schiedenen Zahl in eine Zahl α des Systems $\mathfrak{a}$ verwandelt werden kann. Congruenzen in Bezug auf ein solches Ideal $\mathfrak{a}$ als Modul können addirt, subtrahirt und mit beliebigen Zahlen des Ideals multiplicirt werden. Von besonderer Wichtigkeit ist aber das System *aller* Zahlen, mit welchen solche Congruenzen multiplicirt werden dürfen, d. h. aller Zahlen, welche durch Multiplication mit allen Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ in Zahlen desselben Ideals $\mathfrak{a}$ verwandelt werden; man erkennt sofort, dass dies System selbst ein Ideal ist, welches die Zahl 1 enthält. Dieses Ideal kann die *Ordnung von* $\mathfrak{a}$ oder auch ein *Einheitsideal* genannt werden, weil für die in ihm enthaltenen Zahlen die von *Dirichlet**) aufgestellte Theorie der Einheiten gilt, und wir wollen uns im Folgenden auf die Darstellung dieser Dirichlet'schen Principien beschränken, indem wir auf die weitere Entwicklung der allgemeinen Theorie der Ideale verzichten.

§. 166.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Basiszahlen $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ des Körpers Ω zugleich die Basiszahlen einer *Ordnung* $\mathfrak{o}$ sind, d. h. dass die Zahl 1 und alle Producte $\omega_\iota \omega_{\iota'}$ *ganze* Coordinaten haben, woraus schon folgt, dass die Basiszahlen selbst ganze Zahlen sind. Die Zahlen in $\mathfrak{o}$, d. h. alle Zahlen $\omega = \sum h_\iota \omega_\iota$, deren Coordinaten h ganze rationale Zahlen sind, haben nun folgende Eigenschaften.

1. *Ist ω eine Zahl in $\mathfrak{o}$, so ist auch die zu ihr adjungirte Zahl ω' in $\mathfrak{o}$ enthalten.*

Da nämlich ω einer Gleichung $n$ten Grades mit ganzen rationalen Coefficienten genügt, deren letzter $= N(\omega) = \omega\omega'$ ist, so erhält man durch Division mit ω eine Gleichung von der Form

$$\omega' = c + c_1\omega + c_2\omega^2 + \cdots,$$

wo $c, c_1, c_2 \dots$ ganze rationale Zahlen bedeuten; mithin ist ω' in $\mathfrak{o}$ enthalten.

2. Den mit Ω conjugirten n Körpern entsprechen ebensoviele homogene lineare Functionen ω der Coordinaten h, und ihr Product $N(\omega)$ wird, wenn die Coordinaten ganze Zahlen sind, ebenfalls

*) Vergl. §. 141, Anm.

eine ganze rationale Zahl und folglich absolut $\geqq 1$, ausgenommen, wenn alle Coordinaten verschwinden. Die n mit Ω conjugirten Körper enthalten entweder nur reelle Zahlen, oder es treten auch Paare von zwei solchen Körpern auf, dass wenn der eine die imaginäre Zahl $x + yi$ enthält, die conjugirte Zahl $x - yi$ sich in dem andern vorfindet. Wir wollen die Anzahl dieser imaginären Paare mit $n - \nu$, also die Anzahl der reellen Körper mit $2\nu - n$ bezeichnen; dann ist ν die Gesammtanzahl aller reellen Körper und imaginären Paare. Die einem imaginären Paare entsprechenden beiden Functionen ω sind von der Form $u + vi$ und $u - vi$, wo u und v zwei homogene lineare Functionen der Coordinaten bedeuten. Diese $2(n - \nu)$ Functionen u, v und die den reellen Körpern entsprechenden $(2\nu - n)$ Functionen ω bilden ein System von n reellen Functionen, die wir gemeinschaftlich mit w bezeichnen wollen, und deren Functionaldeterminante

$$= (2i)^{\nu - n} \sqrt{\Delta(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n)},$$

also von Null verschieden ist, weil die Zahlen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ von einander unabhängig sind. Die Variabeln h sind daher umgekehrt völlig bestimmte lineare Functionen von den Grössen w; durchlaufen nun die letzteren stetig alle reellen Werthe, welche absolut kleiner als eine gegebene Constante sind, so bleiben auch die absoluten Werthe der Grössen h kleiner als eine entsprechende Constante und folglich wird auf diese Weise nur eine endliche Anzahl von Zahlen der Ordnung $\mathfrak{o}$ erzeugt, vielleicht gar keine.

