§. 167.

Der eben bewiesene Satz bildet neben der Theorie der Ideale (§. 163) die wichtigste Grundlage für das tiefere Studium der ganzen Zahlen des Körpers Ω, und er ist unentbehrlich für die wirkliche Bestimmung der Anzahl der Idealclassen nach Dirichlet'schen Principien. Diese geschieht dadurch, dass der Grenzwerth der über alle Ideale $\mathfrak{a}$ ausgedehnten Summe

$$\sum \frac{s-1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

für unendlich kleine positive Werthe von $(s-1)$ auf doppelte Weise ermittelt wird. Einmal muss das System aller Idealnormen $N(\mathfrak{a})$ genau definirt werden, d. h. es muss von jeder positiven ganzen rationalen Zahl m festgestellt werden, wie gross die Anzahl $\tau(m)$ der verschiedenen Ideale $\mathfrak{a}$ ist, deren Norm $= m$; die Beantwortung dieser Frage fällt der Theorie der Ideale zu. Die Summe nimmt dann die Form

$$(s-1) \sum \frac{\tau(m)}{m^s}$$

an, wo m alle positiven ganzen rationalen Zahlen durchlaufen muss*).

Das andere Mal theilt man die obige Summe in Partialsummen ein, deren jede alle die Glieder enthält, welche den sämmtlichen Idealen $\mathfrak{a}$ einer und derselben Classe entsprechen, und es sind bei

*) Hierbei zeigt sich, dass $\tau(mm') = \tau(m)\,\tau(m')$ ist, wenn m, m' relative Primzahlen sind; mithin ist $\tau(m)$ vollständig bekannt, wenn für jede rationale Primzahl p die Zerlegung von $\mathfrak{i}(p)$ in Primideale bekannt ist; die Primzahlen p zerfallen hiernach in eine endliche Anzahl verschiedener Arten, in der Weise, dass für alle Primzahlen p gleicher Art die Bestimmung von $\tau(p^e)$ nach derselben Regel geschieht. Die obige Summe lässt sich daher gewissen Umformungen unterwerfen, welche für *alle* Körper gültig sind; am einfachsten gestalten sich dieselben für Galois'sche Körper.

der weiteren Untersuchung hauptsächlich folgende Momente zu berücksichtigen.

Nimmt man, falls in Ω keine Einheit von der Norm -1 existirt, ein Ideal $\mathfrak{i}(\omega)$ nur dann in die Hauptclasse E auf, wenn $H = N(\omega)$ *positiv* ist, so braucht man nur alle ganzen Zahlen ω von positiver Norm zu betrachten, und es wird, wenn α eine bestimmte solche Zahl bedeutet, $\mathfrak{i}(\omega)$ stets und nur dann mit $\mathfrak{i}(\alpha)$ identisch sein, wenn $\omega = \varepsilon\alpha$, und ε eine Einheit von positiver Norm ist. Abgesehen von dem Falle eines quadratischen imaginären Körpers wird daher jedes Ideal der Hauptclasse unendlich oft auftreten, und es kommt darauf an, ω solchen Bedingungen zu unterwerfen, dass jedes Ideal $\mathfrak{i}(\omega)$ nur einmal oder wenigstens nicht unendlich oft erscheint (vergl. §. 87). Behalten wir die Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen bei, indem wir annehmen, dass die Ordnung $\mathfrak{o}$ alle ganzen Zahlen des Körpers umfasst, so kann dies in folgender Weise erreicht werden.

Dividirt man jede der ν Functionen $f', f'' \ldots f^{(\nu)}$, je nachdem sie linear oder quadratisch ist, durch $\sqrt[n]{H}$ oder durch $\sqrt[n]{H^2}$, und bezeichnet man mit $l', l'' \ldots l^{(\nu)}$ die reellen Bestandtheile der Logarithmen dieser ν Quotienten, so ist $l' + l'' + \cdots + l^{(\nu)} = 0$, und es giebt stets ein und nur ein System von reellen Grössen $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$, welche den Gleichungen

$$e'_1 x_1 + e'_2 x_2 + \cdots + e'_{\nu-1} x_{\nu-1} = l'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e^{(\nu)}_1 x_1 + e^{(\nu)}_2 x_2 + \cdots + e^{(\nu)}_{\nu-1} x_{\nu-1} = l^{(\nu)}$$

