Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0178
LOG Titel: §. 159. Endliche Körper
LOG Typ: chapter

Wir setzen daher voraus, dass A quadratischer Rest von $4D$ und relative Primzahl zu $4D$ ist; da nun $4D \equiv (2B)^2 \pmod{A}$, also quadratischer Rest von A ist, und da die Zahlen A, $4D$ nicht beide negativ sind, so besitzt die Gleichung

$$Ax^2 + 4Dy^2 - z^2 = 0$$

immer eigentliche Lösungen x, y, z, welche der Bedingung

$$2Bz \equiv 4Dy, \quad \text{also} \quad z \equiv 2By \pmod{A}$$

genügen (§. 157); man kann daher $z = At + 2By$ setzen, wodurch die obige Gleichung in die folgende übergeht

$$At^2 + 2B(2y) + C(2y)^2 = x^2;$$

da Ax, $2Dy$, z relative Primzahlen sind, so sind auch t, $2y$ relative Primzahlen, und folglich ist (A, B, C) einer Form äquivalent (§. 60), deren erster Coefficient x^2 eine Quadratzahl und relative Primzahl zu $2D$ ist, und welche folglich (nach §. 155) durch Duplication einer Form entsteht, deren erster Coefficient $\pm x$ ist. Was zu beweisen war*).

Die unendlich vielen eigentlichen Lösungen x, y, z der obigen Gleichung, welche der Bedingung $z \equiv 2By \pmod{A}$ genügen, zerfallen nun noch in verschiedene Classen in Bezug auf den Modul $4D$ (§. 156. II.); auf den Zusammenhang dieser Lösungen mit den verschiedenen Classen, durch deren Duplication dieselbe gegebene Classe des Hauptgeschlechtes entsteht, können wir aber hier nicht mehr eingehen.

§. 159.

Die Theorie der binären quadratischen Formen, ihrer Aequivalenz und Composition bildet nur einen speciellen Fall von der Theorie derjenigen homogenen Formen $n$ten Grades mit n Veränderlichen, welche sich in lineare Factoren mit algebraischen

---

*) Die Zurückführung dieses Satzes von *Gauss* auf den von *Lagrange* und *Legendre* ist, wie ich jetzt nachträglich bemerke, zuerst von *Arndt* ausgeführt (*Ueber die Anzahl der Genera der quadratischen Formen;* Crelle's Journal LVI), doch weicht die obige Darstellung in mehreren Puncten von der seinigen ab. In Wahrheit gehört der Satz von *Lagrange* nach Inhalt und Methode des Beweises in die Theorie der ternären Formen. — Man vergl. ferner *Kronecker: Ueber den Gebrauch der Dirichlet'schen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen* (Monatsber. d. Berliner Ak. 12. Mai 1864).

Coefficienten zerlegen lassen. Diese Formen sind zuerst von *Lagrange* *) betrachtet; später hat *Dirichlet* **) sich vielfach mit diesem Gegenstande beschäftigt, aber er hat von seinen weit gehenden Untersuchungen nur diejenige veröffentlicht, welche die Transformationen solcher Formen in sich selbst (vergl. §§. 61, 62) oder, was dasselbe ist, die Theorie der Einheiten für die entsprechenden algebraischen Zahlen behandelt; endlich hat *Kummer* ***) durch die Schöpfung der idealen Zahlen einen neuen Weg betreten, welcher nicht nur zu einer sehr bequemen Ausdrucksweise, sondern auch zu einer tieferen Einsicht in die wahre Natur der algebraischen Zahlen führt. Indem wir versuchen, den Leser in diese neuen Ideen einzuführen, stellen wir uns auf einen etwas höheren Standpunct und beginnen damit, einen Begriff einzuführen, welcher wohl geeignet scheint, als Grundlage für die höhere Algebra und die mit ihr zusammenhängenden Theile der Zahlentheorie zu dienen.

