NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

## Werk

**Titel:** Seminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

**Jahr:** 1984-1985

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN320141322_0014

**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN320141322_0014|LOG_0030


## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

# PROBLÈME DE WARING POUR LES BICARRÉS

par

Jean-Marc DESHOUILLERS (*)

-:-:-:-

A Francine

Je me propose de présenter ici les idées principales que j'ai développées entre septembre et décembre 1984. Ce travail a été amélioré ensuite en collaboration avec R. Balasubramanian et F. Dress ; c'est la raison pour laquelle certaines parties, notamment le paragraphe 4, inutilisées dans la version ultérieure ont été présentées dans leur forme la plus primitive.

Pour l'historique du problème de Waring pour les bicarrés, je prie le lecteur de se reporter aux Actes du Séminaire de Théorie Analytique des Nombres de Paris (cf. [Desh]).

L'énoncé suivant résume ce travail

THÉORÈME. - Tout entier $N$ supérieur à $10^{625}$ est somme de dix-neuf puissances quatrièmes.

---

(*) Ce travail a été partiellement subventionné par la bourse NSF-MCS-8108814 (AO3)

En affinant les méthodes du quatrième paragraphe, on peut remplacer la borne $10^{625}$ du Théorème par $10^{560}$ ; quoi qu'il en soit, il est douteux que les moyens de calcul actuels permettent en un temps raisonnable de montrer que tout entier inférieur à $10^{560}$ est somme de 19 bicarrés.

Avant d'aborder l'aspect technique, il me plait de souligner que l'on ne se lance pas seul dans une telle aventure : les encouragements de E. Bombieri, H. Halberstam, H. Maier, C. Stewart, G. Tenenbaum et W. Schmidt m'ont aidé à persévérer dans mon projet, et les conditions de travail à l'Institute for Advanced Study m'ont permis de le mener à terme : que chacun trouve ici sa part de ma reconnaissance.

## Plan



NIEDERS. STAATS- U. UNIV.-BIBLIOTHEK GÖTTINGEN

## §1. - Introduction

Nous recommandons au lecteur désireux d'avoir une vue d'ensemble sur la méthode du cercle les excellents traités [Dave] et [Vaug].

L'innovation majeure, par rapport aux travaux antérieurs ([Thom 1], [Thom 2], [Bala]) réside dans l'abandon de la version "Davenport" de la méthode du cercle au profit de la version "Hua". Du point de vue asymptotique, cette dernière est moins efficace puisqu'elle ne permet de démontrer que $G(4) \leq 17$, alors que Davenport a démontré que $G(4) = 16$ et même que tout entier assez grand congru à 1, 2, ... ou 14 modulo 16 est somme d'au plus 14 bicarrés. Pour des résultats effectifs, l'inconvénient de la méthode de Davenport est qu'elle repose sur l'évaluation du maximum de fonctions de diviseurs sur un intervalle. Certes, il en va de même pour la présentation classique de la méthode de Hua, mais, comme nous le verrons dans le paragraphe 3, on peut y remplacer le maximum par une valeur moyenne.

Un certain gain provient également de l'agrandissement des arcs majeurs, obtenu en suivant une idée de Vaughan ([Vaug]), particulièrement efficace pour les cubes. Dans le cas des bicarrés, cet accroissement a pour mérite de réduire la taille des dénominateurs des rationnels liés aux arcs mineurs ; il augmente l'efficacité de la méthode de Weyl, sans limiter la puissance du traitement des arcs majeurs.

Autre innovation : on choisit la parité des bicarrés qui vont représenter N, ce qui a le léger inconvénient de réduire le nombre moyen de représentations -intégrale singulière -, mais le gros avantage d'augmenter le facteur de la série singulière qui correspond au nombre premier 2.

Pour l'anecdote, on notera un aspect "ineffectif" dans la démonstration : la construction repose sur un nombre réel dont on montre seulement l'existence. En effet, une minoration de l'intégrale singulière est obtenue par un argument probabiliste ; on perd ainsi un facteur environ égal à 2, ce qui est sans importance, et on s'évite un travail de Romain (cf. les pages 51 à 88 de [Thom 1]).

Aux fins d'éventuelles citations, le texte qui suit est alourdi par une abondante numérotation des formules ; le rappel du numéro de la section dans l'indexation devrait permettre de se repérer dans le texte.

## § 2. - Contribution des arcs majeurs

Avec les notations définies ci-après, on a :

THÉORÈME 2. - Soit N un entier supérieur à $10^{300}$ ; on a

$$\int_{\mathfrak{M}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \geq 0{,}0065\, P^{15} .$$

### 2.0. - Notations - Dissection de Farey

Le symbole $\nu_o$ désigne un nombre réel de l'intervalle $[85\,,\,151]$, dont l'existence est affirmée dans le paragraphe 2.1.

On désigne par N un entier supérieur à $10^{300}$ ; les entiers s et t sont définis par

2.0.1. $\quad 4 \leq t \leq 19 \;,\quad N \equiv t \pmod{16} \;,\quad s+t = 19 \quad .$

On pose

2.0.2. $\quad P_o := (N/16\,\nu_o)^{\frac{1}{4}} \quad$ et $\quad P := [P_o] \quad .$

On appelle $\mathfrak{M}$ la partie de $[-\frac{975}{P^3}\,,\,1-\frac{975}{P^3}]$ constituée par la réunion des intervalles

2.0.3. $\quad \mathfrak{M}_{a,q} := [\frac{a}{q} - \frac{975}{q\,P^3}\,,\,\frac{a}{q} + \frac{975}{q\,P^3}] \;,$

pour $q \leq P^{\frac{1}{2}}\;,\quad 0 \leq a < q\;,\quad (a,q) = 1\;,$

et on vérifie que les arcs majeurs ainsi définis sont deux à deux disjoints.

On note $\mathfrak{m}$ le complémentaire de $\mathfrak{M}$ dans $[-\frac{975}{P^3}\,,\,1-\frac{975}{P^3}]$ .

Pour $\varepsilon \in \{0,1\}$ , on pose enfin

2.0.4. $\quad S_\varepsilon(\alpha) := \sum_{P-\frac{\varepsilon}{2} < x \leq 2P-\frac{\varepsilon}{2}} e(\alpha\,(2x+\varepsilon)^4)$

où $e(\alpha) := \exp(2\pi i\alpha)$ . Pour q entier, on notera $e_q(\alpha) = e(\alpha/q)$ .

## 2.1. - L'intégrale singulière

PROPOSITION 2.1. - Il existe un nombre réel $\nu_o \in [85, 151]$ tel que l'on ait

2.1.1. $K(\nu_o) \geq 0{,}01$ ,

où

2.1.2. $K(\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_1^2 e(\beta t^4)\,dt \right)^{19} e(-\beta\nu)\,d\beta$ .

Démonstration. - On considère une famille $(X_1, \dots, X_{19})$ de variables aléatoires indépendantes, uniformément réparties sur l'intervalle $[1, 2]$, et on note $Z$ la variable aléatoire

2.1.3. $Z = \sum_{i=1}^{19} X_i^4$ .

On a

2.1.4. $\mu := E(Z) = 19\ E(X_1^4) = 19 \int_1^2 x^4\,dx = \frac{19}{5}(2^5 - 1) = \frac{589}{5}$

2.1.5. $\sigma^2 := \sigma^2(Z) = 19\,\sigma^2(X_1^4) = 19\left(E(X_1^8) - E(X_1^4)^2\right) = 19\left(\frac{511}{9} - \frac{31^2}{25}\right) = \frac{78\ 394}{225}$ .

L'intégrale $\int_1^2 e(\beta t^4)\,dt$ représente la fonction caractéristique (transformée de Fourier de la loi) de $X_i$ ; $\left(\int_1^2 e(\beta t^4)\,dt\right)^{19}$ représente la fonction caractéristique de $Z$ et, par la transformation de Fourier inverse, $K(\nu)$ représente la densité de la loi de $Z$ au point $\nu$ . Par le théorème de Bienaymé-Čebyšev, on a donc

$$2\sqrt{3}\,\sigma \sup_{[\mu-\sqrt{3}\sigma,\ \mu+\sqrt{3}\sigma]} K(\nu) \geq \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} K(\nu)\,d\nu$$

$$= P\{ |Z-\mu| \leq \sqrt{3}\,\sigma \} \geq 1 - (\sqrt{3})^{-2} = \frac{2}{3} ,$$

d'où le résultat. ∎

## 2.2. - Les sommes de Gauss

Pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on majore le module des sommes

2.2.1. $G_\varepsilon(a, q ; \nu) := \sum_{h=0}^{q-1} e_q(a(2h+\varepsilon)^4 + \nu h)$

en utilisant les estimations numériques de Thomas ([Thom 1])

$$2.2.2. \qquad \left|\sum_{h=0}^{q-1} e_q(ah^4+bh)\right| \leq 4,5\ q^{3/4} \qquad \text{pour} \quad (a,q)=1\ .$$

PROPOSITION 2.2. - <u>Pour</u> $\nu \in \mathbb{Z}$, $q$ <u>entier positif</u>, $(a,q)=1$ <u>et</u> $\varepsilon \in \{0,1\}$, <u>on a</u>

$$2.2.3. \qquad |G_\varepsilon(a,q\,;\nu)| \leq 18\ q^{3/4}\ .$$

<u>Démonstration</u>. - i) On a

$$G_o(a,q\,;\nu) + e_{2q}(\nu)\ G_1(a,q\,;\nu)$$

$$= \sum_{h=0}^{2q-1} e_{2q}(2ah^4+\nu h)$$

$$= \sum_{h=0}^{q-1} \Big(e_{2q}(2ah^4+\nu h) + e_{2q}(2ah^4+\nu(h+q))\Big)$$

$$2.2.4. \qquad = \left(1+e\left(\tfrac{\nu}{2}\right)\right) \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ah^4+\nu h/2)\ .$$

Si $\nu$ est impair, on a donc

$$2.2.5. \qquad |G_1(a,q\,;\nu)| = |G_o(a,q\,;\nu)|$$

et si $\nu$ est pair, on pose $\nu = 2\nu'$ et on a

$$2.2.6. \qquad |G_1(a,q\,;\nu)| \leq 2\left|\sum_{h=0}^{q-1} e_q(ah^4+\nu' h)\right| + |G_o(a,q\,;\nu)|\ .$$

En considérant les relations 2.2.2, 2.2.5. et 2.2.6. on a pour tout $\nu$ :

$$2.2.7. \qquad |G_1(a,q\,;\nu)| \leq 9\ q^{3/4} + |G_o(a,q\,;\nu)|\ .$$

ii) Ecrivons $q = 2^m q'$, avec $2 \nmid q'$ ; on a

$$\sum_{h=0}^{q-1} e\left(\frac{a(2h)^4+\nu h}{q}\right) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{\ell=0}^{q'-1} e\left(\frac{2^4 a(2^m\ell+q'k)^4+\nu(2^m\ell+q'k)}{2^m q'}\right)$$

$$2.2.8. \qquad = \left(\sum_{k=0}^{2^m-1} e\left(\frac{a(2k)^4\ q'^3+\nu k}{2^m}\right)\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q'-1} e\left(\frac{a\,2^{3m+4}\,\ell^4+\nu\ell}{q'}\right)\right)\ .$$

En utilisant (2), on a donc

$$2.2.9. \qquad |G_o(a, 2^m q' ; \nu)| \leq 4,5 \; q'^{3/4} \, |G_o(aq'^3, 2^m ; \nu)| \; .$$

iii). Si $m \leq 4$, on a trivialement

$$2.2.10. \qquad |G_o(aq'^3, 2^m ; \nu)| \leq 2^m \leq 2.\,2^{3m/4} \; .$$

. Si $m \geq 5$, on pose $\nu = 2^n \nu'$ avec $2 \nmid \nu'$ et on distingue deux cas :

. $n < 4$ ; on a alors

$$2^{-n} G_o(aq'^3, 2^m ; \nu) = \sum_{k=0}^{2^{m-n}-1} e\left(\frac{aq'^3 \, 2^{4-n} k^4 + \nu' k}{2^{m-n}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{m-n-1}-1} e\left(\frac{aq'^3 \, 2^{4-n} k^4 + \nu' k}{2^{m-n}}\right) + \sum_{k=0}^{2^{m-n-1}-1} e\left(\frac{aq'^3 \, 2^{4-n} k^4 + \nu'(k+2^{m-n-1})}{2^{m-n}}\right)$$

$$2.2.11. \qquad = \left(1 + e\left(\frac{\nu'}{2}\right)\right) \sum_{k=0}^{2^{m-n-1}-1} e\left(\frac{aq'^3 \, 2^{4-n} k^4 + \nu' k}{2^{m-n}}\right) = 0$$

. $n \geq 4$, on a

$$|G_o(aq'^3, 2^m ; \nu)| = \sum_{k=0}^{2^m-1} e\left(\frac{aq'^3 k^4 + 2^{n-4} \nu' k}{2^{m-4}}\right)$$

$$2.2.12. \qquad = 16 \left| \sum_{k=0}^{2^{m-4}-1} e\left(\frac{aq'^3 k^4 + 2^{n-4} \nu' k}{2^{m-4}}\right) \right|$$

et par la majoration (2), on a

$$2.2.13. \qquad |G_o(aq'^3, 2^m ; \nu)| \leq 16 (2^{m-4})^{3/4} \leq 2.\,2^{3m/4} \; .$$

La proposition 2.2. résulte alors des relations 2.2.7, 2.2.9, 2.2.10 et 2.2.13. ∎

2.3. - La série singulière

On veut minorer la série singulière (réelle)

2.3.1. $$\mathfrak{S}(N) := \sum_{q=1}^{\infty} A(q, N) \quad ,$$

où

2.3.2. $$A(q,N) := \sum_{(a,q)=1} q^{-19} G_o^s(a,q\,;0)\; G_1^t(a,q\,;0)\; e_q(-aN) \quad .$$

PROPOSITION 2.3. - Pour tout $N$, la série $\mathfrak{S}(N)$ converge absolument, est réelle, et on a

2.3.3. $$\mathfrak{S}(N) \geq 11 \quad .$$

Avant d'aborder la démonstration de cette proposition, on commence par énoncer et démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.3. - Soit $M(q,N)$ le nombre de solutions de la congruence

2.3.4. $$(2x_1)^4 + \ldots + (2x_s)^4 + (2y_1+1)^4 + \ldots + (2y_t+1)^4 \equiv N \pmod{q}$$

où les $x_i$, $y_j$ sont définis modulo $q$. On a pour $n \geq 1$

2.3.5. $$1 + \sum_{h=1}^{n} A(p^h, N) = p^{-18n} M(p^n, N)$$

et donc

2.3.6. $$\chi(p,N) = \lim_{n\to\infty} p^{-18n} M(p^n, N) \quad \text{est réel, positif ou nul.}$$

Démonstration. - On a

2.3.7. $$M(q,N) = q^{-1} \sum_u \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_s} \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_t} e_q\Big(u((2x_1)^4 + \ldots + (2y_t+1)^4 - N)\Big)$$

on regroupe alors les termes en $u$ selon la valeur de $(u,q)$ ; il vient

$$M(q,N) = q^{-1} \sum_{q_1|q} \sum_{\substack{a=1\\(a,q_1)=1}} \sum_{x_1} \cdots \sum_{y_t} e_{q_1}\Big(a((2x_1)^4 + \ldots + (2y_t+1)^4 - N)\Big)$$

$$= q^{-1} \sum_{q_1|q} \sum_{(a,q_1)=1} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{19} G_o^s(a,q_1\,;0)\; G_1^t(a,q_1;0)\, e_{q_1}(-aN)$$

2.3.8. $$= q^{18} \sum_{q_1|q} A(q_1,N) \quad .$$

Pour $q = p^n$ , la relation 2.3.8. conduit à 2.3.5. La relation 2.3.6. est alors triviale, au vu de la convergence absolue de $\mathfrak{S}(N)$ . ∎

Démonstration de la proposition 2.3. - La convergence absolue de la série $\mathfrak{S}(N)$ provient de la proposition 2.2. En outre, on vérifie aisément - cela est classique - que la fonction $A(q,N)$ est multiplicative en $q$ ; on a donc

2.3.9. $\quad \mathfrak{S}(N) = \prod_p \chi(p,N)$

2.3.10. $\quad \chi(p,N) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} A(p^h, N)$ .

