

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0172

**LOG Titel:** S. 153. Anzahl der ambigen ursprünglichen Classen erster Art

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

in  $q$  Complexe  $\mathfrak{A}H$  von je  $\alpha$  Classen, deren Duplication eine und dieselbe Classe  $HH$  hervorbringt, während zwei Classen, welche zwei verschiedenen solchen Complexen angehören, durch Duplication auch zwei verschiedene Classen hervorbringen; und endlich ist  $h = \alpha q$ .

Da nun  $h$  auch  $= ng$ , und ausserdem  $q \leq n$  ist, so ergibt sich  $g \leq \alpha$ , d. h. der Satz: *Die Anzahl der wirklich existirenden verschiedenen Geschlechter ist höchstens gleich der Anzahl der ambigen Classen.*

§. 153.

Es kommt also jetzt darauf an, für eine gegebene Determinante  $D$  die Anzahl  $\alpha$  aller ambigen Classen  $A$  genau zu bestimmen, welche ursprünglich von erster Art sind.

Da in jeder ambigen Classe  $A = A^{-1}$  stets mindestens eine ambige Form  $(a, b, c)$  zu finden ist (§. 58), so bleibt gewiss keine jener  $\alpha$  Classen unvertreten, wenn wir alle ambigen Formen aufschreiben. Da nun in einer solchen Form  $2b$  durch  $a$  theilbar, folglich  $b$  entweder  $\equiv 0$ , oder  $\equiv \frac{1}{2}a \pmod{a}$ , also  $(a, b, c)$  selbst mit einer Form äquivalent ist (§. 56), deren mittlerer Coefficient entweder Null, oder die Hälfte des ersten Coefficienten ist, so genügt es, alle Formen

$$\left(a, 0, \frac{-D}{a}\right) \quad \text{und} \quad \left(2b, b, \frac{b^2 - D}{2b}\right)$$

zu betrachten, welche ursprünglich von erster Art sind.

Bedeutet  $\mu$  die Anzahl aller verschiedenen *ungeraden* Primzahlen, welche in  $D$  aufgehen, ist ferner  $\nu = 0$  oder  $= 1$ , je nachdem  $D$  ungerade oder gerade, so ist  $\mu + \nu$  die Anzahl *aller* verschiedenen in  $D$  aufgehenden Primzahlen. Dann leuchtet ein, dass die Anzahl aller ursprünglichen Formen vom Typus

$$(a, 0, a')$$

gleich  $2^{\mu+\nu+1}$  ist; die eine Hälfte derselben hat positive erste Coefficienten, die andere Hälfte negative.

Betrachten wir nun die anderen ambigen ursprünglichen Formen erster Art, deren Typus

$$\left(2b, b, \frac{b^2 - D}{2b}\right)$$

ist, so muss  $b$  ein solcher Divisor von  $D = -bb'$  sein, dass der dritte Coefficient  $\frac{1}{2}(b + b')$  eine ganze Zahl und relative Primzahl zu  $2b$  wird; mithin muss zunächst  $b + b' \equiv 2 \pmod{4}$  sein, und ferner dürfen  $b$  und  $b'$  keinen gemeinschaftlichen ungeraden Divisor haben. Sind nun  $b$  und  $b'$  ungerade, so folgt  $b' \equiv b$ ,  $D \equiv -bb \equiv 3 \pmod{4}$ ; umgekehrt, wenn  $D \equiv 3 \pmod{4}$ , so kann  $b$  nur ungerade sein, und aus  $bb' = -D \equiv 1 \pmod{4}$  folgt von selbst, dass  $b \equiv b'$ , also  $b + b' \equiv 2 \pmod{4}$  wird; mithin kann  $b$  jeder Divisor von  $D$  sein, für welchen  $b$  und  $b'$  relative Primzahlen werden. Die Anzahl dieser Formen

$$(2b, b, \frac{1}{2}(b + b'))$$

ist daher  $= 2^{\mu+1}$ , unter welchen ebensoviele mit positiven, wie mit negativen ersten Coefficienten vorkommen. Sind aber  $b$  und  $b'$  gerade, so ist eine von ihnen  $\equiv 0$ , die andere  $\equiv 2 \pmod{4}$ , mithin  $D \equiv 0 \pmod{8}$ , und  $\frac{1}{2}b$ ,  $\frac{1}{2}b'$  sind relative Primzahlen. Umgekehrt, wenn  $D \equiv 0 \pmod{8}$  ist, so muss  $b$  gerade sein, und man kann für  $\frac{1}{2}b$  jeden Divisor von  $\frac{1}{4}D = -\frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b'$  wählen, für welchen  $\frac{1}{2}b$ ,  $\frac{1}{2}b'$  relative Primzahlen werden; mithin ist die Anzahl dieser Formen, da  $\frac{1}{4}D$  gerade ist, gleich  $2^{\mu+2}$ , und unter ihnen finden sich ebensoviele mit positiven wie mit negativen ersten Coefficienten.