I. Unter einem *Körper* wollen wir jedes System von unendlich vielen reellen oder complexen Zahlen verstehen, welches in sich so abgeschlossen und vollständig ist, dass die Addition, Subtraction, Multiplication und Division von je zwei dieser Zahlen immer wieder eine Zahl desselben Systems hervorbringt. Der einfachste Körper wird durch alle rationalen, der grösste Körper durch alle Zahlen gebildet. Wir nennen einen Körper A einen *Divisor* des Körpers M, diesen ein *Multiplum* von jenem, wenn alle in A enthaltenen Zahlen sich auch in M vorfinden; man findet leicht, dass der Körper der rationalen Zahlen ein Divisor von jedem andern Körper ist. Der Inbegriff aller Zahlen, welche gleichzeitig in zwei Körpern A, B enthalten sind, bildet wieder einen Körper D, welcher der *grösste* gemeinschaftliche Divisor der beiden Körper A, B genannt werden kann, weil offenbar jeder gemeinschaftliche Divisor von A und B nothwendig ein Divisor von D ist; ebenso existirt immer ein Körper M, welcher das *kleinste* gemeinschaftliche Multiplum von A und B heissen soll, weil er ein Divisor von jedem andern gemeinschaftlichen Multiplum der beiden Körper ist. Entspricht ferner einer jeden Zahl a des Körpers A eine Zahl $b = \varphi(a)$

*) *Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré.* §. VI. Mém. de l'Ac. de Berlin. T. XXIII, 1769. (Œuvres de L. T. II, 1868, p. 375.) — *Additions aux Élémens d'Algèbre par L. Euler.* §. IX.

**) Vergl. Anm. zu §. 141.

***) Vergl. Anm. zu §. 16.

in der Weise, dass $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$, und $\varphi(aa') = \varphi(a)\,\varphi(a')$ ist, so bilden die Zahlen b (falls sie nicht sämmtlich verschwinden) ebenfalls einen Körper $B = \varphi(A)$, welcher *mit A conjugirt* ist und durch die *Substitution* φ aus A hervorgeht; dann ist rückwärts auch $A = \psi(B)$ mit B conjugirt. Zwei mit einem dritten conjugirte Körper sind auch mit einander conjugirt, und jeder Körper ist mit sich selbst conjugirt. Correspondirende Zahlen in zwei conjugirten Körpern A und B, wie a und $b = \varphi(a)$, sollen *conjugirte Zahlen* heissen.

Die einfachsten Körper sind diejenigen, welche nur eine *endliche* Anzahl von Divisoren besitzen. Nennt man m bestimmte Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ *von einander abhängig* oder *unabhängig*, je nachdem die Gleichung $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$ in rationalen Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_m$, die nicht sämmtlich verschwinden, lösbar ist oder nicht, so findet man durch sehr einfache Betrachtungen, auf die wir aber hier nicht eingehen wollen, dass aus einem Körper Ω von der angegebenen Art*) nur eine *endliche* Anzahl n von unabhängigen Zahlen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ sich auswählen lässt, dass also jede Zahl ω des Körpers stets und nur auf eine einzige Art durch die Form

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \cdots + h_n\omega_n = \sum h_\iota\omega_\iota \tag{1}$$

darstellbar ist, wo $h_1, h_2 \ldots h_n$ *rationale Zahlen* bedeuten. Wir wollen die Zahl n den *Grad*, ferner den Complex der n unabhängigen Zahlen ω_ι eine *Basis des Körpers Ω*, und die n Zahlen h_ι die dieser Basis entsprechenden *Coordinaten der Zahl* ω nennen; offenbar bilden je n Zahlen von der Form (1) wieder eine solche Basis, wenn die aus den entsprechenden n^2 Coordinaten gebildete Determinante von Null verschieden ist; einer solchen *Transformation* der Basis durch eine lineare Substitution entspricht eine Transformation der Coordinaten durch die sogenannte *transponirte* Substitution.

Die Forderung, dass die Zahlen ω des Körpers Ω durch Addition und Subtraction sich reproduciren sollen, wird durch ihre gemeinsame Form (1) schon erfüllt; für die Reproduction durch Multiplication ist ferner erforderlich und hinreichend, dass jedes

*) Ersetzt man die rationalen Zahlen überall durch Zahlen eines Körpers R, so gelten die nachfolgenden Betrachtungen auch für einen Körper Ω, welcher nur eine endliche Anzahl solcher Divisoren besitzt, die zugleich Multipla von R sind.

Product $\omega_\iota \omega_{\iota'}$ wieder in der Form (1) enthalten ist; diese Bedingungen, deren Anzahl $= \frac{1}{2} n(n+1)$ ist, lassen sich am einfachsten zusammenfassen, indem man die Coordinaten h_ι als *veränderlich* ansieht und

$$\omega^2 = 2 \sum H_\iota \omega_\iota \tag{2}$$

setzt, wo nun $H_1, H_2 \ldots H_n$ bestimmte, *mit rationalen Coefficienten* behaftete, ganze homogene quadratische Functionen der Coordinaten bedeuten. Durch diese n Functionen H_ι, auf deren analytische Eigenschaften wir unten zurückkommen werden, ist die Constitution des Körpers Ω vollständig bestimmt, und es lässt sich zunächst zeigen, dass die Zahlen von der Form (1) auch durch Division sich wieder erzeugen. Durch totale Differentiation von (2) erhält man