Pour calculer $\mathfrak{S}(N)$, on va utiliser les calculs de Thomas afin de minorer $\prod_{p>2} \chi(p,N)$ et on calculera directement $\chi(2,N)$ .

Si $q$ est impair, $M(q,N)$ est égal au nombre de solutions de la congruence

2.3.11. $\quad x_1^4 + \dots + x_{19}^4 \equiv N \pmod{q}$ ,

lequel vaut au moins $q^4$ fois le minimum sur $K$ du nombre de solutions de la congruence

2.3.12. $\quad x_1^4 + \dots + x_{15}^4 \equiv K \pmod{q}$ .

Par cet argument, le théorème 4.1. de Thomas ([Thom 1] p. 98) conduit à la minoration

2.3.13. $\quad \prod_{p>2} \chi(p,N) \geq 0,688$ .

Il nous reste à évaluer $\lim_{n \to \infty} 2^{-18n} M(2^n, N)$ .

Pour $n = 4$ , tout choix des $x_i$ et $y_j$ conduit à une solution de 2.3.4. (cela provient de (2.0.1.) et $(2x+\varepsilon)^4 \equiv \varepsilon \pmod{16}$), d'où

2.3.14. $\quad 2^{-18 \times 4} M(2^4, N) = 16$ .

Soit $n \geq 4$ et soient $x_1, \dots, x_s$ , $y_1, \dots, y_t$ des entiers satisfaisant

2.3.15. $\quad (2x_1)^4 + \dots + (2x_s)^4 + (2y_1+1)^4 + \dots + (2y_t+1)^4 \equiv N \pmod{2^n}$ .

Alors les entiers $x_1 + 2^{n-3}, \dots, x_s + 2^{n-3}$, $y_1 + 2^{n-3}, \dots, y_t + 2^{n-3}$ satisfont la même relation. Si l'on appelle $L(2^n, N)$ le nombre de familles $(x_1, \dots, y_t)$ d'entiers satisfaisant

2.3.16 $\quad 0 \le x_i < 2^{n-3} \quad , \quad 0 \le y_j < 2^{n-3}$

et 2.3.15, on a

2.3.17. $\quad M(2^n, N) = 2^{3\times 19}\, L(2^n, N)$

et on va calculer $L(2^n, N)$ par récurrence sur $n$.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t) \in \{0,1\}^{19}$ ; on a

2.3.18.
$$\bigl(2(x_1+\lambda_1 2^{n-3})\bigr)^4 + \dots + \bigl(2(y_t+\mu_t\, 2^{n-3})+1\bigr)^4$$
$$\equiv (2x_1)^4 + \dots + (2x_s)^4 + (2y_1+1)^4 + \dots + (2y_t+1)^4$$
$$+ 2^n \mu_1 (2y_1+1)^3 + \dots + 2^n \mu_t (2y_t+1)^3 \pmod{2^{n+1}} .$$

Puisque $t > 0$ et $(2y_t+1)$ est inversible modulo 2, à tout système $(\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_{t-1})$, on peut associer un $\mu_t$ unique dans $\{0,1\}$ tel que

2.3.19. $$\bigl(2(x_1+\lambda_1 2^{n-3})\bigr)^4 + \dots + \bigl(2(y_t+\mu_t\, 2^{n-3})+1\bigr)^4 \equiv N \pmod{2^{n-1}} .$$

On a donc, pour $n \ge 4$

2.3.20. $\quad L(2^{n+1}, N) = 2^{18}\, L(2^n, N)$ .

De 2.3.20. et 2.3.17, il résulte que l'on a, pour $n \ge 4$

2.3.21. $\quad M(2^{n+1}, N) = 2^{18}\, M(2^n, N)$

et de 2.3.21 et 2.3.14, il résulte que l'on a pour $n \ge 4$

2.3.22. $\quad \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-18n}\, M(2^n, N) = 16$ .

La proposition 2.3. provient des relations 2.3.6, 2.3.9, 2.3.13 et 2.3.22. ∎

2.4. - <u>Approximation de</u> $S_\varepsilon(\alpha)$

Sur l'intervalle $[\frac{a}{q}-\frac{975}{qP^3}, \frac{a}{q}+\frac{975}{qP^3}]$, on donne une approximation de $S_\varepsilon(\alpha)$ en fonctions des sommes de Gauss $G_\varepsilon(a, q; 0)$ introduites en 2.2.1. et de l'intégrale

2.4.1. $$I(\beta, N) := \int_{2P_o}^{4P_o} e(\beta t^4)\, dt .$$

PROPOSITION 2.4. - <u>Pour</u> $\alpha = \frac{a}{q}+\beta$, <u>avec</u> $0 \leq a < q, (a,q)=1$, $|\beta| \leq 975 (qP^3)^{-1}$, <u>on a</u>

2.4.2. $$|S_\varepsilon(\alpha) - \frac{1}{2q} G_\varepsilon(a,q;0).I(\beta, N)| \leq 2,9.10^6 q^{1/4} P^{1/2} + 70 q^{3/4} (\mathrm{Log}\, q+1) .$$

<u>En particulier, pour</u> $q \leq P^{1/2}$, <u>on a</u> :

2.4.3. $$|S_\varepsilon(\alpha) - \frac{1}{2q} G_\varepsilon(a,q;0).I(\beta,N)| \leq 3.10^6 q^{1/4} P^{1/2} .$$

Avant d'aborder la démonstration de la proposition 2.4, nous énonçons et démontrons le lemme suivant :

LEMME 2.4. - <u>Soient</u> $P > 0$, $|\beta| \leq 975 (q P^3)^{-1}$ <u>et</u> $\nu$ <u>entier non nul</u> ; <u>on a</u>

2.4.4. $$\int_{2P}^{4P} e(\beta t^4 - \frac{\nu t}{2q})\, dt = -\frac{q}{\pi i \nu}\Big(e(256\beta P^4 - 2\nu P q^{-1}) - e(16\beta P^4 - \nu P q^{-1})\Big) + E(\nu, q, P)$$

<u>avec</u>

2.4.5. $$| E(\nu, q, P)| \leq 10\,500 \frac{q^{1/2} P^{1/2}}{|\nu|} .$$

<u>Si l'on a</u> $|\beta| \leq (1024 q P^3)^{-1}$ <u>ou</u> $|\nu| \geq 10^6$, <u>on a</u>

2.4.6. $$|E(\nu, q, P)| \leq 1,3\ 10^6 \frac{q}{|\nu|^2} .$$

<u>Démonstration</u>. - La démonstration de 2.4.6. suit celle du lemme 9.3. de Thomas ; le lemme 4.3. de Titchmarsh n'est pas applicable sous les conditions plus générales de 2.4.5. et on applique alors le lemme 4.5. de Titchmarsh (méthode de la phase stationaire).

Une intégration par parties conduit à la relation 2.4.4. avec

$$2.4.7. \qquad E(\nu, q, P) = \int_{2P}^{4P} \frac{8\beta q t^3}{\nu}\, e(\beta t^4 - \frac{\nu t}{2q})\, dt \quad .$$

On applique alors les lemmes de Titchmarsh avec

$$G(t) = \frac{8\beta q t^3}{\nu} \qquad \text{et} \qquad F(t) = 2\pi\,(\beta t^4 - \frac{\nu t}{2q})$$

en notant que, pour $|\beta| \leq (1024\, q\, P^3)^{-1}$ ou $|\nu| \geq 10^6$, on a $\frac{G}{F}$, monotone, continue et $|\frac{G}{F'}(t)| \leq \frac{320\,000\, q}{|\nu|^2}$ sur $[2P, 4P]$. ■

<u>Démonstration de la proposition 2.4</u>. - Soit $J(h)$ l'ensemble des entiers de l'intervalle $]\frac{P-h-\varepsilon/2}{q}, \frac{2P-h-\varepsilon/2}{q}[$ ; on note qu'il y a au plus deux valeurs de $h$ modulo $q$ telles que l'une ou l'autre des extrémités de $J(h)$ soit un entier. On a

$$S_\varepsilon(\alpha) = \sum_{h=0}^{q-1} \sum_{m \in J(h)} e((\frac{a}{q} + \beta)(2mq + 2h + \varepsilon)^4)$$

$$2.4.8. \qquad = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(a(2h+\varepsilon)^4) \sum_{m \in J(h)}^{*} e(\beta(2mq + 2h + \varepsilon)^4) + \theta$$

où $|\theta| \leq 1$ et l'astérisque signifie qu'un coefficient $1/2$ est attaché à tout terme indexé par un $m$ appartenant à une extrémité de $J(h)$.

Par la formule sommatoire de Poisson, on a

$$2.4.9. \qquad S_\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{2q} G_\varepsilon(a, q; 0) \int_{2P}^{4P} e(\beta t^4)\, dt + \frac{1}{2q} \sum_{\nu \neq 0} e(\frac{\nu\varepsilon}{2q}) G_\varepsilon(a, q; \nu) \int_{2P}^{4P} e(\beta t^4 - \frac{\nu t}{2q})\, dt + \theta \; .$$

En utilisant les majorations triviales

$$|G_\varepsilon(a, q; 0)| \leq q \quad , \quad |e(\beta t^4)| \leq 1 \quad , \quad |P - P_0| \leq 1 \quad ,$$

on a

$$2.4.10. \qquad S_\varepsilon(\alpha) - \frac{1}{2q} G_\varepsilon(a, q; 0) . I(\beta, N) = \frac{1}{2q} \sum_{\nu \neq 0} e(\frac{\nu\varepsilon}{2q}) G_\varepsilon(a, q; \nu) \int_{2P}^{4P} e(\beta t^4 - \frac{\nu t}{2q})\, dt + 4\theta$$

pour un certain $\theta$ de module au plus $1$.

Notons $R$ le second membre de 2.4.10. Par le lemme 2.4. et la proposition 2.2. ($|G_\varepsilon(a, q; \nu)| \leq 18\, q^{3/4}$), on a

$$|R| \leq 4 + \frac{1}{2q} \sum_{0<|\nu|\leq 10^6} 18\, q^{3/4} \,.\, 10\,500\, \frac{q^{1/2} P^{1/2}}{|\nu|}$$

$$+ \frac{1}{2q} \sum_{|\nu|>10^6} 18\, q^{3/4}\, 1{,}3\,.\,10^6\, \frac{q}{|\nu|^2}$$

$$+ \frac{1}{2q} \sum_{0<|\nu|\leq 4q^2} 18\, q^{3/4} \,.\, \frac{2q}{\pi|\nu|}$$

$$+ \frac{1}{2q} \Big| \sum_{|\nu|>4q^2} e\Big(\frac{\nu\,\varepsilon}{2q}\Big)\, G_\varepsilon(a, q\,; \nu)\, \frac{q}{\pi\nu}\Big(e(256\beta P^4 - 2\nu P q^{-1}) - e(16\beta P^4 - \nu P q^{-1})\Big)\Big|$$

2.4.11. $$\leq 2{,}9.10^6\, q^{1/4} P^{1/2} + 60\, q^{3/4} (\mathrm{Log}\; q + 1) + \frac{1}{2q} \Big| \sum \; \ldots \Big|$$

et on évalue finalement $\big| \sum \; \ldots \big|$ en suivant la technique de Thomas ([Thom 1] p. 139), basée sur la majoration valable pour tout $j$ entier :

2.4.12. $$\Big| \sum_{\nu=q^2+1} \nu^{-1} \sin \frac{2\pi\nu j}{q} \Big| \leq \frac{1}{2q} \,.$$

On utilise la définition de $G_\varepsilon$, et on a

$$\Big| \sum_{|\nu|>4q^2} \frac{1}{\nu}\; e\Big(\frac{\nu\,\varepsilon}{2q}\Big)\, G_\varepsilon(a, q\,; \nu)\; e(256\,\beta P^4 - 2\nu P q^{-1}) \Big|$$

$$\leq \sum_{h=0}^{q-1} \Big| \sum_{\nu>4q^2} \nu^{-1} \sin\Big(\frac{2\pi\nu((2h+\varepsilon)-4P)}{2q}\Big) \Big|$$

2.4.13. $$\leq q \cdot \frac{1}{2.\,2q} \leq \frac{1}{4} \,.$$

On en déduit

2.4.14. $$\Big| \sum_{|\nu|>4q^2} \ldots \Big| \leq 2 \times \frac{q}{\pi} \times \frac{1}{4} \leq 2q \,.$$

La relation 2.4.2. de la proposition 2.4. résulte alors de 2.4.11. et 2.4.14, et la relation (3) se déduit immédiatement de 2.4.2. ∎

## 2.5. - Contribution des arcs majeurs

Nous complétons ici la démonstration du Théorème 2. Le résultat-clef de cette section est le suivant

PROPOSITION 2.5. - Pour $P_o \geq 10^{74}$, on a

$$\Big| \sum_{q \leq P^{1/2}} \ \sum_{(a,q)=1} \int_{\mathfrak{M}_{a,q}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \ -$$

$$\frac{P_o^{15}}{16} K\left(\frac{N}{(2P_o)^4}\right) \sum_{q \leq P^{1/2}} q^{-19} \sum_{(a,q)=1} e_q(-aN)\, G_o^s(a,q;0)\, G_1^t(a,q;0) \Big|$$

2.5.1. $$\leq 3.10^{33}\, P_o^{29/2}$$

où $K$ est défini par 2.1.2.