genügen; nennen wir sie kurz die *Exponenten von* ω (vergl. §. 166,6.), so leuchtet ein, dass die Exponenten eines Productes durch Addition der entsprechenden Exponenten der Factoren entstehen. Nennt man ferner ω eine *reducirte* Zahl, wenn ihre Exponenten sämmtlich < 1 und nicht negativ sind, und lässt man ε zunächst nur alle Einheiten η durchlaufen, welche der Gruppe (S) angehören, während α eine gegebene ganze Zahl bedeutet, so ergiebt sich, dass unter allen Producten $\omega = \eta\alpha$ eine und nur eine reducirte ganze Zahl, und folglich unter allen Producten $\omega = \varepsilon\alpha$ genau r reducirte ganze Zahlen ω existiren, wenn r wieder die Anzahl der in Bezug auf S reducirten Einheiten bedeutet. Mithin ist die auf die Hauptclasse E bezügliche Partialsumme gleich

$$\frac{s-1}{r} \sum \frac{1}{N(\omega)^s} = \frac{s-1}{r} \sum \frac{1}{H^s},$$

wo ω alle reducirten ganzen Zahlen durchlaufen muss, d. h. alle ganzen Zahlen $\omega = \Sigma h_\iota \omega_\iota$ von positiver Norm H, deren Exponenten den Bedingungen

$$0 \leqq x_1 < 1, \ 0 \leqq x_2 < 1 \ldots 0 \leqq x_{\nu-1} < 1$$

genügen.

Zur Bestimmung des Grenzwerthes g dieser Partialsumme für unendlich kleine positive Werthe von $(s-1)$ dienen nun die von *Dirichlet* aufgestellten Principien. Bedeutet t eine über alle Grenzen wachsende positive Grösse, T die Anzahl der hier auftretenden Normen H, welche nicht grösser als t sind, und nähert sich der Quotient $T:t$ einem endlichen Grenzwerth k, so ist (§. 118)

$$g = \frac{k}{r}.$$

Um ferner den Grenzwerth k des Quotienten $T:t$ zu ermitteln, muss der von *Dirichlet* benutzte geometrische Satz (§. 120) zu dem folgenden Princip erhoben werden, welches seinen unmittelbaren Grund in dem Begriff eines vielfachen bestimmten Integrals findet: Durchlaufen die n *stetigen*, reellen Variabeln h_ι ein endliches Gebiet G von n Dimensionen, und bedeutet T', wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse ist, die Anzahl derjenigen dem Gebiete G angehörigen Werthsysteme der Variabeln h_ι, für welche die n Quotienten $h_\iota : \delta$ *ganze rationale* Zahlen werden, so wird für unendlich kleine Werthe von δ

$$\lim (T' \delta^n) = \int dh_1 \, dh_2 \ldots dh_n,$$

wo das $n$fache Integral über das Gebiet G auszudehnen ist. Definirt man nun das Gebiet G durch die obigen Bedingungen für die Exponenten $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ von $\omega = \Sigma h_\iota \omega_\iota$ und durch die Bedingung

$$0 < H \leqq 1,$$

und bedenkt, dass die Exponenten von ω nur von den *Verhältnissen* der Variabeln h_ι abhängen, während H eine homogene Function $n$ten Grades ist, so leuchtet unmittelbar ein, dass T' durchaus identisch mit T ist, sobald

$$\delta = \frac{1}{\sqrt[n]{t}}$$

genommen wird; denn wenn die ganzen rationalen Zahlen h_ι durch $h_\iota \sqrt[n]{t} = h_\iota : \delta$ ersetzt werden, so geht die durch T reducirte ganze

Zahlen ω erfüllte Bedingung $0 < H \leqq t$ in $0 < H \leqq 1$ über, während die Bedingungen für die Exponenten ungeändert bleiben. Da zugleich $T'\delta^n = T:t$ ist, so ergiebt sich also, dass der Grenzwerth der auf die Hauptclasse E bezüglichen Partialsumme

$$g = \frac{1}{r}\int dh_1\, dh_2 \ldots dh_n$$

ist.