$$\omega\, d\omega = \sum dH_\iota \omega_\iota; \tag{3}$$

legt man den Coordinaten h_ι und ihren Differentialen dh_ι beliebige rationale Werthe bei, so ist durch die vorstehende Gleichung das Product aus zwei beliebigen Zahlen ω und $d\omega$ des Körpers Ω auf die Form (1) zurückgeführt. Speciell ergiebt sich aus (3)

$$\omega \omega_r = \sum \frac{\partial H_\iota}{\partial h_r} \omega_\iota; \tag{4}$$

legt man nun den Coordinaten h_ι beliebige rationale Werthe bei, welche aber nicht sämmtlich verschwinden, so kann auch der entsprechende Werth der Functional-Determinante

$$H = \sum \pm \frac{\partial H_1}{\partial h_1} \frac{\partial H_2}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial H_n}{\partial h_n} \tag{5}$$

nicht verschwinden; denn sonst liessen sich bekanntlich n rationale Zahlen dh_ι, die nicht sämmtlich verschwinden, so bestimmen, dass für jeden Index r

$$dH_r = \sum \frac{\partial H_r}{\partial h_\iota} dh_\iota = 0,$$

und folglich auch $\omega\, d\omega = 0$ würde, während doch keine der beiden Zahlen ω und $d\omega$ verschwindet. Hieraus folgt weiter durch Umkehrung der n Gleichungen (4), dass die n Quotienten $\omega_\iota : \omega$ wieder Zahlen von der Form (1) sind; dasselbe gilt daher auch von jedem Quotienten $\alpha : \omega$, wo α irgend eine Zahl von der Form (1) bedeutet. Mithin bilden alle Zahlen von der Form (1) wirklich einen Körper.

Durch Elimination der n Zahlen ω_ι aus den n Gleichungen (4) ergiebt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial h_1} - \omega, & \frac{\partial H_2}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial h_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial h_2}, & \frac{\partial H_2}{\partial h_2} - \omega & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial h_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial H_1}{\partial h_n}, & \frac{\partial H_2}{\partial h_n} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial h_n} - \omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

mithin ist jede Zahl ω des Körpers Ω die Wurzel einer (von der Wahl der Basis unabhängigen) Gleichung $n$ten Grades mit rationalen Coefficienten, also eine *algebraische Zahl*, und es lässt sich leicht zeigen, dass in dem Körper Ω auch Zahlen existiren, welche keiner Gleichung mit rationalen Coefficienten von niedrigerem als dem $n$ten Grade genügen, für welche also die vorstehende Gleichung *irreductibel* ist*). Bedeutet θ eine solche Zahl, so bilden

---

*) Der Beweis dieser Behauptung kann z. B. auf das folgende Lemma gestützt werden:

Genügt eine homogene lineare Function $\omega = \Sigma h_\iota \omega_\iota$ der n Variabeln h_ι einer Identität von der Form

$$A\omega^m + A_1\omega^{m-1} + \cdots + A_m = 0, \qquad (1)$$

wo $A, A_1 \dots A_m$ ganze Functionen der Variabeln h_ι mit *rationalen* Coefficienten bedeuten, die nicht sämmtlich identisch verschwinden, und ist der Grad m *kleiner* als die Anzahl n der Variabeln, so sind die n Grössen ω_ι von einander *abhängig*.

Durch totale Differentiation der Identität (1) ergiebt sich zunächst

$$M d\omega + \omega^m dA + \omega^{m-1} dA_1 + \cdots + dA_m = 0, \qquad (2)$$

wo zur Abkürzung

$$M = mA\omega^{m-1} + (m-1)A_1\omega^{m-2} + \cdots + A_{m-1}$$

gesetzt ist. Man kann nun offenbar annehmen, dass keine solche Identität (1) von noch niedrigerm Grade als m existirt, dass also das Product AM nicht identisch verschwindet; nun lege man, was stets möglich ist, den Variabeln h_ι solche rationale Werthe bei, für welche AM einen von Null verschiedenen Werth erhält; hierauf kann man, weil $m < n$ ist, den n Differentialen dh_ι solche rationale Werthe beilegen, welche den m homogenen linearen Gleichungen

$$A dA_1 = A_1 dA, \; A dA_2 = A_2 dA \; \dots \; A dA_m = A_m dA$$

genügen und nicht sämmtlich verschwinden; multiplicirt man nun (1) mit dA, (2) mit A, und subtrahirt, so folgt $AMd\omega = 0$, also auch $d\omega = \Sigma dh_\iota \omega_\iota = 0$, was zu beweisen war.