Sous les conditions de la proposition 2.4, on a

2.5.2. $$|S_\varepsilon(\alpha) - T_\varepsilon(\alpha)| \leq R \ ,$$

avec

2.5.3. $$T_\varepsilon(\alpha) := \frac{1}{2q} G_\varepsilon(a,q\,;\,0)\,.\,I(\beta, N)$$

et

2.5.4. $$R := 3.10^6\, q^{1/4}\, P^{1/2} \quad .$$

On commence par majorer $I(\beta, N)$ .

LEMME 2.5.1. - On a

2.5.5. $$|I(\beta, N)| \leq \min\left(2P_o\, , (100\, |\beta|\, P^3)^{-1}\right) \quad .$$

Démonstration. - La première majoration est triviale. Soit maintenant $\beta \neq 0$ . Par changement de variables et intégration par parties, on a

$$I(\beta, N) = \int_{2P_o}^{4P_o} e(\beta t^4)\, dt = \frac{1}{4} \int_{(2P_o)^4}^{(4P_o)^4} \tau^{-3/4}\, e(\beta\tau)\, d\tau$$

2.5.6. $$= \frac{1}{4}\left[\frac{e(\beta\tau)}{2\pi i \beta \tau^{3/4}}\right]_{(2P_o)^4}^{(4P_o)^4} + \frac{1}{4} \int_{(2P_o)^4}^{(4P_o)^4} \frac{3\ e(\beta\tau)}{8\pi i \beta \tau^{7/4}}\, d\tau$$

d'où

2.5.7. $$|I(\beta, N)| \leq \frac{9/8}{4.\,2\pi.|\beta|.(2P_o)^3} + \frac{7/8}{8\pi\, |\beta|\, (2P_o)^3} \leq \frac{1}{100\, |\beta|\, P^3} \quad . \quad \blacksquare$$

On va maintenant comparer

$$\int_{\mathfrak{M}_{a,q}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} T_o^s(\alpha)\, T_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \ .$$

LEMME 2.5.2. - <u>On a</u>

$$\left| \int_{\mathfrak{M}_{a,q}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} T_o^s(\alpha)\, T_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \right|$$

2.5.8. $$\leq 10^{129}\, P^{95/8} + 1.1.10^{33}\, q^{-17/4}\, P^{29/2} \ .$$

<u>Démonstration</u>. <u>$1^{\text{ère}}$ étape</u>. - Il résulte du lemme 2.5.1. que l'on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} T_o^s(\alpha)\, T_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha - \int_{\mathfrak{M}_{a,q}} T_o^s(\alpha)\, T_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \right|$$

$$\leq 2 \int_{975(qP^3)^{-1}}^{\infty} (9\, q^{-1/4})^{19}\, \frac{d\beta}{(64)^{19}\, \beta^{19}\, P^{57}}$$

$$\leq \frac{2}{18} \left(\frac{9}{64}\right)^{19} q^{-19/4}\, P^{-57} \left(\frac{q\, P^3}{975}\right)^{18}$$

2.5.9. $$\leq q^{53/4}\, P^{-3} \leq P^4 \ .$$

<u>$2^{\text{ème}}$ étape</u>. - Soit $T(\alpha)$ un majorant commun à $|T_o(\alpha)|$ et $|T_1(\alpha)|$ .

Pour $\varepsilon \in \{0,1\}$ , $u$ entier positif et $\alpha \in \mathfrak{M}_{a,q}$ , on a

2.5.10. $$|S_\varepsilon^u(\alpha) - T_\varepsilon^u(\alpha)| \leq 2^u\, R\, T^{u-1}(\alpha) + 2^u\, R^u$$

et pour $s+t = 19$ , on a

2.5.11. $$|S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha) - T_o^s(\alpha)\, T_1^t(\alpha)| \leq 2^{19}\, R\, T^{18}(\alpha) + 2^{19}\, R^{19} \ .$$

On a donc

$$\int_{\mathfrak{M}_{a,q}} |S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha) - T_o^s(\alpha)\, T_1^t(\alpha)|\, d\alpha$$

$$\leq 2^{19}\, R^{19} + 2^{20}\, R\, (9\, q^{-1/4})^{18} \int_0^{(128P^4)^{-1}} (2P)^{18}\, d\beta$$

2.5.12. $$+\, 2^{20}\, R\, (9\, q^{-1/4})^{18} \int_{(128P^4)^{-1}}^{\infty} \frac{1}{(64\, \beta\, P^3)^{18}}\, d\beta$$

$$2.5.13. \quad \leq 10^{128,8}\, P^{95/8} + 10^{33}\, q^{-17/4}\, P^{29/2} + 10^{32}\, q^{-17/4}\, P^{29/2}$$

d'où le lemme 2.5.2. ∎

Démonstration de la proposition 2.5. - On somme sur les arcs majeurs ; on utilise les relations

$$2.5.14. \quad \sum_{q \leq P^{\frac{1}{2}}} \; \sum_{(a,q)=1} 1 \leq \sum_{q \leq P^{\frac{1}{2}}} q \leq P$$

$$2.5.15. \quad \sum_{q \leq P^{\frac{1}{2}}} \; \sum_{(a,q)=1} q^{-17/4} \leq \sum_{q} q^{-13/4} \leq \sum_{q} \frac{1}{q^2} \leq 2$$

et

$$2.5.16. \quad 10^{129}\, P^{103/8} + 2,2.10^{33}\, P^{29/2} \leq 2,3.10^{33}\, P_o^{29/2} \quad \text{pour } P_o \geq 10^{74} .$$

Par changement de variables, la quantité

$$\frac{1}{2^{19}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{2P_o}^{4P_o} e(\beta t^4)\, dt \right)^{19} e(-\beta N)\, d\beta \quad \text{devient}$$

$$\frac{P_o^{15}}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{1}^{2} e(\beta t^4)\, dt \right)^{19} e\left(-\beta \frac{N}{(2P_o)^4}\right) d\beta \quad . \quad ∎$$

Démonstration du théorème 2. - On notera que les deux sommes doubles figurant dans la proposition 2.5. sont réelles. Par la définition 2.3.1. de $\mathfrak{S}(N)$ et par la proposition 2.2, on a

$$\left| \mathfrak{S}(N) - \sum_{q \leq P^{\frac{1}{2}}} \; \sum_{(a,q)=1} q^{-19}\, e\left(-\frac{aN}{q}\right) G_o^s(a,q\,;0)\; G_1^t(a,q\,;0) \right|$$

$$\leq \sum_{q > P^{\frac{1}{2}}} q^{-18} \left(18\, q^{3/4}\right)^{19} \leq 10^{24} \sum_{q > P^{\frac{1}{2}}} q^{-3}$$

$$2.5.17. \quad \leq 10^{24}\, P^{-\frac{1}{2}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-2} \leq 10^{25}\, P_o^{-\frac{1}{2}} \quad .$$

Il résulte alors des propositions 2.1, 2.3, 2.5 et de 2.5.17. que l'on a

$$2.5.18. \quad \int_{\mathfrak{M}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \geq \frac{11}{1\,600} P_o^{15} - 3,1.10^{33}\, P_o^{29/2}$$

et pour $P_o \geq 10^{74}$, le théorème 2 en résulte ; il reste à remarquer que l'on a $\frac{N}{(2P_o)^4} \leq 151$ et donc $N \geq 10^{300}$ implique $P_o \geq 10^{74}$. ∎

§ 3. - L'inégalité de Hua : réduction à une somme de diviseurs

Dans la sous-section 3.3, nous démontrerons le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Pour $\varepsilon = 0$ ou $1$, on note $B_\varepsilon(P)$ un nombre réel qui satisfait les relations

3.0.1. $\quad 0,1.\, P^3(\mathrm{Log}\, P)^8 \leq B_\varepsilon(P) \leq P^{3,6}$

3.0.2. $\quad 2 \sum_{h,k,y}^{(3.0.3)} d_3\Big(|(3(2y+\varepsilon+h+k)^2+h^2+k^2)hk|\Big) \leq B_\varepsilon(P)$

où la condition de sommation est

3.0.3. $\quad \begin{cases} hk \neq 0, \quad 0<|h|+|k|<P, \quad P-\varepsilon/2<y\leq 2P-\varepsilon/2 \\ P-\varepsilon/2<y+h+k\leq 2P-\varepsilon/2 . \end{cases}$

Pour $P \geq 10^{74}$, $\varepsilon = 0$ ou $1$, on a pour $0 \leq \gamma \leq 0,25$

3.0.4. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \leq 238\,000 \frac{3^{8\gamma}\, 2^{-4\gamma}}{1+2\gamma} P^{12}(\mathrm{Log}\, P)^{7+8\gamma} + 66.\, 2^{-\gamma} B_\varepsilon(P)\; P^9\; (\mathrm{Log}\, P)^{1-2\gamma}$$

et pour $0,25 \leq \gamma \leq 0,5$, on a

3.0.5. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \leq 1,91.10^6\; 2^{-4\gamma}(1+2\gamma)^{-1} P^{12}(\mathrm{Log}\, P)^{6+12\gamma} + 66.\, 2^{-\gamma} B_\varepsilon(P)\, P^9\, (\mathrm{Log}\, P)^{1-2\gamma} .$$

En particulier, pour $\gamma = 0,5$, on a

3.0.6. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \leq 238\,750\, P^{12}\, (\mathrm{Log}\, P)^{12} + 47\, B_\varepsilon(P)\, P^9$$

et pour $\gamma = 0,075$, on a

3.0.7. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \leq 325\,000\, P^{12}(\mathrm{Log}\, P)^{7,6} + 63\, B_\varepsilon(P)\, P^9(\mathrm{Log}\, P)^{0,85} .$$

3.1. - Sur la congruence $x^4 \equiv y^4 \pmod{k}$

PROPOSITION 3.1. - Soit

$$A(X) = \#\{(k,x,y)\,/\,0<k<X,\ x\in ]X,2X],\ y\in ]X,2X],\ x^4\equiv y^4[k]\}\ .$$

Pour $X \geq 10^{80}$, on a :

3.1.1. $\quad A(X) \leq 13X^2(\mathrm{Log}\ X)^4 - X^2$ .

On notera qu'en fait $A(X) \ll X^2(\mathrm{Log}\ X)^3$ et on peut déterminer effectivement une constante dès que l'on a un résultat effectif du genre $\displaystyle\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv 1 \pmod{4}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,x + O(1)$.

Soit $N(k)$ le nombre de solutions de $\xi^4 \equiv \eta^4 \pmod{k}$, avec $\xi$ et $\eta \pmod{k}$. On a :

$$A(X) = \sum_{0<k<X}\ \sum_{\substack{\xi,\eta \pmod{k}\\ \xi^4\equiv\eta^4 \pmod{k}}}\ \sum_{\substack{x\in ]X,2X]\\ x\equiv\xi \pmod{k}}}\ \sum_{\substack{y\in ]X,2X]\\ y\equiv\eta \pmod{k}}} 1$$

3.1.2. $$\leq 4X^2 \sum_{0<k<X} \frac{N(k)}{k^2}\ .$$

La fonction $N(k)$ est multiplicative (cela est classique) et l'on s'attache donc à évaluer $N(p^\ell)$, pour $p$ premier. On se contentera de démontrer ici une majoration de $N(p^\ell)$ suffisante pour notre propos.

On notera

3.1.3. $\quad N_o(p^\ell) = \#\{(\xi,\eta)\,/\,0\leq\xi<p^\ell,\ 0\leq\eta<p^\ell,\ p|\xi\eta \text{ et } \xi^4-\eta^4\equiv 0\,[p^\ell]\}$

3.1.4. $\quad N_1(p^\ell) = \#\{(\xi,\eta)\,/\,0\leq\xi<p^\ell,\ 0\leq\eta<p^\ell,\ p\nmid\xi\eta \text{ et } \xi^4-\eta^4\equiv 0\,[p^\ell]\}$

ainsi, on a

3.1.5. $\quad N(p^\ell) = N_o(p^\ell) + N_1(p^\ell)$ .

LEMME 3.1.1. - Pour tout nombre premier $p$, on a :

3.1.6. $\quad N_o(p^\ell) = p^{2(\ell-1)}$ pour $1\leq\ell\leq 4$

3.1.7. $\quad N_o(p^\ell) = p^6\, N(p^{\ell-4})$ pour $\ell\geq 5$ .

<u>Démonstration</u>. - Dès que $p | \xi$ et $\xi^4 - \eta^4$, il divise $\eta$ ; mais, si $p$ divise $\xi$ et $\eta$, alors $p^4$ divise $\xi^4 - \eta^4$ ; 3.1.6. en résulte.

Soit maintenant $\ell \geq 5$. Considérons les solutions de

3.1.8. $\quad 0 \leq \xi < p^\ell , \ 0 \leq \eta < p^\ell , \ p | \xi\eta , \quad \xi^4 - \eta^4 \equiv 0 \ [p^\ell]$ .