Verstehen wir, wie üblich, unter dem Modulus $M(z)$ einer complexen Grösse $z = x + yi$ die positive Quadratwurzel aus $(x^2 + y^2)$, so können wir dies Resultat auch so aussprechen: *Es giebt in $\mathfrak{o}$ nur eine endliche Anzahl von Zahlen ω der Art, dass die Moduln aller mit ω conjugirten Zahlen, also auch die absoluten Werthe der Grössen w kleiner als eine vorgeschriebene Constante ausfallen.*

3. Wir theilen nun die n Körper, also auch die n Functionen ω nach Belieben in zwei Reihen, doch so, dass jede dieser Reihen wenigstens eine Function enthält, und dass je zwei Functionen $u \pm vi$ eines imaginären Paares in eine und dieselbe Reihe fallen (also ist der Fall $n = 1$ auszunehmen, ebenso der Fall $n = 2$ bei negativer Grundzahl). Bedeutet ferner c den grössten Werth, welchen die Modulsumme $\sum M(\omega_\iota)$ in irgend einer der n Functionen ω erreicht, so gilt folgender Satz:

Ist a ein beliebig kleiner, b ein beliebig grosser positiver gegebener Werth, so giebt es in $\mathfrak{o}$ eine solche Zahl ω, dass $M(\omega)$ in der ersten Reihe $< a$, in der zweiten $> b$, und dass $N(\omega)$ absolut $< (3\,c)^n$ wird.

Ist k eine bestimmte positive ganze rationale Zahl, und legt man jeder Coordinate h einen der $(k+1)$ Werthe $0, 1, 2 \ldots k$ bei, so wird durchweg $M(\omega) \leqq ck$, und die n Werthe w liegen zwischen den Grenzen $\pm ck$. Wir betrachten nun zunächst die der *ersten* Reihe angehörigen r Functionen ω oder w; da $n > r > 0$, und $k > 0$ ist, so ist auch

$$(k+1)^{\frac{n}{r}} > k^{\frac{n}{r}} + 1,$$

und folglich kann man eine positive ganze rationale Zahl m so wählen, dass

$$(k+1)^n > m^r > k^n$$

wird; setzt man nun zur Abkürzung

$$d = \frac{2\,ck}{m} < 2\,ck^{1-\frac{n}{r}},$$

so wird das Gebiet aller zwischen den Grenzen $\pm ck$ liegenden reellen Werthe durch Einschaltung der $(m-1)$ Zahlen

$$-ck+d, \quad -ck+2d \ldots -ck+(m-1)d$$

in m Intervalle von gleicher Grösse d getheilt, wobei man diese $(m-1)$ Zahlen selbst nach Belieben dem einen oder anderen der beiden benachbarten Intervalle zurechnen kann. Da nun jeder der r Werthe w aus der ersten Reihe einem und nur einem dieser m Intervalle angehört, so ist m^r die Anzahl der verschiedenen denkbaren Fälle, welche die Vertheilung der r Werthe w auf diese m Intervalle darbieten kann. Da ferner, wenn jede der n Coordinaten h alle $(k+1)$ Werthe $0, 1, 2 \ldots k$ durchläuft, $(k+1)^n$ solche Systeme von r zusammengehörigen Werthen w entstehen, so müssen, weil $(k+1)^n > m^r$ ist, mindestens zwei *verschiedene* solche Werthsysteme hinsichtlich ihrer Vertheilung auf die m Intervalle vollständig übereinstimmen, in der Art, dass je zwei Werthe w', w'', welche eine und dieselbe Function w in diesen beiden Systemen annimmt, auch einem und demselben Intervall angehören. Wird nun das System der r Werthe w' durch die Coordinaten h'_ι, ferner das System der r Werthe w'' durch die Coordinaten h''_ι hervorgebracht, so entspricht den Coordinaten $h_\iota = h'_\iota - h''_\iota$ ein System von

r Werthen $w = w' - w''$, welche absolut den Werth d nicht übersteigen. Für diese ganzen Coordinaten h_ι, welche absolut $\leqq k$ sind und nicht sämmtlich verschwinden, wird daher in der *ersten* Reihe

$$M(\omega) \leqq d\sqrt{2} < 3\,c k^{1-\frac{n}{r}}.$$

Ist ferner P das Product aus den r Werthen ω der ersten Reihe, und $N(\omega) = PQ$, so ergiebt sich $M(P) < (3\,c)^r k^{r-n}$, $M(Q) \leqq (ck)^{n-r}$, mithin absolut

