right)\right\},$$

und wenn man m der Art mit n über alle Grenzen wachsen lässt, dass $\log k_m : \log k_n$ unendlich klein wird, so ergiebt sich, dass $A_n : \log k_n$ sich dem Werthe $+\omega$ nähert. Die Behauptungen über $s S_n k_{n+1}^s$ und $A_n : \log k_{n+1}$ ergeben sich von selbst, weil aus der Annahme hervorgeht, dass, wenn ω von Null verschieden ist, nothwendig $k_n : k_{n+1}$ sich dem Werthe 1 nähert. Zugleich leuchtet ein, dass der Beweis des *ersten* Satzes auf dieselbe Weise geführt werden kann, und zwar viel einfacher, weil es gar keiner Zerlegung der obigen Summe in zwei Bestandtheile bedarf*).

Der Beweis des *zweiten* und *vierten* Satzes lässt sich in ähnlicher Weise führen; setzt man nämlich, wenn s einen *positiven* Werth hat,

$$K_n = \int_{k_n}^{\infty} \frac{s \log x \, dx}{x^{s+1}} = \frac{1 + s \log k_n}{s k_n^s},$$

so ist

$$K_n - K_{n+1} = \int_{k_n}^{k_{n+1}} \frac{s \log x \, dx}{x^{s+1}} = \log h_n (k_n^{-s} - k_{n+1}^{-s});$$

nimmt man daher an, dass $A_n : \log k_n$ endlich bleibt, so folgt hieraus leicht**), dass die unendliche Reihe

---

*) Die auf den ersten Blick auffallende Erscheinung, dass der obige Beweis auch für positive Werthe r gilt, hängt mit ähnlichen Sätzen über das Verschwinden von $f(s) - S_n$ für positive Werthe s bei wachsendem n zusammen.

**) Offenbar darf man, ohne die Allgemeinheit der Sätze zu beeinträchtigen, bei ihrem Beweise annehmen, dass schon $k_1 > 1$ ist.

$$A_1(k_1^{-s} - k_2^{-s}) + A_2(k_2^{-s} - k_3^{-s}) + \cdots$$
$$= \frac{A_1}{\log h_1}(K_1 - K_2) + \frac{A_2}{\log h_2}(K_2 - K_3) + \cdots$$

convergirt, und dass ihre Summe mit $f(s)$ übereinstimmt, womit der zweite Satz bewiesen ist. Bezeichnet man ferner mit M und M' Mittelwerthe aus den Grössen $A_n : \log h_n$ resp. von $n = 1$ bis $n = m - 1$, und von $n = m$ bis $n = \infty$, so kann man

$$f(s) = M(K_1 - K_m) + M' K_m$$

setzen; nimmt man nun (wie im vierten Satze) an, dass die Grössen $A_n : \log k_n$ und $A_n : \log k_{n+1}$ sich einem gemeinschaftlichen Grenzwerthe ω nähern, so gilt Dasselbe von $A_n : \log h_n$; lässt man daher, während s positiv unendlich klein wird, gleichzeitig m über alle Grenzen, doch so langsam wachsen, dass $s \log k_m$ unendlich klein wird, so nähert sich M' dem Grenzwerthe ω, während M endlich bleibt, und da sK_1 und sK_m sich dem gemeinschaftlichen Grenzwerthe 1 nähern, so nähert sich $sf(s)$ dem Grenzwerthe ω, was zu beweisen war.

Nachdem die obigen Sätze bewiesen sind, führen wir einige Beispiele an, hauptsächlich um zu zeigen, dass sie nicht ohne Weiteres umgekehrt werden dürfen.

Beispiel 1. Ist $c > 1$, und $s > 0$, so ist

$$f(s) = \frac{a}{c^s} + \frac{b}{c^{2s}} + \frac{a}{c^{3s}} + \frac{b}{c^{4s}} + \cdots = \frac{ac^s + b}{c^{2s} - 1};$$

für jeden negativen Werth s ist bei wachsendem n

$$\lim S_{2n} c^{2ns} = \frac{ac^s + b}{1 - c^{2s}}, \quad \lim S_{2n+1} c^{(2n+1)s} = \frac{a + bc^s}{1 - c^{2s}},$$

also schwankt $S_n k_n^s$, und nur, wenn $b = a$ ist, wird

$$\lim S_n k_n^s = \frac{a}{1 - c^s};$$

trotzdem ist, auch wenn a und b ungleich sind,

$$\lim \frac{A_n}{\log k_n} = \lim \frac{A_n}{\log k_{n+1}} = \frac{a + b}{2 \log c},$$

und wirklich nähert sich $sf(s)$ für unendlich kleine positive Werthe von s demselben Grenzwerth.

Beispiel 2. Ist wieder $c > 1$, und $s > 0$, so ist

$$f(s) = \frac{1}{c^s} - \frac{2}{c^{2s}} + \frac{3}{c^{3s}} - \frac{4}{c^{4s}} + \cdots = \frac{c^s}{(c^s+1)^2};$$

da $A_{2n} = -n$, $A_{2n-1} = +n$ ist, so schwankt $A_n : \log k_n$; dennoch nähert sich $sf(s)$ dem bestimmten Grenzwerth Null, wenn s positiv unendlich klein wird.

Beispiel 3. Von grösserem Interesse ist die folgende Reihe

$$f(s) = e^{-s} + c\,e^{-sc} + c^2 e^{-sc^2} + c^3 e^{-sc^3} + \cdots,$$

wo c wieder > 1 ist; da $\log k_n = c^{n-1}$, und

$$A_n = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = \frac{c^n - 1}{c - 1},$$

so ergiebt sich bei wachsendem n

$$\lim \frac{A_n}{\log k_n} = \frac{c}{c-1}, \quad \lim \frac{A_n}{\log k_{n+1}} = \frac{1}{c-1},$$

und es zeigt sich, dass $sf(s)$ für unendlich kleine positive Werthe von s sich keinem Grenzwerthe nähert, sondern hin- und herschwankt. Ist nämlich r ein bestimmter positiver Werth, und lässt man $s = rc^{-\varrho}$ dadurch unendlich klein werden, dass ϱ wachsend alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, so nähert sich $sf(s)$ dem bestimmten, aber von r abhängigen Grenzwerth

$$\psi(r) = \Sigma\, r c^n e^{-rc^n},$$

wo n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen muss. Offenbar ist $\psi(r)$ eine periodische Function von $\log r$, welche sich in die Fourier'sche Reihe

$$\frac{1}{\log c}\, \Sigma\, z^n\, \Pi\left(\frac{2n\pi i}{\log c}\right)$$

verwandeln lässt, wo $\log z \log c = -2\pi i \log r$ ist, Π das Euler'sche Integral zweiter Art bedeutet, und n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; sie convergirt für jeden complexen Werth r, dessen reeller Bestandtheil positiv ist; sie ist zugleich der Grenzwerth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r c^x e^{-rc^x}\, dx . \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}$$

für unendlich grosse Werthe der positiven ganzen Zahl n. Wird s stetig positiv unendlich klein, so schwankt $sf(s)$ um den mittlern Werth $1 : \log c$, welcher auch zwischen den Grenzwerthen von $A_n : \log k_n$ und $A_n : \log k_{n+1}$ liegt.