En posant $\xi = px$, $\eta = py$, 3.1.8. équivaut à

3.1.9. $\quad 0 \leq x < p^{\ell-1} , \ 0 \leq y < p^{\ell-1} , \quad x^4 - y^4 \equiv 0 \quad [p^{\ell-4}]$

et chacune des $N(p^{\ell-4})$ solutions de

3.1.10. $\quad 0 \leq x_1 < p^{\ell-4} , \ 0 \leq y_1 < p^{\ell-4} , \quad x_1^4 - y_1^4 \equiv 0 \ [p^{\ell-4}]$

fournit $p^6$ solutions de 3.1.9. ($x = x_1 + \lambda p^{\ell-4}$ , $y = y_1 + \mu p^{\ell-4}$ avec $0 \leq \lambda$ , $\mu \leq p^3$ ) ; cela démontre 3.1.7. ∎

LEMME 3.1.2. - <u>Soit</u> $p$ <u>un nombre premier impair</u> ; <u>on a</u>

3.1.11. $\quad N_1(p) \leq 4(p-1) \quad$ <u>et</u> $\quad N_1(3) = 4$

3.1.12. $\quad N_1(p^\ell) = p \, N_1(p^{\ell-1}) \quad$ <u>pour</u> $\ell \geq 2$ .

<u>Remarque</u>. - On a en fait $N_1(p) = 4(p-1)$ si $p \equiv 1 \ [4]$ et $N_1(p) = 2(p-1)$ si $p \equiv 3 \ [4]$ .

<u>Démonstration</u>. - Soit $\alpha$ dans $[0, p[$ et soit $r(\alpha)$ le nombre de $\xi$ de $[0, p[$ tels que $\xi^4 \equiv \alpha \ [p]$ . Puisque $p$ divise $\xi$ si et seulement si $\alpha = 0$ , on a

3.1.13. $\quad N_1(p) = \sum_{\alpha=1}^{p} r^2(\alpha) \quad$ et $\quad \sum_{\alpha=1}^{p} r(\alpha) = p-1$

la congruence $\xi^4 \equiv \alpha \ [p]$ a au plus quatre solutions (le module est premier), et on a donc

3.1.14. $\quad N_1(p) = \sum_{\alpha=1}^{p} r^2(\alpha) \leq 4 \sum_{\alpha=1} r(\alpha) = 4(p-1)$

ce qui démontre la première partie de (ii) ; $N_1(3)$ se calcule directement.

Soit maintenant $\ell \geq 2$ et $(x,y)$ une solution de

3.1.15. $\quad 0 \leq x < p^{\ell-1} \quad 0 \leq y < p^{\ell-1} \quad x^4 \equiv y^4 \; [p^{\ell-1}]$

on montre qu'au-dessous de cette solution, il en existe exactement $p$ modulo $p^{\ell}$, c'est-à-dire qu'il existe exactement $p$ couples $(\lambda, \mu)$ avec $0 \leq \lambda < p$, $0 \leq \mu < p$ tels que

3.1.16. $\quad (x+\lambda p^{\ell-1})^4 \equiv (y+\mu p^{\ell-1})^4 \; [p^{\ell}]$ .

Ecrivons $x^4 - y^4 = z\, p^{\ell-1}$ (possible, d'après 3.1.15) ; on est ramené à résoudre

3.1.17. $\quad z + 4\lambda x - 4\mu y \equiv 0 \; [p], \quad 0 \leq \lambda < p, \quad 0 \leq \mu < p$

qui admet $p$ solutions, car 4 est inversible modulo $p$ . ∎

LEMME 3.1.3. - <u>On a</u>

3.1.18. $\quad N_1(2) = 1 \;,\; N_1(4) = 4 \;,\; N_1(8) = 16$

3.1.19. $\quad N_1(2^k) = 2^{k+2}$ <u>pour</u> $k \geq 4$ .

La formule 3.1.18. se démontre par calcul direct, En remarquant que $(x+2^{k-3})^4 \equiv x^4 \; [2^{k-1}]$, mais $(x+2^{k-3})^4 \not\equiv x^4 \; [2^k]$ pour $k \geq 5$ , on démontre par récurrence sur $k$ qu'il y a $2^{k-4}$ résidus biquadratiques impairs modulo $2^k$ et que chacun est obtenu huit fois, ceci pour $k \geq 4$ . La formule 3.1.19. en découle. ∎

COROLLAIRE 3.2.1. - <u>Pour tout</u> $p$ , $j \geq 1$ <u>et</u> $k \geq 1$ , <u>on a</u> :

3.1.20. $$\frac{N_o(p^{4k+j})}{p^{8k+2j}} \leq \frac{N(p^j)}{p^{2k+2j-2}(p^2-1)}$$

<u>et en particulier, pour</u> $p$ <u>impair</u>

3.1.21. $$\frac{N_o(p^{4k+j})}{p^{8k+2j}} \leq \frac{N_1(p)+1}{p^{2k}(p^2-1)} \leq \frac{4}{p^{2k+1}}$$

<u>et pour</u> $p = 2$

3.1.22. $$\frac{N_o(2^{4k+j})}{2^{8k+2j}} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{2k-1}} \; .$$

Démonstration. - Par 3.1.7, on a pour $j \geq 1$ et $k \geq 1$ :

$$N_o(p^{4k+j}) = p^6 N_1(p^{4(k-1)+j}) + p^{12} N_1(p^{4(k-2)+j}) + \dots + p^{6k}(N_1(p^j) + N_o(p^j)) \quad .$$

En utilisant 3.1.12. ou 3.1.19 selon que $p$ est impair on non, on a

3.1.23. $$N_o(p^{4k+j}) = p^{6k} N_o(p^j) + p^{6k}(1 + p^{-2} + \dots + p^{-(2k-2)}) N_1(p^j)$$

d'où la relation 3.1.20.

Les relations 3.1.21. et 3.1.22. s'en déduisent en considérant les quatre valeurs $j = 1, 2, 3$ et $4$ et les deux cas où $p$ est impair ou pair. ∎

LEMME 3.1.4. - On a

3.1.24. $$\sum_{\ell \geq 1} \frac{N(2^\ell)}{2^{2\ell}} \leq \frac{43}{12}$$

3.1.25. $$\sum_{\ell \geq 1} \frac{N(3^\ell)}{3^{2\ell}} \leq \frac{205}{144}$$

3.1.26. $$\sum_{p \geq 5} \sum_{\ell \geq 2} \frac{N(p^\ell)}{p^{2\ell}} \leq 1 \quad .$$

Démonstration. - Commençons par la contribution de $p = 2$ ; on a, par 3.1.18, 3.1.19, 3.1.22 et 3.1.6,

$$\sum_{\ell \geq 1} \frac{N(p^\ell)}{p^{2\ell}} \leq \frac{8+4+4}{16} + \frac{16+16}{64} + \frac{64+64}{256} + 4 \,.\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3.\,2^{2k-1}} + \sum_{\ell=5}^{\infty} \frac{2^{\ell+2}}{2^{2\ell}}$$

$$\leq 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{43}{12} \quad ,$$ d'où la relation 3.1.24.

Contribution d'un nombre premier impair $p$ :

3.1.27. $$\sum_{\ell \geq 2} \frac{N_1(p^\ell)}{p^{2\ell}} \leq \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{p^{\ell-1} N_1(p)}{p^{2\ell}} = \frac{N_1(p)}{p^2(p-1)}$$

3.1.28. $$\sum_{\ell \geq 2} \frac{N_o(p^\ell)}{p^{2\ell}} \leq \frac{3}{p^2} + \frac{4(N_1(p)+1)}{p^2-1}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots\right) = \frac{3}{p^2} + \frac{4(N_1(p)+1)}{(p^2-1)^2}$$

on vérifie que pour $p=3$ , on a $\frac{(N_1(p)+1)}{(p^2-1)^2} = \frac{5}{64}$ , d'où

$$\sum_{\ell\geq 1} \frac{N(3^\ell)}{3^{2\ell}} \leq \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{5}{16} ,$$

d'où (25) et que pour $p \geq 5$ , on a

$$3.1.29. \quad \frac{(N_1(p)+1)}{(p^2-1)^2} \leq \frac{4p-3}{(p^2-1)^2} \leq \frac{3}{4p^2} ,$$

d'où

$$3.1.30. \quad \sum_{\ell \geq 2} \frac{N(p^\ell)}{p^{2\ell}} \leq \frac{7}{p^2} + \frac{3}{p^2} = \frac{10}{p^2}$$

on en déduit

$$3.1.31. \quad \sum_{p\geq 5} \sum_{\ell \geq 2} \frac{N(p^\ell)}{p^{2\ell}} \leq \sum_{p\geq 5} \frac{10}{p^2} \leq \sum_{5\leq p\leq 37} \frac{10}{p^2} + \frac{10}{4} \sum_{n\geq 20} \frac{1}{n^2}$$

$$\leq 0,86 + \frac{10}{4.19} \leq 1$$

d'où 3.1.26. ∎

<u>Démonstration de la proposition 3.1</u>. - Repartons de l'inégalité 3.1.2 ; on a

$$A(X) \leq 4X^2 \sum_{0<k\leq X} \frac{N(k)}{k^2} \leq 4X^2 \prod_{p\leq X} \left(1 + \sum_{\ell=1} \frac{N(p^\ell)}{p^{2\ell}}\right)$$

$$\leq 4X^2 \exp\left(\sum_{p\leq X} \operatorname{Log}\left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{N(p^\ell)}{p^{2\ell}}\right)\right)$$

$$3.1.32. \qquad \leq 45\, X^2 \exp\left(\sum_{5\leq p\leq X} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{N(p^\ell)}{p^{2\ell}}\right) .$$

En utilisant 3.1.6, 3.1.11, 3.1.26. et 3.1.32, on a

$$A(X) \leq 45\, X^2 \exp\left(\sum_{5\leq p\leq X} \frac{4}{p} + 1\right)$$

$$\leq 45\, X^2 \exp\left(\sum_{p\leq X} \frac{4}{p} - \frac{7}{3}\right) .$$

On utilise alors l'inégalité (3.18) de [R-S], ce qui conduit à

3.1.34. $A(X) \leq 45\, X^2 \exp(4 \operatorname{Log}\operatorname{Log} X - 1{,}28) \leq 12{,}6\, X^2 (\operatorname{Log} X)^4$ ,

d'où la proposition 3.1. ∎

## 3.2. - Sommes de diviseurs

On donne dans cette section différentes majorations de sommes de diviseurs ; on dénote par $X$ un réel $\geq 1$ et par $P$ un réel $\geq 10^{74}$. Les indices de sommation sont des entiers $> 0$.

3.2.1. $\sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \leq \operatorname{Log} X + 1$ .

S'obtient par comparaison avec l'intégrale $\int_1^X \frac{dt}{t}$

3.2.2. Pour $1 \leq j \leq 4$ , on a $\sum_{n \leq X} d^j(n) \leq A_j\, X(\operatorname{Log} X + j)^{2^j - 1}$

avec $A_1 = 1$ , $A_2 = \frac{1}{3}$ , $A_3 = \frac{1}{24}$ et $A_4 = \frac{1}{4608}$ .

C'est le lemme 8 de [Chen] .

3.2.3. Pour $1 \leq j \leq 2$ , on a $\sum_{n \leq X} \frac{d^j(n)}{n} \leq 2^{-j} A_j (\operatorname{Log} X + j + 1)^{2^j}$ .

S'obtient à partir de 3.2.2. en sommant par parties

3.2.4. Pour $1 \leq j \leq 2$ , on a $\sum_{n \leq X} d_3^j(n) \leq B_j\, X(\operatorname{Log} X + 3^j - 1)^{3^{j-1}}$ ,

avec $B_1 = \frac{1}{2}$ , $B_2 = \frac{9}{6^4}$ .

Résulte de [Mard]

3.2.5. $\sum_{n \leq X} \frac{d_3^2(n)}{n} \leq 6^{-4} (\operatorname{Log} X + 9)^9$ .

Résulte de [Mard].

3.2.6. Pour $0 \leq \varkappa \leq 1$ , on a $\sum_{n \leq X} d^{\varkappa}(n) \leq X(\operatorname{Log} X + 1)^{\varkappa}$ .

Cela résulte de 3.2.2. et de l'inégalité de Hölder :

3.2.7. $\sum_n a_n^{1-\varkappa} b_n^{\varkappa} \leq (\sum_n a_n)^{1-\varkappa} (\sum_n b_n)^{\varkappa}$ , pour $0 \leq \varkappa \leq 1$

3.2.8. Pour $0 \leq \varkappa \leq 1$ , on a $\sum_{n \leq X} \frac{d^{\varkappa}(n)}{n} \leq \frac{1}{1+\varkappa} (\mathrm{Log}\, X+2)^{1+\varkappa}$ .

Cela résulte de 3.2.6. en sommant par parties

3.2.9. $\sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \left( \sum_{\delta | n} d(\delta)^0 \right)^2 \leq \frac{1}{12} (\mathrm{Log}\, X+3)^4$

C'est 3.2.3. avec $j=2$

3.2.10. $\sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \left( \sum_{\delta | n} d(\delta)^1 \right)^2 \leq 6^{-4} (\mathrm{Log}\, X+9)^9$

C'est 3.2.5, car $d_3(n) = \sum_{\delta | n} d(\delta)$

3.2.11. $\sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \left( \sum_{\delta | n} d(\delta)^{1/2} \right)^2 \leq \frac{1}{24} (\mathrm{Log}\, X+3)^6$ .

On a en effet, par Cauchy-Schwarz

$$S := \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \left( \sum_{\delta | n} d(\delta)^{1/2} \right)^2 \leq \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} ( \sum_{n \leq X} 1^2 ) ( \sum_{\delta | n} d(\delta)^{2/2} )$$

$$\leq \sum_{n \leq X} \frac{d(n)\, d_3(n)}{n} = \sum_{n \leq X} \frac{d(n)}{n} \sum_{\delta | n} d(\delta)$$

$$= \sum_{\delta \leq X} d(\delta) \sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv 0 [\delta]}} \frac{d(n)}{n} \leq \sum_{\delta \leq X} \frac{d(\delta)^2}{\delta} \sum_{m \leq X} \frac{d(m)}{m}$$

et par 3.2.3, on a

$$S \leq \frac{1}{12} (\mathrm{Log}\, X+3)^4 . \frac{1}{2} (\mathrm{Log}\, X+2)^2 \leq \frac{1}{24} (\mathrm{Log}\, X+3)^6 .$$

3.2.12. Pour $0 \leq \varkappa \leq \frac{1}{2}$ , on a $\sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \left( \sum_{\delta | n} d(\delta)^{\varkappa} \right)^2 \leq \frac{1}{12.4^{\varkappa}} (\mathrm{Log}\, X+3)^{4+4\varkappa}$ .