$$N(\omega) < (3\,c)^n.$$

Da endlich $N(\omega)$ eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl ist, so wird $M(PQ) = M(P)\,M(Q) \geqq 1$, also $M(Q) > (3\,c)^{-r} k^{n-r}$; ist nun ω eine der $(n-r)$ Functionen der zweiten Reihe, und $Q = \omega\theta$, so ist $M(\theta) \leqq (ck)^{n-r-1}$, und folglich wird in der *zweiten* Reihe

$$M(\omega) > (3\,c)^{1-n} k.$$

Offenbar kann nun, wie klein auch a, und wie gross auch b sein mag, k stets so gross gewählt werden, dass $M(\omega)$ in der ersten Reihe $< a$, in der zweiten $> b$ ausfällt, während $N(\omega)$ absolut $< (3\,c)^n$ wird; was zu beweisen war.

4. Aus dem soeben bewiesenen Satze ergiebt sich, indem man dieselbe Eintheilung in zwei Reihen beibehält, dass man eine nie abreissende Kette von aufeinander folgenden, von Null verschiedenen Zahlen ω in $\mathfrak{o}$ aufstellen kann, deren Normen $< (3\,c)^n$ sind, und welche ausserdem noch die zweite Eigenschaft besitzen, dass $M(\omega)$ in der ersten Reihe kleiner, in der zweiten grösser ausfällt, als die Moduln aller *vorhergehenden* Zahlen ω und der mit ihnen conjugirten Zahlen; denn bezeichnet man mit a den kleinsten, mit b den grössten unter allen Moduln der schon gebildeten Zahlen ω und der mit ihnen conjugirten Zahlen, so giebt es zufolge des bewiesenen Satzes immer noch eine Zahl ω der Art, dass $M(\omega)$ in der ersten Reihe $< a$, in der zweiten $> b$ ausfällt, während $N(\omega)$ absolut genommen ebenfalls $< (3\,c)^n$ wird; diese neue Zahl ω ist daher auch von Null und von allen vorhergehenden Zahlen ω verschieden. Wir theilen nun die Zahlen ω dieser Kette in Gruppen ein, indem wir zwei von ihnen stets und nur dann in dieselbe Gruppe aufnehmen, wenn sie dieselbe Norm m besitzen, und wenn ausserdem die Coordinaten ihrer Differenz sämmtlich durch m theilbar sind; da nun die hier auftretenden Normen m ganze rationale Zahlen

und absolut $<(3c)^n$ sind, und da die Coordinaten einer Zahl ω hinsichtlich ihrer Reste (mod. m) höchstens $(\pm m)^n$ verschiedene Fälle darbieten können, so kann in dieser Kette von Zahlen ω auch nur eine *endliche* Anzahl verschiedener Gruppen auftreten, und folglich muss bei hinreichender Fortsetzung der nie abbrechenden Kette eine Zahl β in ihr erscheinen, welche mit einer früheren Zahl α in dieselbe Gruppe fällt. Dann ist also $N(\alpha) = N(\beta) = \beta\beta' = m$, und $\alpha = \beta + m\gamma = \beta(1 + \gamma\beta') = \beta\varepsilon$, wo β' (zufolge 1.) und γ, folglich auch $\varepsilon = 1 + \gamma\beta'$ Zahlen in $\mathfrak{o}$ bedeuten; zugleich ergiebt sich, da $N(\alpha) = N(\beta) = N(\beta\varepsilon)$ von Null verschieden ist, $N(\varepsilon) = 1$, und aus $M(\alpha) = M(\beta)M(\varepsilon)$ folgt, dass $M(\varepsilon)$ in der ersten Reihe >1, in der zweiten <1 ist. Versteht man unter einer *Einheit* im Folgenden stets eine Zahl in $\mathfrak{o}$, deren Norm $= +1$ ist, so haben wir daher folgendes Resultat gewonnen:

Es giebt eine Einheit von der Art, dass die Moduln der mit ihr conjugirten Zahlen in der ersten Reihe >1, *in der zweiten* <1 *sind.*

5. Multiplicirt man je zwei zusammengehörige imaginäre Functionen $\omega = u \pm vi$ mit einander, so bilden diese $(n-\nu)$ Producte (u^2+v^2) und die $(2\nu - n)$ reellen Functionen ω ein System von ν reellen, theils quadratischen, theils linearen Functionen f', $f'' \dots f^{(\nu)}$ der Coordinaten; nennt man die *reellen* Bestandtheile ihrer Logarithmen kurz die (conjugirten) *Logarithmen von* ω, so kann man das eben erhaltene Resultat auch so aussprechen:

Theilt man die ν *Functionen* f *nach Belieben in zwei Reihen, doch so, dass jede dieser Reihen wenigstens eine Function enthält, so existirt stets eine Einheit* ε, *deren Logarithmen* $e', e'' \dots e^{(\nu)}$ *positiv oder negativ sind, je nachdem sie der ersten oder der zweiten Reihe entsprechen.*

Da die Summe der Logarithmen einer Zahl ω gleich dem reellen Bestandtheile des Logarithmen von $N(\omega)$ ist, so ist die Summe der Logarithmen $e', e'' \dots e^{(\nu)}$ einer Einheit ε stets $= 0$; hat man daher ν beliebige Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_\nu$, so ist die aus den zugehörigen ν^2 Logarithmen gebildete Determinante

$$\Sigma \pm e_1' e_2'' \dots e_\nu^{(\nu)} = 0;$$

lässt man aber einen dieser Logarithmen, z. B. den letzten $e^{(\nu)}$, welcher der Function $f^{(\nu)}$ entspricht, stets weg, so gilt folgender Fundamentalsatz:

Es giebt immer ein System S von $(\nu - 1)$ unabhängigen, d. h. solchen Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\nu-1}$, dass die aus ihren Logarithmen gebildete Determinante

$$L = \Sigma \pm e'_1 e''_2 \ldots e^{(\nu-1)}_{\nu-1}$$

einen positiven, also von Null verschiedenen Werth besitzt.

Ist nämlich $\nu = 2$, so folgt aus dem obigen Satze, wenn man f' in die erste, f'' in die zweite Reihe aufnimmt, die Existenz einer Einheit ε, für welche der Logarithme e' positiv ausfällt (hiermit ist für den nicht ausgeschlossenen Fall $n = 2$ die Theorie der Einheiten im Wesentlichen absolvirt; vergl. §. 142). Ist aber $\nu > 2$ und $m < \nu$, und hat man schon $m - 1$ Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1}$ aufgestellt, für welche die Determinante

$$\Sigma \pm e'_1 e''_2 \ldots e^{(m-1)}_{m-1}$$

einen positiven Werth $E^{(m)}$ hat, so kann man mit Hülfe desselben Satzes die Existenz einer Einheit ε_m beweisen, für welche auch die Determinante

$$\Sigma \pm e'_1 e''_2 \ldots e^{(m-1)}_{m-1} e^{(m)}_m$$

positiv ausfällt; ordnet man dieselbe nach den Logarithmen e'_m, $e''_m \ldots e^{(m)}_m$ der neuen Einheit ε_m, so nimmt sie die Form

$$E' e'_m + E'' e''_m + \cdots + E^{(m-1)} e^{(m-1)}_m + E^{(m)} e^{(m)}_m$$

an, wo $E^{(m)}$ der Annahme zufolge positiv ist, während die übrigen aus den Logarithmen von $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1}$ gebildeten Determinanten $E', E'' \ldots E^{(m-1)}$ positiv, negativ oder auch $= 0$ sein können. Nimmt man nun von den Functionen $f', f'' \ldots f^{(m)}$ alle diejenigen in die erste Reihe auf, denen positive Werthe $E', E'' \ldots E^{(m)}$ entsprechen, also jedenfalls die Function $f^{(m)}$, während die übrigen und die Functionen $f^{(m+1)} \ldots f^{(\nu)}$, also jedenfalls $f^{(\nu)}$ in die zweite Reihe fallen, so existirt zufolge des obigen Satzes eine Einheit ε_m, deren Logarithmen $e'_m, e''_m \ldots e^{(\nu)}_m$ positiv oder negativ ausfallen, je nachdem sie der ersten oder zweiten Reihe entsprechen; mithin enthält das obige Aggregat mindestens ein positives Glied $E^{(m)} e^{(m)}_m$, und die übrigen Glieder sind nicht negativ, so dass das Aggregat selbst einen positiven Werth erhält, was zu beweisen war. Auf diese Weise kann man offenbar von $m = 2$ bis $m = \nu - 1$ fortschliessen, und erhält zuletzt das in dem Satze ausgesprochene Resultat.

6. Behält man die bisherigen Bezeichnungen bei, und lässt man $m_1, m_2 \ldots m_{\nu-1}$ alle ganzen rationalen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so bilden die entsprechenden Zahlen

$$\eta = \varepsilon_1^{m_1} \varepsilon_2^{m_2} \ldots \varepsilon_{\nu-1}^{m_{\nu-1}}$$

eine Gruppe (S) von unendlich vielen Einheiten, welche sich durch Multiplication und Division reproduciren.