Um den Werth dieses Integrals zu erhalten, führe man als neue unabhängige Variabele H, $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ und die zwischen den Grenzen 0 und 2π liegenden Winkel $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-\nu}$ ein, welche den $(n-\nu)$ mit ω conjugirten imaginären Paaren $u \pm vi$ in der Weise entsprechen, dass

$$u + vi = \sqrt{f}\,.\, e^{\varphi i}, \quad f = u^2 + v^2$$

wird. Jedem System der ursprünglichen Variabeln h_ι entspricht ein und nur ein System der neuen Variabeln; umgekehrt aber entsprechen jedem System der neuen Variabeln, wenn H positiv genommen wird, $2^{2\nu-n-1}$ verschiedene Systeme der alten Variabeln h_ι; denn durch die Werthe von H, $x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}$ werden nur die absoluten Werthe der $(2\nu - n)$ reellen mit ω conjugirten Functionen bestimmt, und da ihr Product positiv sein muss, so kann man ihnen, mit Ausnahme einer, sowohl das positive wie das negative Vorzeichen geben; nur in dem Falle $n = 2\nu$, wenn gar kein reeller Körper mit Ω conjugirt ist, muss diese Anzahl $2^{2\nu-n-1}$ wieder durch 1 ersetzt werden. Geht man ferner von den ursprünglichen Variabeln h_ι successive zu den mit ω conjugirten oder den n Functionen w, von diesen zu $f', f'' \ldots f^{(\nu)}, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-\nu}$, von diesen zu den neuen Variabeln über, so findet man leicht, dass die entsprechende Functional-Determinante gleich

$$\frac{L}{i^{\nu-n}\sqrt{\Delta(\Omega)}} = \frac{\Sigma \pm e_1' e_2'' \ldots e_{\nu-1}^{(\nu-1)}}{i^{\nu-n}\sqrt{\Delta(\Omega)}}$$

ist; mithin ist der auf die Hauptclasse E bezügliche Grenzwerth g gleich

$$\frac{2^{\nu-1}\pi^{n-\nu} L}{r i^{\nu-n}\sqrt{\Delta(\Omega)}},$$

oder doppelt so gross, falls $n = 2\nu$ ist (wenn zugleich $n = 2$ ist, so ist $L = 1$ zu setzen, und r bedeutet die Anzahl aller Einheiten).

An dieses Resultat knüpfen wir zunächst folgende Bemerkung. Nimmt man in die erste Partialsumme nicht alle Ideale der Hauptclasse E, sondern nur diejenigen Ideale $\mathfrak{e}$ auf, welche zugleich durch ein bestimmtes Ideal $\mathfrak{m}$ theilbar sind, so treten an die Stelle der Basiszahlen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ von $\mathfrak{o}$ die Basiszahlen $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ dieses Ideals $\mathfrak{m}$, während alles Uebrige unverändert bleibt; mithin ist $\varDelta(\Omega)$ durch

$$\varDelta(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n) = N(\mathfrak{m})^2 \varDelta(\Omega)$$

zu ersetzen, und der Grenzwerth dieser auf alle Ideale $\mathfrak{e}$ bezüglichen Summe ist $= g : N(\mathfrak{m})$.

Durchläuft nun $\mathfrak{a}$ alle Ideale einer beliebigen Classe A, so giebt es ein Ideal $\mathfrak{m}$ der Art, dass alle Producte $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ Ideale der Hauptclasse E werden, und da umgekehrt, wenn $\mathfrak{e}$ ein durch $\mathfrak{m}$ theilbares Ideal $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ der Hauptclasse E ist, $\mathfrak{a}$ gewiss der Classe A angehört, so ist

$$\Sigma \frac{s-1}{N(\mathfrak{a})^s} = N(\mathfrak{m})^s \, \Sigma \frac{s-1}{N(\mathfrak{e})^s},$$

und folglich

$$\lim \Sigma \frac{s-1}{N(\mathfrak{a})^s} = g,$$

d. h. jede auf eine bestimmte Idealclasse bezügliche Partialsumme nähert sich demselben Grenzwerthe g. Bezeichnet man daher mit $h(\Omega)$ die *Anzahl* aller dieser Idealclassen, so ist der Grenzwerth der Totalsumme gleich $gh(\Omega)$, und folglich ist

$$h(\Omega) = \frac{r i^{\nu - n} \sqrt{\varDelta(\Omega)}}{2^{\nu-1} \pi^{n-\nu} L} \lim \Sigma \frac{(s-1)\tau(m)}{m^s}$$

oder halb so gross, wenn $n = 2\nu$ ist. Die Bestimmung der Classenanzahl ist hiermit auf die von der Theorie der Ideale zu leistende Bestimmung der Function $\tau(m)$ zurückgeführt*).

---

*) Für die aus der Kreistheilung entspringenden Körper führt dieselbe, wie *Kummer* gezeigt hat, zu den Reihen, welche in dem Dirichlet'schen Beweise des Satzes über die arithmetische Progression (Supplement VI) auftreten; vergl. die Anm. zu §. 163, 3.