On applique l'inégalité de Hölder sous la forme

3.2.13. $\sum_n a_n^{1-2\varkappa} b_n^{2\varkappa} \leq (\sum_n a_n)^{1-2\varkappa} (\sum_n b_n)^{2\varkappa}$ , pour $0 \leq \varkappa \leq 1/2$

et les relations 3.2.9. et 3.2.11 :

$$\sum_{n\le X}\frac{1}{n}\Big(\sum_{\delta|n} d(\delta)^{\varkappa}\Big)^2 \le \sum_{n\le X}\frac{1}{n}\Big(\sum_{\delta|n} 1\Big)^{2-4\varkappa}\Big(\sum_{\delta|n} d(\delta)^{\frac12}\Big)^{4\varkappa}$$

$$\le \Big(\sum_{n\le X}\frac{1}{n}\big(\sum_{\delta|n} 1\big)^2\Big)^{1-2\varkappa}\Big(\sum_{n\le X}\frac{1}{n}\big(\sum_{\delta|n} d(\delta)^{\frac12}\big)^2\Big)^{2\varkappa}$$

$$\le \big(\tfrac{1}{12}\big)^{1-2\varkappa}(\mathrm{Log}\,X+3)^{4-8\varkappa}\big(\tfrac{1}{24}\big)^{2\varkappa}(\mathrm{Log}\,X+3)^{12\varkappa}$$

$$\le 2^{-2-2\varkappa}\,.\,3^{-1}\,.\,(\mathrm{Log}\,X+3)^{4+4\varkappa}$$

3.2.14. Pour $\frac{1}{2}\le\varkappa\le 1$, on a $\sum_{n\le X}\frac{1}{n}\Big(\sum_{\delta|n} d(\delta)^{\varkappa}\Big)^2 \le 2^{-2-2\varkappa}\,3^{2-6\varkappa}(\mathrm{Log}\,X+9)^{3+6\varkappa}$

On applique l'inégalité de Hölder sous la forme

3.2.15. $\big(\sum_n a_n^{2-2\varkappa}\big)\big(\sum_n b_n^{2\varkappa-1}\big)\le\big(\sum_n a_n\big)^{2-2\varkappa}\big(\sum_n b_n\big)^{2\varkappa-1}$ pour $\frac{1}{2}\le\varkappa\le 1$

et les relations 3.2.10. et 3.2.11. On a :

$$\sum_{n\le X}\frac{1}{n}\big(\sum_{\delta|n} d(\delta)^{\varkappa}\big)^2 \le \sum_{n\le X}\frac{1}{n}\Big(\sum_{\delta|n} d(\delta)^{\frac12}\Big)^{4-4\varkappa}\Big(\sum_{\delta|n} d(\delta)\Big)^{4\varkappa-2}$$

$$\le\Big(\sum_{n\le X}\frac{1}{n}\Big(\sum_{\delta|n} d(\delta)^{\frac12}\Big)^2\Big)^{2-2\varkappa}\Big(\sum_{n\le X}\frac{1}{n}\Big(\sum_{\delta|n} d(\delta)\Big)^2\Big)^{2\varkappa-1}$$

$$\le\big(\tfrac{1}{24}\big)^{2-2\varkappa}(\mathrm{Log}\,X+3)^{12-12\varkappa}\,6^{-8\varkappa+4}(\mathrm{Log}\,X+9)^{18\varkappa-9}$$

$$\le 2^{-2-2\varkappa}\,3^{2-6\varkappa}\,(\mathrm{Log}\,X+9)^{3+6\varkappa}\quad .$$

3.2.16. On a $\mathrm{Sup}_{z>0}\, g(z)=1$, où $g(z)=\sum_{z<r\le 2z}\frac{1}{r}$ .

La fonction $g$ est constante sur tout intervalle de la forme $[\frac{n}{2},\frac{n+1}{2}[$ et on a $g(n+\frac{1}{2})\ge g(n)$ ; on calcule directement $g(\frac{1}{2})=1$, $g(\frac{3}{2})=\frac{5}{6}$, $g(\frac{5}{2})=\frac{47}{60}$ d'où $g(z)\le 1$ pour $z<3$ . On a également $g(z)\le g(\frac{7}{2})=g(\frac{e}{e-2})$ ; soit maintenant $z\ge\frac{e}{e-2}$ ; on a $g(z)\le\int_{z-1}^{2z}\frac{dt}{t}=\mathrm{Log}\,(\frac{2z}{z-1})\le 1$ .

3.2.17. $$\sum_{1\le \ell\le P^4}\Big(\sum_{0<h\le P}\ \sum_{\substack{2P<y\le 4P\\ hyk=\ell}}\ \sum_{0<k\le\frac14 P^2} d(k)^{2\gamma}\Big)^2$$

$$\le\begin{cases}\dfrac{28,3}{1+2\gamma}\,.\,3^{8\gamma}\,P^4\,(\mathrm{Log}\,P)^{5+12\gamma} & \text{pour } 0\le\gamma\le\dfrac14\\[2ex] \dfrac{288}{1+2\gamma}\,P^4\,(\mathrm{Log}\,P)^{4+16\gamma} & \text{pour } \dfrac14\le\gamma\le\dfrac12\ .\end{cases}$$

Soit $S_\gamma$ la somme que l'on cherche à majorer ; on a :

$$S_\gamma\le\sum_{1\le\ell\le P^4}\Big(\sum_{\substack{2P<y\le 4P\\ yk|\ell}}\ \sum_{\substack{0<k\le\frac14 P^2\\ \ell/yk\le P}} d(k)^{2\gamma}\Big)^2$$

$$\le 2\sum_{y_1}\sum_{k_1} d(k_1)^{2\gamma}\sum_{\substack{y_2\ k_2\\ y_2k_2\le y_1k_1}}\ d(k_2)^{2\gamma}\sum_{\substack{\ell\le Py_2k_2\\ \ell\equiv 0\,[[y_1k_1,\,y_2k_2]]}} 1$$

on pose alors $m=(y_1k_1\,,\,y_2k_2)$, $y_i=m_ir_i$ , $k_i=n_is_i$ avec $m=m_in_i$ ; on a

$$S_\gamma\le 2\sum_{m\le P^3}\ \sum_{m_i,n_i}\ \sum_{r_i,s_i} d(n_1s_1)^{2\gamma}\,d(n_2s_2)^{2\gamma}\sum_{\ell} 1\ ,$$

où les variables de sommation sont assujetties aux conditions

3.2.18. $$\begin{cases} m_i\le 4P\,,\ n_i\le\dfrac14 P^2\,,\ m_in_i=m\,,\ \dfrac{2P}{m_i}<r_i\le\dfrac{4P}{m_i}\quad s_i\le\dfrac14\,\dfrac{P^2}{n_i}\ ,\\[2ex] \ell\le P\,m_2r_2n_2s_2\ \text{ et }\ \ell\equiv 0\Big[\dfrac{m_1r_1n_1s_1m_2r_2n_2s_2}{m}\Big]\ ;\end{cases}$$

on a

$$S_\gamma\le 2P\sum_{m\le P^3}\ \sum_{m_i,n_i} d(n_1)^{2\gamma}\,d(n_2)^{2\gamma}\sum_{r_i,s_i} d(s_1)^{2\gamma}\,d(s_2)^{2\gamma}\,\frac{1}{r_1s_1}$$

$$\le 2P\sum_{m\le P^3}\ \sum_{m_i,n_i} d(n_1)^{2\gamma}\,d(n_2)^{2\gamma}\sum_{r_1}\frac{1}{r_1}\sum_{r_2}1\sum_{s_1\le\frac14P^2}\frac{d(s_1)^{2\gamma}}{s_1}\sum_{s_2\le\frac14\frac{P^2}{n_2}} d(s_2)^{2\gamma}$$

par les relations 3.2.6, 3.2.8. et 3.2.16, on a

$$S_\gamma\le 2P.\,4P.\frac14 P^2\sum_{m\le P^3}\ \sum_{m_i,n_i}\frac{d(n_1)^{2\gamma}\,d(n_2)^{2\gamma}}{m_2\,n_2}\Big(\mathrm{Log}(\tfrac14 P^2+1)\Big)^{2\gamma}\Big(\mathrm{Log}(\tfrac14 P^2+2)\Big)^{1+2\gamma}$$

$$\le 1.01\ \frac{2^{2+4\gamma}}{1+2\gamma}\,P^4\,(\mathrm{Log}\,P)^{1+4\gamma}\sum_{m\le P^3}\frac1m\Big(\sum_{n|m} d(n)^{2\gamma}\Big)^2\ .$$

Les relations 3.2.17. proviennent alors de 3.2.12. et 3.2.14.

3.2.19. Pour $1 \le \varkappa \le 2$, on a $\displaystyle\sum_{k>0} \Big( \sum_{\substack{h_1 \le P \quad h_2 \le P \\ h_1 h_2 = k}} 1 \Big)^{\varkappa} \le 1,01 . 2^{\varkappa-1} P^2 (\operatorname{Log} P)^{\varkappa-1}$.

D'après l'inégalité de Hölder, il suffit de vérifier l'inégalité pour $\varkappa = 1$ et $\varkappa = 2$. Le cas $\varkappa = 1$ est banal (simple interversion de sommations) ; pour $\varkappa = 2$, on a

$$\sum (\ldots)^2 = \sum_{k \le P^2} \Big( \sum_{\substack{d \mid k \\ d \le P,\ k/d \le P}} 1 \Big)^2$$

$$= \sum_{k \le P^2} \sum_{\substack{d_1 \mid k \\ d_1 \le P,\ k \le P d_1}} \sum_{\substack{d_2 \mid k \\ d_2 \le P,\ k \le P d_2}} 1$$

$$\le 2 \sum_{d_1 \le P} \sum_{d_2 \le d_1} \sum_{\substack{n \le P d_2 \\ n \equiv 0 [[d_1, d_2]]}} 1$$

$$\le 2P \sum_{d_1 \le P} \sum_{d_2 \le d_1} \frac{d_2}{[d_1, d_2]}$$

$$\le 2P \sum_{d_1 \le P} \sum_{\ell \mid d_1} \sum_{m \le (d_1)/\ell} \frac{m\ell}{d_1 m} \le 2P \sum_{d_1 \le P} d(d_1) ,$$

et on applique le cas $j = 1$ de 3.2.2.

La majoration suivante est démontrée dans [Bala] ; elle ne servira pas dans la version ultérieure

3.2.20. $\displaystyle\sum_{k>0} \Big( \sum_{\substack{h_1 \le P \quad h_2 \le P^2/4 \\ h_1 h_2 = k}} 1 \Big)^4 \le \frac{P^3}{12} (\operatorname{Log} P + 3)^{11} \le 0,11\ P^3 (\operatorname{Log} P)^{11}$

3.3. - <u>L'inégalité de Hua</u>

On notera $I_o = ]\, P - \varepsilon/2\ ,\ 2P - \varepsilon/2\, ]$ .

<u>1ère étape</u>. - Par l'égalité de Parseval, on a

3.3.1. $\displaystyle\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^2 \, d\alpha = \sum_{x \in I_o} 1 = P$ .

2ème étape. - On a

$$3.3.2. \qquad |S_\varepsilon(\alpha)|^2 = \sum_{x,y} e(\alpha((2x+\varepsilon)^4-(2y+\varepsilon)^4))$$

$$= \sum_{|h_1|<P} \sum_{y\in I_1} e(\alpha\, Q_1(h_1,y))$$

où

$$3.3.3. \qquad I_1 = I_1(h_1) = I_o \cap (I_o - h_1)$$

$$Q_1(h_1,y) = (2(y+h_1)+\varepsilon)^4 - (2y+\varepsilon)^4$$

$$3.3.4. \qquad = 8h_1((2y+\varepsilon)^3 + 3h_1(2y+\varepsilon)^2 + 4h_1^2(2y+\varepsilon) + 2h_1^3)$$

on peut donc écrire

$$3.3.5. \qquad |S_\varepsilon(\alpha)|^2 = \sum_{h\in\mathbb{Z}} c_{h,1}\, e(\alpha h) \quad ,$$

où

$$3.3.6. \qquad c_{h,1} = \#\{(h_1,y)/|h_1|<P,\ y\in I_1,\ Q_1(h_1,y) = h\} \quad .$$

Si $h = 0$, on a $c_{0,1} = \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^2\, d\alpha$ et donc, par 3.3.1.

$$3.3.7. \qquad c_{0,1} = P \quad ,$$

Si $h \neq 0$, il résulte de 3.3.4. que $h_1$ est du signe de $h$ et on a donc

$$3.3.8. \qquad c_{h,1} \leq \#\{(h_1,y)/h\,h_1>0,\ |h_1|<P,\ y\in I_1,\ Q_1(h_1,y)=h\} \quad .$$

Pour $h_1$ positif donné, la fonction $y \longmapsto (2y+\varepsilon)^3 + 3h_1(2y+\varepsilon)^2 + 4h_1^2(2y+\varepsilon) + 2h_1^3$ est strictement croissante sur $I_o$ ; on a

$$3.3.9. \qquad \sum_{h>0} c_{h,1}^2 \leq \#\{(k_1,h_1,y),\ 0<k_1<P,\ 0<h_1<P,\ y\in I_1,\ k_1 | Q_1(h_1,y)\} .$$

Il résulte de 3.3.5. que l'on a

$$3.3.10. \qquad c_{-h,1} = c_{h,1}$$

d'où l'on déduit

$$3.3.11. \qquad \sum_{h\neq 0} c_{h,1}^2 \leq \#\{(k,x,y)/0<k<P,\ x\in I_o,\ y\in I_o,\ (2x+\varepsilon)^4 \equiv (2y+\varepsilon)^4\ (\mathrm{mod.}\, k)\}$$

$$3.3.12. \qquad \leq \#\{(k,\ell,m)/0<k<P,\ \ell\in]2P,4P],\ m\in]2P,4P],\ \ell^4 \equiv m^4\,[k]\} .$$

D'après 3.3.5. et l'égalité de Parseval, on a

3.3.13. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^4 \, d\alpha = \sum_h c_{h,1}^2 \, .$$

Finalement, d'après 3.3.13, 3.3.7, 3.3.12. et la proposition 3.1.

