in $q$ Complexe $\mathfrak{A}H$ von je $\alpha$ Classen, deren Duplication eine und dieselbe Classe $HH$ hervorbringt, während zwei Classen, welche zwei verschiedenen solchen Complexen angehören, durch Duplication auch zwei verschiedene Classen hervorbringen; und endlich ist $h = \alpha q$.

Da nun $h$ auch $= ng$, und ausserdem $q \leqq n$ ist, so ergiebt sich $g \leqq \alpha$, d. h. der Satz: *Die Anzahl der wirklich existirenden verschiedenen Geschlechter ist höchstens gleich der Anzahl der ambigen Classen.*

## §. 153.

Es kommt also jetzt darauf an, für eine gegebene Determinante $D$ die Anzahl $\alpha$ aller ambigen Classen $A$ genau zu bestimmen, welche ursprünglich von erster Art sind.

Da in jeder ambigen Classe $A = A^{-1}$ stets mindestens eine ambige Form $(a, b, c)$ zu finden ist (§. 58), so bleibt gewiss keine jener $\alpha$ Classen unvertreten, wenn wir alle ambigen Formen aufschreiben. Da nun in einer solchen Form $2b$ durch $a$ theilbar, folglich $b$ entweder $\equiv 0$, oder $\equiv \frac{1}{2}a \pmod{a}$, also $(a, b, c)$ selbst mit einer Form äquivalent ist (§. 56), deren mittlerer Coefficient entweder Null, oder die Hälfte des ersten Coefficienten ist, so genügt es, alle Formen

$$\left(a,\ 0,\ \frac{-D}{a}\right) \quad \text{und} \quad \left(2b,\ b,\ \frac{b^2 - D}{2b}\right)$$

zu betrachten, welche ursprünglich von erster Art sind.

Bedeutet $\mu$ die Anzahl aller verschiedenen *ungeraden* Primzahlen, welche in $D$ aufgehen, ist ferner $\nu = 0$ oder $= 1$, je nachdem $D$ ungerade oder gerade, so ist $\mu + \nu$ die Anzahl *aller* verschiedenen in $D$ aufgehenden Primzahlen. Dann leuchtet ein, dass die Anzahl aller ursprünglichen Formen vom Typus

$$(a,\ 0,\ a')$$

gleich $2^{\mu+\nu+1}$ ist; die eine Hälfte derselben hat positive erste Coefficienten, die andere Hälfte negative.

Betrachten wir nun die anderen ambigen ursprünglichen Formen erster Art, deren Typus

$$\left(2b,\ b,\ \frac{b^2-D}{2b}\right)$$

ist, so muss $b$ ein solcher Divisor von $D = -bb'$ sein, dass der dritte Coefficient $\frac{1}{2}(b+b')$ eine ganze Zahl und relative Primzahl zu $2b$ wird; mithin muss zunächst $b+b' \equiv 2 \pmod{4}$ sein, und ferner dürfen $b$ und $b'$ keinen gemeinschaftlichen ungeraden Divisor haben. Sind nun $b$ und $b'$ ungerade, so folgt $b' \equiv b$, $D \equiv -bb \equiv 3 \pmod{4}$; umgekehrt, wenn $D \equiv 3 \pmod{4}$, so kann $b$ nur ungerade sein, und aus $bb' = -D \equiv 1 \pmod{4}$ folgt von selbst, dass $b \equiv b'$, also $b+b' \equiv 2 \pmod{4}$ wird; mithin kann $b$ jeder Divisor von $D$ sein, für welchen $b$ und $b'$ relative Primzahlen werden. Die Anzahl dieser Formen

$$(2b,\ b,\ \tfrac{1}{2}(b+b'))$$

ist daher $= 2^{\mu+1}$, unter welchen ebensoviele mit positiven, wie mit negativen ersten Coefficienten vorkommen. Sind aber $b$ und $b'$ gerade, so ist eine von ihnen $\equiv 0$, die andere $\equiv 2 \pmod{4}$, mithin $D \equiv 0 \pmod{8}$, und $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}b'$ sind relative Primzahlen. Umgekehrt, wenn $D \equiv 0 \pmod{8}$ ist, so muss $b$ gerade sein, und man kann für $\frac{1}{2}b$ jeden Divisor von $\frac{1}{4}D = -\frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b'$ wählen, für welchen $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}b'$ relative Primzahlen werden; mithin ist die Anzahl dieser Formen, da $\frac{1}{4}D$ gerade ist, gleich $2^{\mu+2}$, und unter ihnen finden sich ebensoviele mit positiven wie mit negativen ersten Coefficienten.

