$$\lim \Sigma \frac{s-1}{N(\mathfrak{a})^s} = \frac{1}{1 - \frac{(\varDelta, 2)}{2}} \cdot \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

wo n alle relativen Primzahlen zu $2D$ durchläuft. Substituirt man dies in den allgemeinen Ausdruck des vorigen Paragraphen für die Anzahl der Idealclassen, so findet man, dass dieselbe vollständig übereinstimmt mit der Classenanzahl der (positiven) ursprünglichen Formen der Determinante D, und zwar der zweiten Art, wenn $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist; der Grund für diese Uebereinstimmung liegt, wie man leicht erkennt, darin, dass jede Formenclasse nur einer einzigen Idealclasse entspricht (vergl. §. 165, 2.).

§. 169.

Sind α, β zwei von einander unabhängige ganze Zahlen eines quadratischen Körpers Ω, und durchlaufen die Variabeln x, y alle ganzen rationalen Zahlen, so bilden die Zahlen

$$\mu = x\alpha + y\beta \tag{1}$$

einen aus lauter ganzen Zahlen bestehenden Modul $\mathfrak{m}$ (§. 161); umgekehrt, wenn ein Modul $\mathfrak{m}$ aus ganzen Zahlen μ des Körpers Ω besteht und zwei von einander unabhängige Zahlen enthält, so sind alle Zahlen μ von der Form (1), wo α, β zwei particuläre Zahlen des Moduls bedeuten; bilden die Zahlen ω_1, ω_2 eine bestimmte Grundreihe des Körpers Ω, so kann man die Basiszahlen

$$\alpha = p_1\omega_1 + p_2\omega_2, \quad \beta = q_1\omega_1 + q_2\omega_2$$

immer so wählen, dass $(p_1 q_2 - q_1 p_2)$ positiv ausfällt, und dann mag α die erste, β die zweite Basiszahl des Moduls $\mathfrak{m}$ heissen. Nun wird

$$N(\mu) = m(ax^2 + bxy + cy^2), \tag{2}$$

wo m den Theiler der quadratischen Form $N(\mu)$, also eine positive ganze rationale Zahl bedeutet, während a, b, c ganze rationale Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Setzt man

$$b^2 - 4ac = d, \tag{3}$$

und bezeichnet mit α_1, β_1 die resp. mit α, β conjugirten Zahlen, so ist

$$\alpha\alpha_1 = ma, \quad \alpha\beta_1 + \beta\alpha_1 = mb, \quad \beta\beta_1 = mc,$$

folglich die Discriminante

$$\Delta(\alpha, \beta) = dm^2. \tag{4}$$

Wählt man statt α, β irgend eine andere Basis desselben Moduls $\mathfrak{m}$, so leuchtet ein, dass die Zahlen m und d unverändert bleiben, und dass die entsprechenden ursprünglichen Formen $ax^2 + bxy + cy^2$ eine Formenclasse bilden; die Zahlen m und d können füglich die *Norm* und *Determinante des Moduls* $\mathfrak{m}$ genannt werden. Ersetzt man die Variabeln x und y resp. durch β und $-\alpha$, so ergiebt sich

$$a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2 = 0, \quad b\beta - 2c\alpha = \beta\sqrt{d}. \tag{5}$$

Ist ausserdem

$$g = h\alpha + k\beta$$

die kleinste positive ganze rationale Zahl des Moduls $\mathfrak{m}$, so sind h, k relative Primzahlen, und wenn man

$$ah^2 + bhk + ck^2 = e$$

setzt, so ergiebt sich $N(g) = g^2 = me$; mithin ist e positiv und geht in g^2 auf. Da α, β ganze Zahlen sind, so findet man ferner leicht, dass dg^2 durch e^2 theilbar sein muss; bedeutet daher f^2 das grösste in d und e aufgehende Quadrat, so muss fg durch e theilbar sein. Soll ferner $\mathfrak{m}$ ein Ideal im weiteren Sinne des Wortes sein (§. 165, 4.), sollen also α^2, $\alpha\beta$, β^2 ebenfalls in $\mathfrak{m}$ enthalten sein, so muss g durch e theilbar sein; doch werden wir im Folgenden von dieser Voraussetzung absehen.

Suchen wir nun die *Ordnung* $\mathfrak{n}$ des Moduls $\mathfrak{m}$, d. h. das System aller Zahlen ν von der Art, dass jedes Product $\mu\nu$ in $\mathfrak{m}$ enthalten ist (§. 165, 4.), so ist erforderlich und hinreichend, dass

$$\alpha\nu = x\alpha + y\beta, \quad \beta\nu = x'\alpha + y'\beta$$

wird, wo x, y, x', y' ganze rationale Zahlen bedeuten; hieraus folgt durch Elimination von ν

$$y\beta^2 - (y' - x)\alpha\beta - x'\alpha^2 = 0,$$

und hieraus durch Vergleichung mit (5)

$$y = az, \quad y' - x = bz, \quad -x' = cz,$$

wo z eine ganze rationale Zahl sein muss, weil a, b, c keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Mithin wird

$$\nu = x + \frac{a\beta}{\alpha} z,$$