3.3.14. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^4 \, d\alpha \leq 60\, P^2 (\mathrm{Log}\, P)^4 \, .$$

On remarquera qu'il résulte du travail de G. Greaves ([Grea]) que l'on a en fait $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^4 \, d\alpha \ll P^2$ ; la méthode de Greaves, quoiqu'effective, conduirait à des valeurs de la constante impliquée bien supérieures à $60.(170)^4$ .

<u>3ème étape</u>. - D'une part, on écrit

3.3.15. $$|S_\varepsilon(\alpha)|^4 = \sum_k b_{k,2}\, e(\alpha k)$$

et ainsi, on a

3.3.16. $$b_{0,2} = \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^4 \, d\alpha$$

et, par la relation de Parseval

3.3.17. $$\sum_k b_{k,2}^2 = \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 \, d\alpha \, .$$

D'autre part, en appliquant l'inéfalité de Cauchy-Schwarz à 3.3.2, on a

$$|S_\varepsilon(\alpha)|^4 \leq 2P \sum_{|h_1|<P} \Big| \sum_{y \in I_1} e(\alpha\, Q_1(h_1, y)) \Big|^2$$

3.3.18. $$\leq 2P \sum_{|h_1|<P} \; \sum_{|h_2|<P-|h_1|} \; \sum_{y \in I_2} e(\alpha\, Q_2(h_1, h_2, y))$$

où

3.3.19. $$I_2 = I_2(h_1, h_2) = I_1 \cap (I_1 - h_2)$$

$$Q_2(h_1, h_2, y) = Q_1(h_1, y+h_2) - Q_1(h_1, y)$$

3.3.20 $$= 16(3(2y+\varepsilon+h_1+h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2) \cdot h_1 \cdot h_2 \, .$$

On peut donc écrire

3.3.21. $$|S_\varepsilon(\alpha)|^4 \leq 2\,P \sum_{h \in \mathbb{Z}} c_{h,2}\, e(\alpha h) \, ,$$

où

3.3.22. $$c_{h,2} = \# \{(h_1, h_2, y) / |h_1| + |h_2| < P \,,\ y \in I_2 \,,\ Q_2(h_1, h_2, y) = h\} \,.$$

Il résulte de (26) que $Q_2(h_1, h_2, y)$ ne s'annule que si $h_1$ ou $h_2$ est nul, et on a donc

3.3.23. $$c_{0,2} \leq 4\, P^2 \,.$$

Si $h$ est non nul et $h \not\equiv 0\ [16]$, on a $c_{h,2} = 0$. Si $h$ est non nul et congru à $0$ modulo 16, on pose $h = 16\ell$ ; alors $c_{16\ell,2}$ est au plus égal au double du nombre $d_3(|\ell|)$ de façons d'écrire $|\ell|$ comme produit ordonné de trois entiers positifs : soit en effet $|\ell| = uvw$ une telle décomposition ; on a $h_1 = \pm u$, $h_2 = \pm \frac{h}{|h|} v$ et on doit résoudre $3(2y+\varepsilon+h_1+h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2 = w$ avec $2y+\varepsilon+h_1+h_2 > 0$, ce qui admet au plus une solution ; on a donc

3.3.24. $$\sum_{h\neq 0} c_{h,2}^2 \leq 2 \sum_{\substack{0<|h_1|+|h_2|<P \\ h_1 h_2 \neq 0}} \ \sum_{y\in I_2} d_3\left(\tfrac{1}{16}\,|Q_2(h_1, h_2, y)|\right) \,.$$

Soit maintenant $B_\varepsilon(P)$ une quantité vérifiant les relations 3.0.1. D'après 3.3.15. et 3.3.21, on a :

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8\, d\alpha \leq 2P \sum_{h\in\mathbb{Z}} c_{h,2}\, b_{h,2}$$

$$\leq 2P\,(c_{0,2}\, b_{0,2} + \sum_{h\neq 0} c_{h,2}\, b_{h,2})$$

3.3.25. $$\leq 2P\,(c_{0,2}\, b_{0,2} + (\sum_{h\neq 0} c_{h,2}^2)^{\frac12} (\sum_h b_{h,2}^2)^{\frac12}) \,.$$

On utilise alors 3.3.16. et 3.3.17. pour l'évaluation des $b_{h,2}$, 3.3.23, 3.3.24. et 3.0.2. pour celle des $c_{h,2}$ ; il vient

3.3.26. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8\, d\alpha - 2P\, B_\varepsilon^{\frac12} \left(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 d\alpha\right)^{\frac12} - 8\, P^3 \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^4\, d\alpha < 0$$

où l'on a posé

3.3.27. $$B_\varepsilon = B_\varepsilon(P)$$

par 3.3.14. on en déduit

$$\left(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 d\alpha\right)^{\frac12} \leq P\, B_\varepsilon^{\frac12} + \sqrt{P^2 B_\varepsilon + 8P^3 .\, 60.\, P^2 (\mathrm{Log}\, P)^4}$$

3.3.28. $$\leq P\, B_\varepsilon^{\frac12}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{480\; P^3 (\mathrm{Log}\; P)^4}{B_\varepsilon}}\right)$$

en utilisant 3.0.1, on a, pour $P \geq 10^{74}$

3.3.29. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 \, d\alpha \leq (4 + 10^{-6}) .\, B_\varepsilon(P) . P^2 \quad .$$

$4^{\text{ème}}$ étape. - Comme à l'accoutumée, on écrit

3.3.30. $$|S_\varepsilon(\alpha)|^8 = \sum_k b_{k,3}\, e(\alpha k)$$

et ainsi on a

3.3.31. $$b_{0,3} = \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 \, d\alpha$$

et, par la relation de Parseval

3.3.32. $$\sum_k b_{k,3}^2 = \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} \, d\alpha \quad .$$

Avec les notations utilisées dans la formule 3.3.18, on va noter, pour k entier

3.3.33. $$\mathcal{S}(k) = \mathcal{S}_P(k) = \{(h_1, h_2)/h_1 h_2 = k \,,\; 0 < |h_1| + |h_2| < P\} \quad .$$

Si $\mathcal{S}(k)$ est non vide, on choisira un triplet $(h_1, h_2, I_2)$, noté $(h_1(k), h_2(k), I_2(k))$ tel que

3.3.34. $$(h_1, h_2) \in \mathcal{S}(k) \;, \qquad I_2 = I_2(h_1, h_2)$$

et qui maximise

$$\left| \sum_{y \in I_2} e(\alpha\; Q_2(h_1, h_2, y)) \right| \quad .$$

Si $\mathcal{S}(k)$ est vide, ce qui est notammentle cas si $k > \frac{P^2}{4}$, on pose

3.3.35. $$(h_1(k), h_2(k), I_2(k)) = (1, 1, \emptyset) \quad .$$

On note maintenant

3.3.36. $$E(k) = E_p(k) = \# \, \mathcal{S}_P(k)$$

et

3.3.37. $$T_\varepsilon(\alpha) = |S_\varepsilon(\alpha)|^4 - 8P^3 \leq |S_\varepsilon(\alpha)|^4 - 2P^2 E(0) \quad .$$

De l'inégalité 3.3.18. on déduit

3.3.38. $$T_\varepsilon(\alpha) \leq 2P \sum_{k\neq 0} E(k) \, \Big| \sum_{y \in I_2(k)} e(\alpha\, Q_2(h_1(k), h_2(k), y)) \Big|$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour tout réel $\gamma \in [0,1]$

3.3.39. $$|T_\varepsilon(\alpha)|^2 \leq 4P^2 \Big(\sum_{k\neq 0} E^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big(\sum_{k\neq 0} E^{2\gamma}(k) \Big| \sum_{y\in I_2(k)} e(\alpha Q_2(h_1(k), h_2(k), y)\Big|^2\Big)$$

on écrit alors

3.3.40. $$\Big| \sum_{y\in I_2(k)} e(\alpha Q_2(h_1(k), h_2(k), y))\Big|^2 = \sum_{h_3} \sum_{y\in I_3} e(\alpha\, Q_3(k, h_3, y))$$

où

3.3.41. $$0 < |h_1(k)| + |h_2(k)| + |h_3| < P \quad ,$$

3.3.42. $$I_3 = I_3(k, h_3) = I_2(k) \cap (I_2(k) - h_3)$$

et

3.3.43. $$\begin{aligned} Q_3(k, h_3, y) &= Q_2(h_1(k), h_2(k), y + h_3) - Q_2(h_1(k), h_2(k), y) \\ &= 192 k h_3 (2y + \varepsilon + h_1(k) + h_2(k) + h_3) \end{aligned}$$

on peut donc écrire

3.3.44. $$|T_\varepsilon(\alpha)|^2 \leq 4P^2 \Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big) \Big(\sum_{h\in\mathbb{Z}} c_{h,3}\, e(\alpha h)\Big)$$

où

3.3.45. $$c_{h,3} = \sum_{k\neq 0} E_P^{2\gamma}(k) \operatorname{Card}\{(h_3, y) \,/\, |h_1(k)| + |h_2(k)| + |h_3| < P \ , \ y \in I_3(k, h_3), \ Q_3(k, h_3, y) = h\} \ .$$

Notons dès maintenant que l'on a

3.3.46. $$0 \leq c_{0,3} \leq P \sum_{k\neq 0} E_P^{2\gamma}(k)$$

3.3.47. $$c_{h,3} = 0 \quad \text{si} \quad 192 \nmid h$$

et

3.3.48. $$0 \leq c_{192\ell, 3} \leq 2 \sum_{0<k\leq \frac{1}{4}P^2} d^{2\gamma}(k) \sum_{0<h\leq P} \ \sum_{\substack{2P<z\leq 4P \\ khz = |\ell|}} 1 \quad .$$

De 3 3.37. et 3.3.44. on déduit

3.3.49. $$|S_\varepsilon(\alpha)|^8 \le 4\,P^2\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big(\sum_{h\in\mathbb{Z}} c_{h,3}\, e(\alpha h)\Big) + 16\,P^3 |S_\varepsilon(\alpha)|^4 .$$

D'après 3.3.49. et 3.3.30, on a

3.3.50. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \le 4\,P^2\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big(\sum_h c_{h,3}\, b_{h,3}\Big) + 16\,P^3 \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{12} d\alpha .$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz à $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^4 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 d\alpha$ et celle de Cauchy-Schwarz à $\sum_{h\neq 0} c_{h,3} b_{h,3}$, on a

3.3.51. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \le 4\,P^2\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big\{c_{0,3}\,b_{0,3} + \Big(\sum_{h\neq 0} c_{h,3}^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{h\neq 0} b_{h,3}^2\Big)^{\frac12}\Big\}$$
$$+ 16\,P^3\Big(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 d\alpha\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha\Big)^{\frac12} .$$

D'après 3.3.32, 3.3.31. et 3.3.29, on en déduit

3.3.52. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \le \Big(4\,P^2\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big(\sum_{h\neq 0} c_{h,3}^3\Big)^{\frac12} + 32{,}1\;P^4\, B_\varepsilon(P)^{\frac12}\Big)$$
$$\Big(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha\Big)^{\frac12} + 16{,}1\;P^4\, B_\varepsilon(P)\; c_{0,3}\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big) .$$

De l'inégalité

3.3.53. $$2+x+2\sqrt{1+x} \le 2+x+2\Big(1+\frac{x}{2}\Big) = 4+2x , \quad \text{valable pour } x \ge 0 ,$$

on déduit

3.3.54. $$\forall a \ge 0 ,\ \forall b \ge 0 : \ (b+\sqrt{b^2+a})^2 \le 4b^2 + 2a ,$$

il résulte alors de 3.3.52. et 3.3.54. que l'on a

3.3.55. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} d\alpha \le \Big(4\,P^2\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big(\sum_{h\neq 0} c_{h,3}^2\Big)^{\frac12} + 32{,}1\;P^4\, B_\varepsilon(P)^{\frac12}\Big)^2 +$$
$$+ 32{,}2\;P^4\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\, B_\varepsilon(P)\; c_{0,3} .$$

On majore alors les $c_{h,3}$ par 3.3.47. et 3.3.48 ; on a

3.3.56. $$\sum_{h\neq 0} c_{h,3}^2 \le 8 \sum_{1\le \ell \le P^4} \Big( \sum_{\substack{0<h\le P \\ hyk=\ell}} \ \sum_{2P<y\le 4P} \ \sum_{0<k\le \frac14 P^2} d(k)^{2\gamma} \Big)^2 .$$

D'après les relations 3.2.17, on a

$$3.3.57 \qquad \sum_{h\neq 0} c_{h,3}^2 \leq \begin{cases} \dfrac{227.3^{8\gamma}}{1+2\gamma}\; P^4\,(\mathrm{Log}\,P)^{5+12\gamma} & \text{pour} \quad 0\leq\gamma\leq\frac{1}{4} \\ \dfrac{1824}{1+2\gamma}\; P^4\,(\mathrm{Log}\,P)^{4+16\gamma} & \text{pour} \quad \frac{1}{4}\leq\gamma\leq\frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

Il résulte de 3.3.57. et 3.2.19. que l'on a

$$4P^2\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big(\sum_{h\neq 0} c_{h,3}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 16{,}16\; 2^{1-2\gamma}(\mathrm{Log}\,P)^{1-2\gamma}\Big(\sum_{h\neq 0} c_{h,3}^2\Big)^{\frac{1}{2}} P^4$$

$$3.3.58. \qquad \leq \begin{cases} 487.3^{4\gamma}.\,2^{-2\gamma}(1+2\gamma)^{-\frac{1}{2}}\,P^6(\mathrm{Log}\,P)^{7/2+4\gamma} & \text{pour} \quad 0\leq\gamma\leq\frac{1}{4} \\ 1381\;\; 2^{-2\gamma}(1+2\gamma)^{-\frac{1}{2}}\;P^6\,(\mathrm{Log}\,P)^{3+6\gamma} & \text{pour} \quad \frac{1}{4}\leq\gamma\leq\frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

Il résulte de 3.3.46. et 3.2.19. que l'on a

$$3.3.59. \qquad 32.2\Big(\sum_{k\neq 0} E_P^{2-2\gamma}(k)\Big)\, c_{0,3} \leq 66.2^{-\gamma}\;P^5\,(\mathrm{Log}\,P)^{1-2\gamma}\ .$$

On note finalement que les deux majorations 3.3.58. sont supérieures à $P^6$ et donc à $10^{12}\,B_\varepsilon(P)^{\frac{1}{2}}.P^4$, par 3.0.1. Le théorème 3 en résulte.