Hieraus folgt zunächst, dass, wenn die Grössen ω_ι und ω wieder ihre alte Bedeutung erhalten, die aus den Coordinaten der n Grössen $1, \omega, \omega^2 \dots \omega^{n-1}$ gebildete Determinante D, welche eine homogene Function der offenbar die Potenzen $1, \theta, \theta^2 \ldots \theta^{n-1}$ ebenfalls eine Basis des Körpers Ω, und Ω ist das System aller Zahlen, welche sich durch beliebige Wiederholung der vier arithmetischen Grundoperationen aus θ ableiten lassen. Substituirt man nun für θ der Reihe nach alle Wurzeln derselben irreductibelen Gleichung, so entstehen ebensoviele entsprechende Körper welche offenbar mit Ω und folglich auch mit einander conjugirt sind, und es liesse sich leicht zeigen, dass ausser diesen Körpern kein anderer mit Ω conjugirt ist. Dabei bemerken wir aber, um Missverständnissen vorzubeugen, dass diese n Körper, was ihren gesammten Zahleninhalt anbetrifft, sehr wohl theilweise oder auch sämmtlich identisch sein können, obgleich sie durch n *verschiedene* Substitutionen aus einem von ihnen hervorgehen *).

Da nun vermöge des Begriffes conjugirter Körper die Gleichungen (4) gültig bleiben, wenn die Zahlen des Körpers Ω durch die entsprechenden Zahlen eines conjugirten Körpers ersetzt werden, so folgt leicht, dass die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (6) die mit ω conjugirten Zahlen sind. Bezeichnet man daher mit $N(\omega)$ die sogenannte *Norm* der Zahl ω, d. h. das Product aus allen n conjugirten Wurzeln, die auch gruppenweise einander gleich sein können, so ist zufolge (6)

$$N(\omega) = H, \tag{7}$$

d. h. die homogene Function H ist das Product aus n conjugirten Factoren ersten Grades mit algebraischen Coefficienten. Aus dieser

---

Variabeln h_ι vom Grade $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist, nicht identisch verschwinden kann, weil sonst ω einer Identität von der obigen Form (1) und von niedrigerem Grade als n genügte, und folglich die Grössen ω_ι von einander abhängig wären. Giebt man nun den Coordinaten h_ι solche rationale Werthe, für welche D einen von Null verschiedenen Werth erhält, so folgt unmittelbar, dass die entsprechende Zahl ω des Körpers Ω die Wurzel einer irreductibeln Gleichung $n$ten Grades ist.

Jeder Lösung der Gleichung $D = 0$ in rationalen Zahlen h_ι entspricht eine Zahl ω, welche einem Divisor des Körpers Ω von niedrigerem als dem $n$ten Grade angehört; der Grad eines solchen Divisors ist immer ein Divisor von n.

*) Durch die weitere Verfolgung dieses Gegenstandes gelangt man unmittelbar zu den von *Galois* in die Algebra eingeführten Principien (*Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*; Journ. de Math. p. p. Liouville. T. XI. 1846); hierbei ist es zweckmässig, zunächst die einfachen Reciprocitätsgesetze aufzusuchen, welche zwischen irgend zwei solchen Körpern wie Ω, ihrem grössten gemeinschaftlichen Divisor und ihrem kleinsten gemeinschaftlichen Multiplum herrschen.

Definition geht unmittelbar der Satz hervor: *die Norm eines Productes ist immer gleich dem Product aus den Normen der Factoren.* Setzt man ferner

$$N(\omega) = \omega\,\omega', \tag{8}$$

so ist ω', weil $N(\omega)$ als rationale Zahl in Ω enthalten ist, ebenfalls eine Zahl des Körpers Ω, was auch aus (6) hervorgeht, und zwar ist

$$N(\omega') = N(\omega)^{n-1}; \tag{9}$$

nennen wir ω' die *zu ω adjungirte Zahl**), so ist die zu ω' adjungirte Zahl $= \omega\,N(\omega)^{n-2}$.

Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ beliebige Zahlen des Körpers Ω, und bedeuten $\beta_\iota, \gamma_\iota \ldots \lambda_\iota$ die übrigen $(n-1)$ mit α_ι conjugirten Zahlen, so setzen wir zur Abkürzung

$$(\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \lambda_n)^2 = \varDelta(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \tag{10}$$

und nennen dieses Determinantenquadrat die *Discriminante* der n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$; sie ist eine symmetrische Function der n mit θ conjugirten Zahlen und folglich eine *rationale* Zahl, und zwar ist

$$\varDelta(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = m^2 \varDelta(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n), \tag{11}$$

wo m die aus den Coordinaten der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gebildete Determinante bedeutet; da die Discriminante $\varDelta(1, \theta, \theta^2 \ldots \theta^{n-1})$ bekanntlich das Product aller Differenzen zwischen den mit θ conjugirten Zahlen und folglich von Null verschieden ist (weil eine irreductibele Gleichung nur ungleiche Wurzeln haben kann), so ist $\varDelta(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ stets und nur dann $=0$, wenn die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ von einander abhängig sind. Endlich ist allgemein

$$\varDelta(\omega\alpha_1, \omega\alpha_2 \ldots \omega\alpha_n) = N(\omega)^2 \varDelta(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n). \tag{12}$$

II. Im Vorhergehenden sind die Begriffe und Sätze entwickelt, deren wir in der Folge bedürfen; zur Erläuterung mögen aber hier noch die wichtigsten und nächstliegenden Resultate aus dem grossen Reichthume analytischer Entwicklungen mitgetheilt werden, welche sich an die Betrachtung der Functionen H_ι anknüpfen. Zwischen diesen n Functionen bestehen fundamentale Relationen, welche man erhält, wenn man das Product aus *drei* beliebigen Zahlen des Körpers Ω auf alle möglichen Arten bildet (vergl. §§. 1, 2). Bedeutet d' wieder eine beliebige Variation, so ist zufolge (4)

---

*) Dieser Ausdruck wird hier in ganz anderer Bedeutung gebraucht, wie von *Galois*.

$$d'\omega\,\omega_r = \Sigma\, d'\left(\frac{\partial H_\iota}{\partial h_r}\right)\omega_\iota;$$

multiplicirt man nun (3) mit $d'\omega$, und ersetzt die Producte $d'\omega\,\omega_\iota$ der vorstehenden Gleichung gemäss durch Summen, so folgt

$$\omega\, d\omega\, d'\omega = \Sigma\, dH_\iota\, d'\left(\frac{\partial H_{\iota'}}{\partial h_\iota}\right)\omega_{\iota'};$$

da die linke Seite symmetrisch in Bezug auf d und d' ist, und da die n Zahlen $\omega_{\iota'}$ unabhängig sind, so ergiebt sich, dass die Functionen H_ι den n Differentialgleichungen

$$\Sigma\, dH_\iota\, d'\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right) = \Sigma\, d'H_\iota\, d\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right) \tag{13}$$

genügen, wo r irgend einen der Indices $1, 2 \ldots n$ bedeutet. Um die Bedeutung dieser Relationen mehr hervortreten zu lassen, wollen wir sie den folgenden Entwicklungen zu Grunde legen, ohne den Zusammenhang der Functionen H_ι mit dem Körper Ω zu benutzen.

Zunächst wollen wir zeigen, dass die Functionaldeterminante H, welche zufolge ihrer Definition (5) eine ganze homogene Function $n$ten Grades mit rationalen Coefficienten ist, sich durch Multiplication reproducirt; gehen die Formen K und L dadurch aus H hervor, dass die Coordinaten h_ι resp. durch dh_ι und durch dH_ι ersetzt werden, so ist

$$L = HK; \tag{14}$$

denn wenn man die Coordinaten h_ι durch dh_ι ersetzt, so geht jede homogene lineare Function

$$\frac{\partial H_r}{\partial H_s} \quad \text{in} \quad d\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_s}\right),$$

und folglich H in

$$K = \Sigma \pm d\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right) d\left(\frac{\partial H_2}{\partial h_2}\right) \cdots d\left(\frac{\partial H_n}{\partial h_n}\right)$$

über; werden aber die Coordinaten h_ι durch die bilinearen Functionen dH_ι ersetzt, so geht zufolge (13)

$$\frac{\partial H_r}{\partial h_s} \quad \text{in} \quad \Sigma\, \frac{\partial}{\partial h_s}\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right) dH_\iota = \Sigma\, \frac{\partial H_\iota}{\partial h_s}\, d\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right),$$

und folglich H in $L = HK$ über, was zu beweisen war. Dies ist der schon oben angeführte Satz über die Norm eines Productes.