Es fragt sich nun, ob ausser diesen Einheiten η noch andere existiren. Ist ε eine beliebige Einheit, deren Logarithmen e', $e'' \ldots e^{(\nu)}$ sind, so giebt es, weil die Determinante L von Null verschieden ist, stets ein und nur ein System reeller Grössen x_1, $x_2 \ldots x_{\nu-1}$, welche den ν Gleichungen

$$\begin{gathered} e'_1 x_1 + e'_2 x_2 + \cdots + e'_{\nu-1} x_{\nu-1} = e' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{(\nu)}_1 x_1 + e^{(\nu)}_2 x_2 + \cdots + e^{(\nu)}_{\nu-1} x_{\nu-1} = e^{(\nu)} \end{gathered}$$

genügen, deren letzte eine Folge der übrigen ist; wir nennen diese Werthe $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ kurz die *Exponenten* der Einheit ε in Bezug auf das System S der $(\nu - 1)$ unabhängigen Einheiten ε_1, $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\nu-1}$; die Exponenten eines Productes entstehen offenbar durch Addition der entsprechenden Exponenten der Factoren, und die Exponenten einer Einheit η aus der Gruppe (S) sind ganze rationale Zahlen $m_1, m_2 \ldots m_{\nu-1}$. Sind die Exponenten einer Einheit ε sämmtlich < 1 und nicht negativ, so soll ε eine in Bezug auf S *reducirte* Einheit heissen. Zunächst leuchtet ein, dass es nur eine *endliche* Anzahl solcher reducirten Einheiten giebt; lässt man nämlich in den vorstehenden linearen Ausdrücken linker Hand die Grössen $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ alle reellen Werthe zwischen 0 und 1 durchlaufen, so bleiben die Werthe dieser linearen Ausdrücke absolut kleiner als eine von den Coefficienten, d. h. von dem System S abhängige endliche Constante; dasselbe gilt daher von den Logarithmen $e', e'' \ldots e^{(\nu)}$ einer reducirten Einheit ε, und folglich sind auch die Moduln aller mit ε conjugirten Zahlen kleiner als eine von S abhängige Constante, woraus (mit Rücksicht auf 2.) die Richtigkeit der obigen Behauptung sich unmittelbar ergiebt.

Jede beliebige Einheit ε lässt sich stets und nur auf einzige Art als ein Product aus einer reducirten Einheit ϱ und einer Einheit η aus der Gruppe (S) darstellen. Soll nämlich $\varepsilon = \varrho\eta$, also $\varepsilon\eta^{-1} = \varrho$ eine reducirte Einheit sein, so müssen, wenn x_1, $x_2 \ldots x_{\nu-1}$ die Exponenten von ε bedeuten, die Exponenten m_1,

$m_2 \ldots m_{\nu-1}$ der der Gruppe (S) angehörigen Einheit η solche ganze rationale Zahlen sein, dass die Exponenten von ϱ, also die Zahlen $x_1 - m_1, x_2 - m_2 \ldots x_{\nu-1} - m_{\nu-1}$ sämmtlich < 1 und nicht negativ werden; dies kann immer und nur dadurch erreicht werden, dass man für $m_1, m_2 \ldots m_{\nu-1}$ resp. die grössten in den reellen Werthen $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ enthaltenen ganzen rationalen Zahlen wählt (vergl. §§. 43, 44); also ist η und folglich auch ϱ vollständig bestimmt.

Ist r die Anzahl aller von einander verschiedenen reducirten Einheiten ϱ (unter denen sich auch die Zahl 1 befindet), und ε irgend eine Einheit, so ist ε^r eine der Gruppe (S) angehörige Einheit; durchläuft nämlich ϱ alle reducirten Einheiten, so ist jedes der r Producte $\varepsilon\varrho$ von der Form $\sigma\eta$, wo σ eine reducirte Einheit, η eine Einheit aus der Gruppe (S) bedeutet, und σ muss ebenfalls alle r reducirten Einheiten durchlaufen, weil aus $\varepsilon\varrho = \sigma\eta$ und $\varepsilon\varrho' = \sigma\eta'$ auch die Gleichung $\varrho'\eta = \varrho\eta'$ folgen würde, welche, wie oben gezeigt ist, nur dann bestehen kann, wenn $\varrho = \varrho'$ ist; multiplicirt man nun die r Gleichungen von der Form $\varepsilon\varrho = \sigma\eta$, und dividirt durch das Product der r reducirten Einheiten ϱ oder σ, so folgt, dass ε^r ein Product aus r Einheiten der Gruppe (S), mithin selbst eine Einheit dieser Gruppe ist.