## § 4. - Majoration de $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\,d\alpha$

Ayant introduit avec François Dress une méthode alternative beaucoup plus puissante pour majorer la somme de diviseurs introduite dans 3.0.2, je ne donne qu'une version brute de ma première méthode.

THÉORÈME 4. - Soit $P > e^{100}$ ; pour $\varepsilon = 0$ ou $1$, on a :

$$4.0.1. \qquad \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\,d\alpha \leq 764\,P^{12}\,(\mathrm{Log}\,P)^{13,16}\ .$$

4.1. - Nombre de solutions de la congruence $3y^2 \equiv a \pmod{d}$

PROPOSITION 4.1. - Soit $\rho_a(d)$ le nombre de solutions de la congruence

4.1.1. $\qquad 3y^2 \equiv a \pmod{d}$ .

La fonction $\rho_a(.)$ est multiplicative, et dans les cas précisés ci-dessous, la suite $\ell \longmapsto \rho_a(p^\ell)$ est majorée terme à terme par

| | | |
|---|---|---|
| 4.1.2. | $2, 2, 2, 2, \ldots$ | si $p \geq 5$ et $p^2 \nmid a$ |
| 4.1.3. | $1, p, 2p, p^2, 2p^2, p^3, 2p^3, \ldots$ | si $p \geq 5$ et $p^2 \mid a$ |
| 4.1.4. | $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ | si $p = 3$ et $p \nmid a$ |
| 4.1.5. | $3, 3, 9, 18, 27, 54, 81, 162, \ldots$ | si $p = 3$ et $p \mid a$ |
| 4.1.6. | $1, 2, 4, 4, 4, 4, \ldots$ | si $p = 2$ et $p \nmid a$ |
| 4.1.7. | $1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, \ldots$ | si $p = 2$ et $p \mid a$ . |

Démonstration. - Soit $p$ un nombre premier différent de 2 et 3 ;

. on suppose d'abord que $p^2 \nmid a$

- si $p \mid a$, la suite des $\rho_a(p^\ell)$ pour $\ell \geq 1$ est $1, 0, 0, 0, \ldots$
- si $p \nmid a$, la congruence $3y^2 \equiv a \pmod{p}$ a au plus deux solutions ;

par récurrence sur $\ell$, on montre (développement limité $p$-adique) qu'au-dessus de toute solution de $3y^2 \equiv a \pmod{p^\ell}$, il y a exactement une solution de $3y^2 \equiv a \pmod{p^{\ell+1}}$ ; 4.1.2. en résulte.

. on suppose maintenant que $p^2 \mid a$. Soit $m$ avec $p^m \| a$

- pour $\ell \leq m$, les solutions de $3y^2 \equiv a \pmod{p^\ell}$ sont les $y$ mod. $p^\ell$ divisibles par $p^{[(\ell+1)/2]}$ ; il y a donc $p^{\ell-[(\ell+1)/2]} = p^{[\ell/2]}$ solutions, d'où 4.1.3. dans ce cas ;

- pour $\ell > m$ et $m$ impair, la congruence $3y^2 \equiv a \pmod{p^\ell}$ n'a pas de solutions, d'où encore 4.1.3 ;

- pour $\ell > m$ et $m$ pair, résoudre la congruence $3y^2 \equiv a \pmod{p^\ell}$ revient à chercher les $y$ modulo $p^\ell$ qui satisfont une congruence de la forme $y^2 \equiv b \pmod{p^{\ell-m/2}}$ avec $p \nmid b$ ; par l'argument utilisé pour démontrer 4.1.2, on voit qu'il y a au plus $2p^{m/2}$ solutions ; 4.1.3. en résulte.

On considère maintenant le cas où $p = 3$ ;

. si $3 \nmid a$, la congruence $3y^2 \equiv a \pmod{3^\ell}$ est clairement impossible pour $\ell \geq 1$ ; 4.1.4. en résulte.

. si $3 \mid a$, on pose $a' = 3a$ et le nombre de solutions de $3y^2 \equiv a \pmod{3^\ell}$ est trois fois le nombre de solutions de $y^2 \equiv a' \pmod{3^{\ell-1}}$ ; la relation 4.1.5. se démontre alors exactement de la même façon que 4.1.3.

On considère maintenant le cas où $p = 2$ ;

. si $2 \nmid a$, la relation 4.1.6. se déduit directement du théorème 72 de [Nage].

. si $2 \mid a$, on définit l'entier positif $m$ tel que $2^m \| a$

- pour $\ell \leq m$, la congruence $3y^2 \equiv a\ [2^\ell]$ a exactement $2^{[\ell/2]}$ solutions, par un raisonnement déjà effectué, d'où 4.1.7. dans ce cas ;

- pour $\ell > m$ et $m$ impair, la congruence $3y^2 \equiv a\ [2^\ell]$ n'est pas résoluble, et on a encore 4.1.7 ;

- pour $\ell > m$ et $m$ pair, le nombre de solutions de $3y^2 \equiv a\ [2^\ell]$ est $2^{m/2}$ fois le nombre de solutions de la congruence $3y^2 \equiv (a.2^{-m})\ [2^{\ell-m}]$, que l'on majore par 4.1.6 ; 4.1.7. en résulte.

Je remercie François Dress qui a attiré mon attention sur une erreur commise dans une version antérieure de cette proposition.

4.2. - Nombre de représentations par la forme $3y^2 + u^2 + v^2$

PROPOSITION 4.2. - Soient $n$ un entier $> 10^{200}$ et $r(n)$ le nombre de triplets $y, u, v$ tels que l'on ait

4.2.1. $\quad 3y^2 + u^2 + v^2 = n$.

On a

4.2.2. $\quad r(n) \leq 2,6 \sqrt{n}\,(\mathrm{Log}\, n)^2 (\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, n)$.

Démonstration. - On a

$$r(n) \leq \sum_{3y^2 \leq n} d(n-3y^2)$$

$$\leq 2 \sum_{3y^2 \leq n} \sum_{\substack{d \mid n-3y^2 \\ d \leq \sqrt{n}}} 1$$

4.2.3. $$\leq 2 \sum_{d \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{y \leq (n/3)^{\frac{1}{2}} \\ 3y^2 \equiv n \pmod{d}}} 1 \ .$$

En notant $\rho_n(d)$ le nombre de solutions de $3y^2 \equiv n \pmod{d}$

$$r(n) \leq 3,16\sqrt{n} \sum_{d \leq \sqrt{n}} \frac{\rho_n(d)}{d} ,$$

d'où

4.2.4. $$r(n) \leq 3,16\sqrt{n} \prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 + \frac{\rho_n(p)}{p} + \frac{\rho_n(p^2)}{p^2} + \dots\right) .$$

Il résulte de la proposition 4.1. que l'on a

4.2.5. $$1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\rho_n(p^\ell)}{p^\ell} \leq \begin{cases} \chi(p)\ (1-\frac{1}{p})^{-2} & \text{si } p \nmid n \\ \chi(p)\ (1-\frac{1}{p})^{-3} & \text{si } p \mid n , \end{cases}$$

où

4.2.6. $\chi(2) = 0,625$ , $\chi(3) = 8/9$ , $\chi(p) = 1$ pour $p \geq 5$ .

On déduit de 4.2.4, 4.2.5. et 4.2.6, que l'on a :

4.2.7. $$r(n) \leq 1,76\sqrt{n} \prod_{p \leq \sqrt{n}} (1-\frac{1}{p})^{-2} \prod_{p \mid n} (1-\frac{1}{p})^{-1} .$$

Par la relation (3.2.9.) de [R-S], on en déduit

4.2.8. $$r(n) \leq 1.4\sqrt{n}\, (\mathrm{Log}\ n)^2 \prod_{p \mid n} (1-\frac{1}{p})^{-1} .$$

Il nous reste à majorer le produit sur les diviseurs de $n$ ; soit $k$ maximal tel que le produit des $k$ premiers entiers soit au plus égal à $n$ ; pour $n \geq 10^{200}$, on a $k \geq 62$ et le $k^{\text{ième}}$ nombre premier $p_k$ est $\geq 286$ . Par la relation (3.16) de [R-S], on a

4.2.9. $$p_k (1 - \frac{1}{286}) \leq p_k (1 - \frac{1}{\mathrm{Log}\ p_k}) \leq \theta(p_k) \leq \mathrm{Log}\ n \ .$$

Par 4.2.9. et la relation (3.2.9.) de [R-S], on a

$$4.2.10.\quad \prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \leq \prod_{p\leq p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} < e^{c}\operatorname{Log} p_k\left(1+\frac{1}{\operatorname{Log}^2 p_k}\right)$$

$$< 1{,}032\, e^{c}\operatorname{Log}\operatorname{Log} n\left(1-\frac{\operatorname{Log}(1-1/286)}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n}\right) \leq 1{,}84 \operatorname{Log}\operatorname{Log} n\ ,$$

d'où la proposition 4.2. ∎

4.3. - <u>Majoration d'une somme de diviseurs</u>

On commence par donner dans la proposition 4.3. une quantité admissible pour le $B_\varepsilon(P)$ introduit dans la section 3.0. On remarquera que les relations 4.3.1. et 4.3.2. sont respectivement identiques à 3.0.2. et 3.0.3.

PROPOSITION 4.3. - <u>Pour</u> $\varepsilon = 0$ <u>ou</u> 1 <u>et</u> $P \geq 10^{100}$, <u>on a</u>

$$4.3.1.\quad 2\sum_{h,k,y}^{(4.3.2)} d_3\left(\left|(3(2y+\varepsilon+h+k)^2+h^2+k^2)\,hk\right|\right) \leq 7P^3(\operatorname{Log} P)^{13}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} P)^{\frac{1}{2}}$$

<u>où la condition de sommation est</u>

$$4.3.2.\quad \begin{cases} hk\neq 0\ ,\ 0<|h|+|k|<P\ , & P-\varepsilon/2<y\leq 2P-\varepsilon/2\ , \\ P-\varepsilon/2<y+h+k\leq 2P-\varepsilon/2\ . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. - Par la sous-multiplicativité de la fonction $d_3$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$4.3.3.\quad 2\sum_{h,k,y} d_3(\dots) \leq 2\left(\sum_{h,k,y} d_3^2(|h|)\,d_3^2(|k|)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{h,k,y} d_3^2(|3(2y+\varepsilon+h+k)^2+h^2+k^2|)\right)^{\frac{1}{2}}$$

et appelons $\Sigma_1$ la première somme du second membre et $\Sigma_2$ la seconde ; par la relation 3.2.4, avec $j=2$, on a

$$4.3.4.\quad \Sigma_1 \leq 4\left(\sum_{P-\varepsilon/2<y\leq 2P-\varepsilon/2} 1\right)\left(\sum_{0<h\leq P} d_3^2(h)\right)\left(\sum_{0<k\leq P} d_3^2(k)\right)$$

$$\leq 4.P.\left(\frac{9}{6^4}\right)^2.\ P^2(\operatorname{Log} P+8)^{16} \leq \frac{1}{3000}\ P^3(\operatorname{Log} P)^{16}\ .$$

En conservant à $r(n)$ sa signification de la section 4.2, on a :

$$4.3.5.\quad \Sigma_2 \leq 4\sum_{13P^2<n\leq 49P^2} r(n)\, d_3^2(n)\ ,$$

Par la proposition 4.2, on a :

4.3.6. $$\Sigma_2 \leq 4.2.6.7.P.(\mathrm{Log}\,49\,P^2)^2(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,49\,P^2) \sum_{n\leq 49P^2} d_3^2(n)$$

et par la relation 3.2.4. avec $j=2$, on en déduit

4.3.7. $$\Sigma_2 \leq 99,1\;P^3\,(\mathrm{Log}\,P)^2(\mathrm{Log}\,49\,P^2+8)^8(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,49\,P^2)$$
$$\leq C\;P^3\,(\mathrm{Log}\,P)^{10}\;\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,P\;,$$

où

4.3.8. $$C = 99,1.\,2^8\left(1+\frac{\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,7}{230}\right)^8\left(1+\mathrm{Log}\,2+\mathrm{Log}\left(1+\frac{47}{230}\right)\right)/5,4 \leq 36\,200\;.$$

et la proposition 4.3.1. résulte alors de 4.3.3, 4.3.4. et 4.3.8.

4.4. - <u>Majoration de l'intégrale</u> $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\,d\alpha$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4. Grâce à la proposition 4.3. et au fait que $P \geq 10^{100}$, on vérifie facilement que le choix

4.4.1. $$B_\varepsilon(P) = 7\,P^3\,(\mathrm{Log}\,P)^{13}\,(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,P)^{\frac{1}{2}}$$

est compatible avec les conditions 3.0.1. et 3.0.2. On est donc en mesure d'appliquer le théorème 3. Il résulte de 3.0.6. que l'on a

4.4.2. $$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}d\alpha \leq 238\,750\,P^{12}(\mathrm{Log}\,P)^{12}+329\,P^{12}(\mathrm{Log}\,P)^{13}(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,P)^{\frac{1}{2}}$$

et le théorème 4 résulte de 4.4.2. et de ce que $P \geq 10^{100}$.

## §5. - <u>Contribution des arcs mineurs</u>

A la modification de la taille des arcs majeurs près, nous suivons la méthode de Balasubramanian (cf. [Bala]).