Bedeutet φ eine willkürliche Function der Coordinaten h_ι, und definirt man die Variation δ dadurch, dass

$$\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial H_\iota} h_\iota, \quad \text{also} \quad \delta H_\iota = h_\iota \tag{15}$$

wird, so ergiebt sich aus (13), wenn man d' durch δ ersetzt,

$$\Sigma\, dH_\iota \delta\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right) = \Sigma\, h_\iota d\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right) = dH_r,$$

weil H_r eine homogene Function zweiten Grades ist, mithin

$$\delta\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_s}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad = 0 \tag{16}$$

je nachdem r und s gleich oder ungleich sind; hieraus folgt, dass die n Variationen δh_ι *constante, rationale Zahlen* sind. Wird ferner die Variation δ' durch

$$\delta'\varphi = H\, \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial H_\iota} \delta h_\iota, \quad \text{also} \quad \delta' H_\iota = H \delta h_\iota \tag{17}$$

definirt, so ergiebt sich, wenn man in (13) d' durch δ' ersetzt,

$$\Sigma\, dH_\iota \delta'\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right) = H\, \Sigma\, \delta h_\iota d\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right) = Hd\, \Sigma \frac{\partial H_r}{\partial h_\iota} \delta h_\iota$$
$$= Hd\delta H_r = Hdh_r,$$

folglich

$$\delta'\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_s}\right) = H \frac{\partial h_r}{\partial H_s}; \tag{18}$$

da nun der Ausdruck rechter Hand der Coefficient des Elementes

$$\frac{\partial H_s}{\partial h_r}$$

in der Determinante H, also eine *ganze homogene Function* $(n-1)$*ten Grades* der Coordinaten h_ι mit rationalen Coefficienten ist, so gilt dasselbe von den Grössen

$$h'_r = \delta' h_r = H\, \Sigma \frac{\partial h_r}{\partial H_\iota} \delta h_\iota, \tag{19}$$

und umgekehrt geht aus (18) hervor, dass die Coefficienten der einzelnen n^2 Elemente in der Determinante H sich als homogene lineare Functionen der soeben definirten n Grössen h'_ι darstellen lassen. Wir wollen, wenn φ eine beliebige Function der Coordinaten h_ι bedeutet, mit φ' dieselbe Function der Grössen h'_ι bezeichnen; dann lautet die Gleichung (18)

$$\frac{\partial H_r'}{\partial h_s'} = H \frac{\partial h_r}{\partial H_s}, \tag{20}$$

und hieraus folgt zugleich

$$H' = H^{n-1}; \quad H \frac{\partial h_s'}{\partial H_r'} = \frac{\partial H_s}{\partial h_r}. \tag{21}$$

Da H eine Functionaldeterminante ist, so ist bekanntlich*)

$$d \log H = \Sigma \frac{\partial d H_\iota}{\partial H_\iota} - \Sigma \frac{\partial d h_\iota}{\partial h_\iota},$$

und folglich ergiebt sich unter Berücksichtigung von (13)

$$\Sigma \frac{\partial \log H}{\partial h_\iota} d H_\iota = \Sigma \frac{\partial}{\partial H_{\iota'}} \left(\frac{\partial H_{\iota'}}{\partial h_\iota}\right) d H_\iota$$
$$= \Sigma\, d\left(\frac{\partial H_{\iota'}}{\partial h_\iota}\right) \frac{\partial H_\iota}{\partial H_{\iota'}} = d\, \Sigma \frac{\partial H_\iota}{\partial h_\iota};$$

führt man daher die *homogene lineare Function*

$$S = \Sigma \frac{\partial H_\iota}{\partial h_\iota} \tag{22}$$

ein, so ist

$$\Sigma \frac{\partial \log H}{\partial h_\iota} d H_\iota = d S; \quad \frac{\partial \log H}{\partial h_r} = \frac{\partial S}{\partial H_r}, \tag{23}$$

also mit Rücksicht auf (20)

$$\frac{\partial H}{\partial h_r} = H\, \Sigma \frac{\partial S}{\partial h_\iota} \frac{\partial h_\iota}{\partial H_r} = \Sigma \frac{\partial S}{\partial h_\iota} \frac{\partial H_\iota'}{\partial h_r'};$$

man führe daher die *ganze homogene Function zweiten Grades*

$$T = \Sigma \frac{\partial S}{\partial h_\iota} H_\iota \tag{24}$$

ein, so wird

$$\frac{\partial H}{\partial h_r} = \frac{\partial T'}{\partial h_r'}; \quad d H = \Sigma \frac{\partial T'}{\partial h_\iota'} d h_\iota, \tag{25}$$

mithin sind auch die Derivirten der Form H darstellbar als homogene lineare Functionen der in (19) definirten Grössen h_ι', und rückwärts diese durch jene. Da ferner zufolge (20)