Die Exponenten von ε^r sind daher immer ganze rationale Zahlen $m_1, m_2 \ldots m_{\nu-1}$, und folglich sind die Exponenten einer jeden Einheit ε stets *rationale* Zahlen mit dem gemeinschaftlichen Nenner r. Sind nun $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_{\nu-1}$ beliebige Einheiten, deren Logarithmen mit d bezeichnet werden, so folgt, dass die ihnen entsprechende Determinante

$$= \Sigma \pm d'_1 d''_2 \ldots d^{(\nu-1)}_{\nu-1} = \frac{mL}{r^{\nu-1}}$$

ist, wo m die aus den $(\nu - 1)^2$ Exponenten der Einheiten δ_1^r, $\delta_2^r \ldots \delta_{\nu-1}^r$ gebildete Determinante, also eine *ganze* rationale Zahl bedeutet, welche von Null verschieden ist, wenn $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_{\nu-1}$ ebenfalls ein System von unabhängigen Einheiten bilden. Hieraus ergiebt sich die wichtige Folgerung, dass es unter allen Systemen von $(\nu - 1)$ unabhängigen Einheiten ein solches geben muss, für welches die entsprechende Determinante absolut genommen einen *Minimalwerth* annimmt; denn unter allen hier auftretenden ganzen rationalen, von Null verschiedenen Zahlen m muss es eine absolut kleinste geben. Ein solches System von $(\nu - 1)$ unabhängigen Einheiten soll ein *Fundamentalsystem* heissen.

7. Wir wollen nun annehmen, das obige System S der $(\nu-1)$ unabhängigen Einheiten sei ein solches Fundamentalsystem, also L der eben erwähnte Minimalwerth, so folgt zunächst, dass die Exponenten $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ einer jeden in Bezug auf S reducirten Einheit ε sämmtlich $= 0$ sind; wäre nämlich z. B. x_1 von Null verschieden, also positiv und < 1, so wäre die den $(\nu-1)$ Einheiten $\varepsilon, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\nu-1}$ entsprechende Determinante

$$\Sigma \pm e' e_2'' \ldots e_{\nu-1}^{(\nu-1)} = L x_1$$

von Null verschieden und absolut kleiner als L, was mit unserer Annahme streitet. Da ferner die Exponenten eines Productes zweier Einheiten durch Addition der entsprechenden Exponenten der beiden Factoren entstehen, so sind die Exponenten eines jeden Productes $\varrho\varrho' = \varrho''$ aus zwei reducirten Einheiten ϱ, ϱ' sämmtlich $= 0$, d. h. ein solches Product ist wieder eine reducirte Einheit. Hieraus folgt unmittelbar, dass die sämmtlichen r reducirten Einheiten ϱ die Wurzeln der Gleichung $\varrho^r = 1$ sind; durchläuft nämlich ϱ' alle reducirten Einheiten, so gilt dasselbe von $\varrho'' = \varrho\varrho'$; multiplicirt man diese r Gleichungen, und dividirt durch das Product aller reducirten Einheiten ϱ' oder ϱ'', so folgt $\varrho^r = 1$. Da endlich schon (in 6.) gezeigt ist, dass jede Einheit ε von der Form $\varrho\eta$ ist, wo ϱ eine reducirte, und η eine Einheit aus der Gruppe (S) bedeutet, so haben wir hiermit den folgenden grossen Satz von *Dirichlet* bewiesen:

Bezeichnet ν die Gesammtanzahl der reellen und imaginären Paare unter den mit Ω conjugirten Körpern, so giebt es in jeder Ordnung $\mathfrak{o}$ immer $(\nu-1)$ Fundamentaleinheiten von solcher Beschaffenheit, dass, wenn man dieselben beliebig oft in einander multiplicirt und dividirt und dem so gebildeten allgemeinen Product gewisse besondere Einheiten ϱ in endlicher Anzahl einzeln als Factor zugesellt, alle Einheiten dieser Ordnung und zwar jede nur einmal dargestellt werden; ist r die Anzahl dieser besonderen Einheiten ϱ, so sind sie die Wurzeln der Gleichung $\varrho^r = 1$.