

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0188

LOG Titel: S. 169. Moduln in quadratischen Körpern

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

$$\lim \sum \frac{s-1}{N(\alpha)^s} = \frac{1}{1 - \frac{(D, 2)}{2}} \cdot \lim \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

wo n alle relativen Primzahlen zu $2D$ durchläuft. Substituirt man dies in den allgemeinen Ausdruck des vorigen Paragraphen für die Anzahl der Idealclassen, so findet man, dass dieselbe vollständig übereinstimmt mit der Classenzahl der (positiven) ursprünglichen Formen der Determinante D , und zwar der zweiten Art, wenn $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist; der Grund für diese Uebereinstimmung liegt, wie man leicht erkennt, darin, dass jede Formenklasse nur einer einzigen Idealclass entspricht (vergl. §. 165, 2.).

§. 169.

Sind α, β zwei von einander unabhängige ganze Zahlen eines quadratischen Körpers Ω , und durchlaufen die Variablen x, y alle ganzen rationalen Zahlen, so bilden die Zahlen

$$\mu = x\alpha + y\beta \quad (1)$$

einen aus lauter ganzen Zahlen bestehenden Modul m (§. 161); umgekehrt, wenn ein Modul m aus ganzen Zahlen μ des Körpers Ω besteht und zwei von einander unabhängige Zahlen enthält, so sind alle Zahlen μ von der Form (1), wo α, β zwei particuläre Zahlen des Moduls bedeuten; bilden die Zahlen ω_1, ω_2 eine bestimmte Grundreihe des Körpers Ω , so kann man die Basiszahlen

$$\alpha = p_1\omega_1 + p_2\omega_2, \quad \beta = q_1\omega_1 + q_2\omega_2$$

immer so wählen, dass $(p_1q_2 - q_1p_2)$ positiv ausfällt, und dann mag α die erste, β die zweite Basiszahl des Moduls m heissen. Nun wird

$$N(\mu) = m(ax^2 + bxy + cy^2), \quad (2)$$

wo m den Theiler der quadratischen Form $N(\mu)$, also eine positive ganze rationale Zahl bedeutet, während a, b, c ganze rationale Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Setzt man

$$b^2 - 4ac = d, \quad (3)$$

und bezeichnet mit α_1, β_1 die resp. mit α, β conjugirten Zahlen, so ist

$$\alpha\alpha_1 = ma, \quad \alpha\beta_1 + \beta\alpha_1 = mb, \quad \beta\beta_1 = mc,$$

folglich die Discriminante

$$\Delta(\alpha, \beta) = dm^2. \quad (4)$$

Wählt man statt α, β irgend eine andere Basis desselben Moduls m , so leuchtet ein, dass die Zahlen m und d unverändert bleiben, und dass die entsprechenden ursprünglichen Formen $ax^2 + bxy + cy^2$ eine Formenklasse bilden; die Zahlen m und d können füglich die *Norm* und *Determinante des Moduls* m genannt werden. Ersetzt man die Variablen x und y resp. durch β und $-\alpha$, so ergibt sich

$$a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2 = 0, \quad b\beta - 2c\alpha = \beta \sqrt{d}. \quad (5)$$

Ist ausserdem

$$g = h\alpha + k\beta$$

die kleinste positive ganze rationale Zahl des Moduls m , so sind h, k relative Primzahlen, und wenn man

$$ah^2 + bhk + ck^2 = e$$

setzt, so ergibt sich $N(g) = g^2 = me$; mithin ist e positiv und geht in g^2 auf. Da α, β ganze Zahlen sind, so findet man ferner leicht, dass dg^2 durch e^2 theilbar sein muss; bedeutet daher f^2 das grösste in d und e aufgehende Quadrat, so muss fg durch e theilbar sein. Soll ferner m ein Ideal im weiteren Sinne des Wortes sein (§. 165, 4.), sollen also $\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2$ ebenfalls in m enthalten sein, so muss g durch e theilbar sein; doch werden wir im Folgenden von dieser Voraussetzung absehen.

Suchen wir nun die *Ordnung* n des Moduls m , d. h. das System aller Zahlen ν von der Art, dass jedes Product $\mu\nu$ in m enthalten ist (§. 165, 4.), so ist erforderlich und hinreichend, dass

$$\alpha\nu = x\alpha + y\beta, \quad \beta\nu = x'\alpha + y'\beta$$

wird, wo x, y, x', y' ganze rationale Zahlen bedeuten; hieraus folgt durch Elimination von ν

$$y\beta^2 - (y' - x)\alpha\beta - x'\alpha^2 = 0,$$

und hieraus durch Vergleichung mit (5)

$$y = az, \quad y' - x = bz, \quad -x' = cz,$$

wo z eine ganze rationale Zahl sein muss, weil a, b, c keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Mithin wird

$$\nu = x + \frac{\alpha\beta}{\alpha} z,$$