---

*) *Jacobi: De determinantibus functionalibus* §. 9 (Crelle's Journal XXII); in der obigen Form ist auch der Fall berücksichtigt, dass die Differentiale $d h_\iota$ Functionen von den Veränderlichen h_ι sind. Ersetzt man d durch δ', so folgt aus (17) und (19) unmittelbar

$$\Sigma \frac{\partial h_\iota'}{\partial h_\iota} = 0.$$

$$\Sigma \frac{\partial H'_\iota}{\partial h'_s} \frac{\partial H_r}{\partial h_\iota} = H \text{ oder } = 0$$

ist, je nachdem r und s gleich oder ungleich sind, so folgt durch Multiplication mit h'_s oder dh'_s und Summation in Bezug auf s

$$2 \Sigma H'_\iota \frac{\partial H_r}{\partial h_\iota} = Hh'_r; \quad \Sigma dH'_\iota \frac{\partial H_r}{\partial h_\iota} = Hdh'_r$$

und hieraus durch Differentiation

$$h'_r dH - Hdh'_r = 2 \Sigma H'_\iota d\left(\frac{\partial H_r}{\partial h_\iota}\right). \tag{26}$$

Mit Hülfe von (25) und (26) ist man im Stande, auch die Differentiale höherer Ordnung von H zu bilden; auf diese Weise findet man

$$Hdd'H - dHd'H = 2H \Sigma \frac{\partial H}{\partial h_\iota} dd'h_\iota - 2 \Sigma \frac{\partial^2 T}{\partial h_\iota \partial h_{\iota'}} H'_\iota dd'H_{\iota'}; \tag{27}$$

ausserdem ergiebt sich aus Gleichung (26), welcher man mit Hülfe von (13) auch die Form

$$h'_r dH - Hdh'_r = \Sigma \frac{\partial H'_\iota}{\partial h'_{\iota'}} \frac{\partial H'_r}{\partial h'_\iota} dh_{\iota'}$$

geben kann, die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial h'_1}{\partial h_1} \frac{\partial h'_2}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial h'_n}{\partial h_n} = (-1)^{n-1}(n-1) H^{n-2} \tag{28}$$

und folglich aus (25) die Hesse'sche Determinante der Form H, nämlich

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 H}{\partial h_1^2} \cdots \frac{\partial^2 H}{\partial h_n^2} = (-1)^{n-1}(n-1) H^{n-2} \Sigma \pm \frac{\partial^2 T}{\partial h_1^2} \cdots \frac{\partial^2 T}{\partial h_n^2}. \tag{29}$$

Aus den Gleichungen (16), (22), (24), (25), (26), (27) ergeben sich unmittelbar folgende auf die Variation δ bezüglichen Resultate:

$$\begin{aligned} &\delta S = n; \quad \delta T = S; \quad h'_r \delta H - H \delta h'_r = 2 H'_r; \\ &\delta H = S'; \quad \delta' H = \delta H^2 - H \delta^2 H = 2 T'. \end{aligned} \tag{30}$$

III. Alle diese Sätze sind abgeleitet aus der Voraussetzung, dass das System der n ganzen homogenen Functionen H_ι vom zweiten Grade den Bedingungen (13) genügt, und dass ihre Functionaldeterminante H nicht identisch verschwindet; fügt man noch die Voraussetzung hinzu, dass die Coefficienten dieser Functionen rationale Zahlen sind, und dass die Form H *irreductibel*, d. h. nicht zerlegbar ist in Factoren niedrigeren Grades, deren Coefficienten ebenfalls rationale Zahlen sind, so lässt sich umgekehrt beweisen, dass zu diesem Functionensystem ein algebraischer Zahlkörper Ω von der oben betrachteten Art gehört. Der Kürze halber führen wir eine Charakteristik ε ein, welche folgenden Sinn hat: ist φ irgend eine Function der Coordinaten h_ι, und ersetzt man die letzteren durch $h_\iota - \omega\,\delta h_\iota$, wo ω vorläufig eine *willkürliche* Function bedeutet, so geht φ in eine neue Function über, welche mit $\varepsilon(\varphi)$ bezeichnet werden soll. Aus dieser Definition folgt sofort

$$d\,\varepsilon(\varphi) = \varepsilon(d\varphi) - \varepsilon(\delta\varphi)\,d\omega; \tag{31}$$