Die Anzahl aller dieser ambigen ursprünglichen Formen erster Art ist daher gleich

$$\begin{array}{lll} 2^{\mu+1}, & \text{wenn} & D \equiv 1 \pmod{4}, \\ 2^{\mu+2}, & \text{„} & D \equiv 2, 3, 4, 6, 7 \pmod{8}, \\ 2^{\mu+3}, & \text{„} & D \equiv 0 \pmod{8}; \end{array}$$

sie ist folglich in allen Fällen genau doppelt so gross, als die Anzahl $2^\lambda = 2\tau$ aller angebbaren Totalcharaktere für die Determinante $D$ (§. 122). Es kommt jetzt darauf an, die Anzahl der verschiedenen Classen zu bestimmen, welche durch diese Formen repräsentirt werden.

Sieht man von dem singulären Fall $D = -1$ vorläufig ganz ab, so erkennt man leicht, dass die Coefficienten $a$ und $a'$, ebenso die Zahlen $b$ und $b'$, selbst ihren absoluten Werthen nach, von einander verschieden sein müssen. Hätten nämlich die relativen Primzahlen $a$, $a'$ denselben absoluten Werth 1, so wäre $D = \pm 1$; dasselbe würde sich ergeben, wenn man annehmen wollte, die ungeraden Zahlen $b$ und $b'$ hätten denselben absoluten Werth; sind endlich $b$ und $b'$ gerade, so ist die eine der Zahlen $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}b'$ gerade, die andere ungerade, also haben sie verschiedene absolute Werthe. Hieraus folgt, dass die sämmtlichen obigen Formen immer in Paare von je zwei von einander verschiedenen Formen $(a, 0, a')$, $(a', 0, a)$, und $(2b, b, \frac{1}{2}(b+b'))$, $(2b', b', \frac{1}{2}(b+b'))$ zerfallen, und da die erste resp. durch die Substitutionen $\binom{0,\ 1}{-1,\ 0}$, $\binom{-1,\ -1}{+2,\ +1}$ in die zweite übergeht, so genügt es, diejenige von ihnen beizubehalten, deren erster Coefficient der kleinere ist; mithin haben wir nur noch $2\tau$ Formen $(a, 0, a')$, $(2b, b, \frac{1}{2}(b+b'))$, in welchen die absoluten Werthe $(a)$ und $(b) < \sqrt{(D)}$ sind; und unter diesen Formen giebt es wieder ebensoviele mit positiven ersten Coefficienten, wie mit negativen.

Ist nun $D$ *negativ*, so behalten wir nur die $\tau$ Formen bei, deren äussere Coefficienten positiv sind, und wir wollen zeigen, dass sie die Repräsentanten von ebensovielen verschiedenen Classen sind. Zunächst sind alle Formen $(a, 0, a')$ und diejenigen Formen $(2b, b, \frac{1}{2}(b+b'))$, in welchen $3b \leqq b'$ ist, *reducirt* (§. 64), und statt jeder nicht reducirten Form $(2b, b, \frac{1}{2}(b+b'))$, in welcher also $3b > b'$, können wir die ihr nach rechts benachbarte reducirte Form $(\frac{1}{2}(b+b'), \frac{1}{2}(b'-b), \frac{1}{2}(b+b'))$ substituiren. Man erkennt nun leicht, dass alle diese $\tau$ reducirten Formen von einander verschieden, und dass auch keine zwei einander entgegengesetzt sind, weil keiner der mittleren Coefficienten negativ ist; sie gehören daher (§. 65) ebensovielen verschiedenen Classen an. Wir haben daher das Resultat: *Die Anzahl $\alpha$ aller positiven ambigen ursprünglichen Classen erster Art von negativer Determinante $D$ ist halb so gross wie die Anzahl $2\tau$ aller angebbaren Totalcharaktere.* Dies gilt offenbar auch noch für den oben ausgeschlossenen singulären Fall $D = -1$, da die beiden Formen $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 1)$ äquivalent sind.

Ist aber die Determinante $D$ *positiv*, so entspricht jeder der obigen $2\tau$ ambigen Formen $(A, B, C)$ eine einzige ihr äquivalente ambige Form $(A, B', C')$, wo $B'$ durch die Bedingungen

$$B' \equiv B \pmod{A}, \quad 0 < \sqrt{D} - B' < (A)$$

vollständig bestimmt ist; offenbar entstehen auf diese Weise wieder $2\tau$ ambige und von einander verschiedene Formen $(A, B', C')$. Um nun zu zeigen, dass alle diese Formen zugleich *reducirt* sind (§. 74), braucht nur nachgewiesen zu werden, dass $(A) < \sqrt{D} + B'$ ist; wenn $(A) < \sqrt{D}$ ist, so folgt dies unmittelbar daraus, dass zufolge der obigen Grenzbedingungen $B'$ positiv ist; wenn aber $(A) > \sqrt{D}$