Die Anzahl aller dieser ambigen ursprünglichen Formen erster Art ist daher gleich

$$\begin{array}{ll} 2^{\mu+1}, & \text{wenn } D \equiv 1 \pmod{4}, \\ 2^{\mu+2}, & \text{„ } D \equiv 2, 3, 4, 6, 7 \pmod{8}, \\ 2^{\mu+3}, & \text{„ } D \equiv 0 \pmod{8}; \end{array}$$

sie ist folglich in allen Fällen genau doppelt so gross, als die Anzahl  $2^\lambda = 2^\tau$  aller angebbaren Totalcharaktere für die Determinante  $D$  (§. 122). Es kommt jetzt darauf an, die Anzahl der verschiedenen Classen zu bestimmen, welche durch diese Formen repräsentirt werden.

Sieht man von dem singulären Fall  $D = -1$  vorläufig ganz ab, so erkennt man leicht, dass die Coefficienten  $\alpha$  und  $\alpha'$ , ebenso die Zahlen  $b$  und  $b'$ , selbst ihren absoluten Werthen nach, von einander verschieden sein müssen. Hätten nämlich die relativen Primzahlen  $\alpha$ ,  $\alpha'$  denselben absoluten Werth 1, so wäre  $D = \pm 1$ ; dasselbe würde sich ergeben, wenn man annehmen wollte, die unge-

raden Zahlen  $b$  und  $b'$  hätten denselben absoluten Werth; sind endlich  $b$  und  $b'$  gerade, so ist die eine der Zahlen  $\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b'$  gerade, die andere ungerade, also haben sie verschiedene absolute Werthe. Hieraus folgt, dass die sämmtlichen obigen Formen immer in Paare von je zwei von einander verschiedenen Formen  $(a, 0, a')$ ,  $(a', 0, a)$ , und  $(2b, b, \frac{1}{2}(b + b'))$ ,  $(2b', b', \frac{1}{2}(b + b'))$  zerfallen, und da die erste resp. durch die Substitutionen  $(\begin{smallmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} -1, & -1 \\ +2, & +1 \end{smallmatrix})$  in die zweite übergeht, so genügt es, diejenige von ihnen beizubehalten, deren erster Coefficient der kleinere ist; mithin haben wir nur noch  $2\tau$  Formen  $(a, 0, a')$ ,  $(2b, b, \frac{1}{2}(b + b'))$ , in welchen die absoluten Werthe  $(a)$  und  $(b) < \sqrt{D}$  sind; und unter diesen Formen giebt es wieder ebensoviele mit positiven ersten Coefficienten, wie mit negativen.

Ist nun  $D$  negativ, so behalten wir nur die  $\tau$  Formen bei, deren äussere Coefficienten positiv sind, und wir wollen zeigen, dass sie die Repräsentanten von ebensovielen verschiedenen Classen sind. Zunächst sind alle Formen  $(a, 0, a')$  und diejenigen Formen  $(2b, b, \frac{1}{2}(b + b'))$ , in welchen  $3b \leq b'$  ist, *reducirt* (§. 64), und statt jeder nicht *reducirten* Form  $(2b, b, \frac{1}{2}(b + b'))$ , in welcher also  $3b > b'$ , können wir die ihr nach rechts benachbarte *reducirte* Form  $(\frac{1}{2}(b + b'), \frac{1}{2}(b' - b), \frac{1}{2}(b + b'))$  substituiren. Man erkennt nun leicht, dass alle diese  $\tau$  *reducirten* Formen von einander verschieden, und dass auch keine zwei einander entgegengesetzt sind, weil keiner der mittleren Coefficienten negativ ist; sie gehören daher (§. 65) ebensovielen verschiedenen Classen an. Wir haben daher das Resultat: *Die Anzahl  $\alpha$  aller positiven ambigen ursprünglichen Classen erster Art von negativer Determinante  $D$  ist halb so gross wie die Anzahl  $2\tau$  aller angebbaren Totalcharaktere.* Dies gilt offenbar auch noch für den oben ausgeschlossenen singulären Fall  $D = -1$ , da die beiden Formen  $(1, 0, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$  äquivalent sind.

Ist aber die Determinante  $D$  positiv, so entspricht jeder der obigen  $2\tau$  ambigen Formen  $(A, B, C)$  eine einzige ihr äquivalente ambige Form  $(A, B', C')$ , wo  $B'$  durch die Bedingungen

$$B' \equiv B \pmod{A}, \quad 0 < \sqrt{D} - B' < (A)$$

vollständig bestimmt ist; offenbar entstehen auf diese Weise wieder  $2\tau$  ambige und von einander verschiedene Formen  $(A, B', C')$ . Um nun zu zeigen, dass alle diese Formen zugleich *reducirt* sind (§. 74), braucht nur nachgewiesen zu werden, dass  $(A) < \sqrt{D} + B'$  ist; wenn  $(A) < \sqrt{D}$  ist, so folgt dies unmittelbar daraus, dass zufolge der obigen Grenzbedingungen  $B'$  positiv ist; wenn aber  $(A) > \sqrt{D}$