unter der Voraussetzung, dass die Differentiale dh_ι *constant* sind. Hierauf definire man die Function ω als Wurzel der Gleichung $n$ten Grades

$$\varepsilon(H) = 0, \tag{32}$$

welche zufolge (16) vollständig mit der Gleichung (6) übereinstimmt, so lässt sich beweisen, dass ω eine *ganze* (homogene) Function ersten Grades, d. h. dass $dd'\omega = 0$ ist, wenn die Differentiale dh_ι, $d'h_\iota$ als constant vorausgesetzt werden. In der That ergiebt sich durch successive Differentiation der Identität (32) nach der in (31) ausgesprochenen Regel

$$\varepsilon(\delta H)\,d\omega = \varepsilon(dH) \tag{33}$$

und

$$\varepsilon(\delta H)^3\,dd'\omega = \varepsilon(R), \tag{34}$$

wo zur Abkürzung die homogene Function $(3n-4)$ten Grades

$$\left\{\begin{array}{l} \delta H^2 dd'H + \delta^2 H\,dH\,d'H \\ -\,\delta H\,dH\,d'\delta H - \delta H\,d'H\,d\delta H \end{array}\right\} = R$$

gesetzt ist. Dass diese Function R durch H theilbar, in Zeichen, dass $R \equiv 0$ ist*), ergiebt sich auf folgende Weise.

Aus (30) folgt

$$h'_r\,\delta H = 2H'_r + H\delta h'_r \equiv 2H'_r$$

ferner

$$h'_r\,\delta^2 H = 2\,\delta H'_r + H\delta^2 h'_r \equiv 2\,\delta H'_r$$

und hieraus durch Elimination von h'_r

$$\delta^2 H H'_r - \delta H\,\delta H'_r \equiv 0;$$

*) Dies gilt allgemein von dem Ausdrucke
$d'H\,d'''H\,dd''H + dH\,d''H\,d'd'''H - d'''H\,dH\,d'd''H - d'H\,d''H\,dd'''H.$

da nun zufolge (27) $dHd'H - Hdd'H$ eine homogene lineare Function der n Grössen H'_ι ist, so folgt auch, dass

$$\delta^2 H(dHd'H - Hdd'H) - \delta H \delta(dHd'H - Hdd'H) \equiv 0$$

ist; die linke Seite unterscheidet sich aber von R nur um Bestandtheile, welche durch H theilbar sind. Mithin ist $R = PH$, wo P eine ganze Function bedeutet, und folglich $\varepsilon(R) = \varepsilon(P)\,\varepsilon(H) = 0$. Da sich nun aus den Voraussetzungen über H beweisen lässt, dass $\varepsilon(\delta H)$ nicht identisch verschwindet, so folgt aus (34) $dd'\omega = 0$, d. h. die Wurzel ω der Gleichung (32) ist eine ganze Function ersten Grades; dass sie zugleich homogen ist, versteht sich von selbst, weil $H, \delta H \ldots \delta^{n-1} H$ und folglich auch ω gleichzeitig mit den Coordinaten h_ι verschwinden. Setzt man nun

$$\frac{\partial \omega}{\partial h_\iota} = \omega_\iota, \quad \omega = \sum h_\iota \omega_\iota, \tag{1}$$

so ergiebt sich aus (33), dass

$$\sum \delta h_\iota \omega_\iota = \delta\omega = 1 \tag{35}$$

und

$$\varepsilon\left(\frac{\partial H}{\partial h_\iota}\right) = \varepsilon(\delta H)\,\omega_\iota \tag{36}$$

ist. Da ferner zufolge (23)

$$\sum \frac{\partial H}{\partial h_\iota} dH_\iota = HdS \equiv 0$$

und

$$\varepsilon(dH_\iota) = dH_\iota - \omega d\delta H_\iota = dH_\iota - \omega dh_\iota$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon(H)dS &= \sum \varepsilon\left(\frac{\partial H}{\partial h_\iota}\right)\varepsilon(dH_\iota) \\ &= \varepsilon(\delta H) \sum \omega_\iota (dH_\iota - \omega dh_\iota), \end{aligned}$$

mithin

$$\omega d\omega = \sum dH_\iota \omega_\iota, \tag{3}$$

also auch

$$\omega^2 = 2\sum H_\iota \omega_\iota, \tag{2}$$

wodurch wir rückwärts zu unseren ursprünglichen Annahmen zurückgekehrt sind; und man kann auch beweisen — worauf wir hier nicht eingehen wollen — dass aus den Voraussetzungen über H die *Unabhängigkeit* der n Zahlen ω_ι folgt.