THÉORÈME 5. - <u>Avec les notations introduites dans la section</u> 2.0, <u>on a pour tout</u> $\alpha \in \mathfrak{m}$ ; <u>et</u> $N \geq 10^{625}$

5.0.1. $$|S_\varepsilon(\alpha)| \leq 2\,P^{29/32}\,(\mathrm{Log}\,P)^{15/32}\;.$$

## 5.1. - La méthode d'approximation

PROPOSITION 5.1. - Soit $\alpha$ un nombre réel tel qu'il existe un triplet d'entiers $(P, q, a)$ satisfaisant

5.1.1. $\qquad P \geqslant 10^{74}\,,\quad P^{\frac{1}{2}} \leq q \leq 4.10^{6} P\,,\quad (a,q)=1\,,\quad |\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{975}{q\,P^{3}}$

on a, pour $\varepsilon = 0$ ou $1$

5.1.2. $\qquad |S_{\varepsilon}(\alpha)| \leq 20\ P^{7/8}$ .

Démonstration. - Il résulte de la relation 2.4.2. de la proposition 2.4. que l'on a

5.1.3. $\qquad |S_{\varepsilon}(\alpha) - \frac{1}{2q}\, G_{\varepsilon}(a, q\,; 0)\,.\,I(\beta, N)| \leq 2,9.10^{6}\, q^{\frac{1}{4}}\, P^{\frac{1}{2}} + 70\, q^{3/4}(\mathrm{Log}\ q+1)$ .

On utilise alors la proposition 2.2.

5.1.4. $\qquad |\, G_{\varepsilon}(a, q\,; 0)\,| \leq 18\ q^{3/4}$

et la majoration triviale de l'intégrale $I(\beta, N)$, définie en 2.4.1.

5.1.5. $\qquad |\, I(\beta, N)| \leq 2P_{o} \leq 2P+1$ .

On en déduit

5.1.6.
$$\begin{aligned} |S_{\varepsilon}(\alpha)| &\leq 18,5\ P\, q^{-\frac{1}{4}} + 2,9.10^{6} q^{\frac{1}{4}}\, P^{\frac{1}{2}} + 70\ q^{3/4}(\mathrm{Log}\ q+1) \\ &\leq 18,5\ P^{7/8} + 1,3.10^{8}\, P^{3/4} + 7.10^{6}\, P^{3/4}(\mathrm{Log}\,P+17) \\ &\leq 19\ P^{7/8} + 8.10^{6}\ P^{3/4}\ (\mathrm{Log}\ P) \\ &\leq 20\ P^{7/8}\ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 5.2. - La méthode de Weyl-Balasubramanian

Modulo les modifications que nous avons introduites dans la définition des sommes trigonométriques $S_{\varepsilon}(\alpha)$ et du découpage de Farey, nous suivons au plus près [Bala].

PROPOSITION 5.2. - Soit $\alpha$ un nombre réel tel qu'il existe un triplet d'entiers $(P, q, a)$ satisfaisant

5.2.1. $\quad P \geq 10^{130},\ 4.10^6\ P < q \leq \dfrac{P^3}{974}\ ,\quad (a, q) = 1\ ,\quad |\alpha - \dfrac{a}{q}| \leq \dfrac{975}{q P^3}$ .

Alors, pour $\varepsilon = 0$ ou $1$, on a

5.2.2. $\quad |S_\varepsilon(\alpha)| \leq 2\ P^{29/32}\ (\mathrm{Log}\ P)^{15/32}$ .

On commence par établir deux lemmes techniques :

LEMME 5.2.1. - Sous les conditions de la proposition 5.2. on note

5.2.3. $\quad q' = \dfrac{q}{(384, q)}$ .

Pour tout intervalle $I$ contenant au plus $q'$ entiers positifs au plus égaux à $P^{3/4}$, on a

5.2.4. $\quad \sum_{n \in I} \min\left(P\ ,\ \dfrac{1}{2\,\|384\, n\, \alpha\|}\right)^{4/3} \leq 43\ q'\, P^{\frac{1}{3}}$ .

Démonstration. - Il existe $a'$ premier à $q'$ tel que l'on ait

5.2.5. $\quad \dfrac{384\ a}{q} = \dfrac{a'}{q'}$

et on a

5.2.6. $\quad \sum_{n \in I} \min\left(P\ ,\ \dfrac{1}{2\,\|384\, n\, \alpha\|}\right)^{4/3} \leq \sum_{m=0}^{q'-1} \min\left(P\ ,\ \dfrac{1}{2\,\left\|\dfrac{m + \gamma_m}{q'}\right\|}\right)^{4/3}$

où

5.2.7. $\quad |\gamma_m| \leq q'\ .\ 384\ .\ \dfrac{P^3}{4}\ .\ \dfrac{975}{q P^3} \leq 93\ 600$ .

On utilise alors les majorations suivantes :

5.2.8. $\quad m \leq 20\ \dfrac{q'}{P}$ ou $m \geq q' - 20\ \dfrac{q'}{P}$ :

$$\min\left(P\ ,\ \frac{1}{2\,\|\ldots\|}\right) \leq P$$

5.2.9. $\quad \dfrac{q'}{2} - 10^5 < m < \dfrac{q'}{2} + 10^5$ :

$$\min\left(P\ ,\ \frac{1}{2\,\|\ldots\|}\right) \leq 2$$

(car on a alors $\dfrac{q'}{4} \leq m + \gamma_m \leq \dfrac{3q'}{4}$ )

5.2.10. $20\,\frac{q'}{P} \leq m \leq \frac{q'}{2} - 10^5$ :

$$\min\left(P, \frac{1}{2\left\|\frac{m+\gamma_m}{q'}\right\|}\right) \leq \frac{q'}{2(m-10^5)} \leq \frac{q'}{m}$$

(car $20\,\frac{q'}{P} \geq \frac{20.4.10^6}{384} \geq 2.10^5$ )

et de même

5.2.11. $\frac{q'}{2} + 10^5 \leq m \leq q' - \frac{q'}{P}$ :

$$\min\left(P, \frac{1}{2\|\ldots\|}\right) \leq \frac{q'}{q'-m} \quad .$$

On a donc

5.2.12. $$\sum_{m=0}^{q'-1} \min\left(P, \frac{1}{2\|\ldots\|}\right)^{4/3} \leq 40\, q'\, P^{\frac{1}{3}} + 4.10^5 + 2 \sum_{m=20\, q'/P} \left(\frac{q'}{m}\right)^{4/3}$$

$$\leq 40\, q'\, P^{\frac{1}{3}} + 4.10^5 + 2,3\, q' P^{\frac{1}{3}} \,,$$

d'où le lemme 5.2.1. ∎

LEMME 5.2.2. - Avec les notations et les conditions de la proposition 5.2. et du lemme 5.2.1, on a :

5.2.13. $$\sum_{n \leq P^3/27} \Big( \sum_{\substack{d|n \\ n/d \leq P^2/4}} 1 \Big) \min\left(P, \frac{1}{2\|284\,\alpha n\|}\right)$$

$$\leq 0,82\, P^{13/4}\, (\mathrm{Log}\, P)^{11/4} \quad .$$

Démonstration. - On applique l'inégalité de Hölder, la relation 3.2.20. et le lemme précédent ; on a

5.2.14. $$\sum_n \Big( \sum_{d|n} \ldots \Big) \min(\ldots)$$

$$\leq \Big( \sum_n \big( \sum_{d|n} \ldots \big)^4 \Big)^{\frac{1}{4}} \Big( \sum_n \min(\ldots)^{4/3} \Big)^{3/4} \quad .$$

On découpe la seconde somme sur $n$ en sous-sommes sur des intervalles de longueur au plus $q'$

$$5.2.15. \quad \leq \left(\frac{P^3}{12}(\text{Log } P+3)^{11}\right)^{1/4}\left(43\, q'\, P^{\frac{1}{3}}\right)^{3/4}\left(\frac{P^3}{27\,q'}+1\right)^{3/4}$$

$$\leq 0,82\, P^{13/4}(\text{Log } P)^{11/4}. \quad \blacksquare$$

<u>Démonstration de la proposition 5.2</u>. - On commence par remplacer la somme $S_\varepsilon(\alpha)$ par

$$5.2.16. \quad T_o(\alpha) := \sum_{P+1}^{2P} e\left(\alpha(2x+\varepsilon)^4\right),$$

commettant une erreur au plus égal à 2. On a

$$5.2.17. \quad |T_o(\alpha)|^2 = \sum_x \sum_y e\left(\alpha((2y+\varepsilon)^4-(2x+\varepsilon)^4)\right)$$

$$\leq P + 2\,T_1(\alpha)$$

où

$$5.2.18. \quad T_1(\alpha) = \sum_{h_1=1}^{P} \left|\sum_{x=P}^{2P-h_1} e\left(\alpha(64\,h_1 x^3+\ldots)\right)\right|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$5.2.19. \quad |T_1(\alpha)|^2 \leq P\left(\sum_{h_1=1}^{P}\left|\sum_{x=P}^{2P-h_1} e\left(\alpha(64\,h_1\,x^3+\ldots)\right)\right|^2\right)$$

$$\leq P^3 + 2P\;T_2(\alpha),$$

où

$$5.2.20. \quad T_2(\alpha) = \sum_{h_1=1}^{P}\sum_{h_2=1}^{P-h_1}\left|\sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2} e(\alpha(192 h_1 h_2 x^2+\ldots))\right|$$

$$\leq \sum_{1\leq n\leq P^2/4}\left(\sum_{\substack{d|n\\ d\leq P,\ n/d\leq P}} 1\right)\operatorname*{Max}_{h_1h_2=n}\left|\sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2} e(\alpha(192\,h_1 h_2 x^2+\ldots))\right|.$$

Par Cauchy-Schwarz et la relation 3.2.19, on a

$$5.2.21. \quad |T_2(\alpha)|^2 \leq 2,1\; P^2\,\text{Log } P \sum_{1\leq n\leq P^2/4}\operatorname*{Max}_{h_1h_2=n}\left|\sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2} e(\alpha(192\,h_1 h_2 x^2+\ldots))\right|^2$$

$$\leq 2,1\,P^2\,\text{Log}\,P\left(\frac{P^3}{4}+2\sum_{1\leq n\leq P^2/4}\operatorname*{Max}_{h_1h_2=n}\sum_{h_3=1}^{P-h_1-h_2}\left|\sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2-h_3} e(384\alpha\, h_1 h_2 h_3 x)\right|\right)$$

$$\leq 2,1\,P^2\,\text{Log}\,P\left(\frac{P^3}{4}+2\sum_{1\leq n\leq P^2/4}\operatorname*{Max}_{h_1h_2=n}\sum_{h_3=1}^{P-h_1-h_2}\min\left(P,\frac{1}{2\|384\,\alpha\, h_1 h_2 h_3\|}\right)\right).$$

Etudions la contribution de $\sum_n$ ; on notera que le produit $h_1 h_2 h_3$ est majoré par $P^3/27$ lorsque les $h_i$, ainsi que leur somme, sont dans $[1, P]$ ; par le lemme 5.2.2.

$$5.2.22. \quad \sum_n \leq \sum_{1 \leq m \leq P^3/27} \Big( \sum_{\substack{d \mid m \\ d \leq P,\ \frac{m}{d} \leq \frac{P^2}{4}}} 1 \Big) \min\left(P, \frac{1}{2\|384\,\alpha m\|}\right)$$

$$\leq 0,82\ P^{13/4} (\mathrm{Log}\ P)^{11/4} .$$

On en déduit

$$5.2.23. \quad \frac{P^3}{4} + 2 \sum_n \leq 1,65\ P^{13/4} (\mathrm{Log}\ P)^{11/4}$$

et de 5.2.21. et 5.2.23. on déduit

$$5.2.24. \quad |T_2(\alpha)| \leq 1,87\ P^{21/8} (\mathrm{Log}\ P)^{15/8} .$$

De 5.2.19. et 5.2.24, il vient

$$5.2.25. \quad |T_1(\alpha)| \leq 1,94\ P^{29/16} (\mathrm{Log}\ P)^{15/16} .$$

Et finalement, de 5.2.17. et 5.2.25.

$$5.2.26. \quad |T_o(\alpha)| \leq 1,97\ P^{29/32} (\mathrm{Log}\ P)^{15/32} ,$$

d'où la proposition 5.2. ∎

## 5.3. - Contribution des arcs mineurs

Démonstration du théorème 5. - Par le théorème d'approximation de Dirichlet, pour tout $\alpha$ réel, on peut trouver $q \leq \frac{P^3}{974}$ et a premier à q avec

$$5.3.1. \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{975}{P^3} .$$

Si $\alpha \in \mathfrak{m}$, il existe un tel couple $(a, q)$ avec $q > P^{\frac{1}{2}}$ ; pour $q \leq 4.10^6 P$, on applique alors la proposition 5.1, et pour $q > 4.10^6 P$, la proposition 5.2. Le théorème 5 en résulte.

## §6. - Démonstration du résultat principal

Démonstration du théorème. - Soit N un entier supérieur à $10^{625}$. On utlise les notations introduites dans la section 2.0. Il résulte de la relation 2.0.2. et du fait que $\nu_o$ appartient à l'intervalle $[85, 151]$, que l'on a

$$6.0.1. \qquad P_o \geq P \geq 10^{155}$$

et les théorèmes 2, 4 et 5 sont applicables.

L'intégrale

$$6.0.2 \qquad \int_{\frac{975}{P^3}}^{1-\frac{975}{P^3}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha$$

qui vaut

$$6.0.3. \qquad \int_0^1 S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha$$

correspond au nombre de représentations de N comme une somme de 19 bicarrés de certains types. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de démontrer que l'on a

$$6.0.4. \qquad \int_0^1 S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha > 0 \quad .$$

D'après le théorème 2, on a

$$6.0.5. \qquad \int_{\mathfrak{M}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \geq 0{,}0065\ P^{15} \quad .$$

D'après l'inégalité de Hölder et les théorèmes 4 et 5, on a

$$\begin{aligned} 6.0.6. \qquad & \left| \int_{\mathfrak{m}} S_o^s(\alpha)\, S_1^t(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \right| \\ & \leq \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^3 . \left(\int_0^1 |S_1(\alpha)|^{16} d\alpha\right)^{\frac{t-3}{16}} \left(\int_0^1 |S_o(\alpha)|^{16} d\alpha\right)^{\frac{s}{16}} \\ & \leq 6\,112\ P^{471/32}\ (\mathrm{Log}\ P)^{466,12/32} \quad . \end{aligned}$$

On vérifie facilement que pour $P \geq 10^{155}$, la contribution des arcs majeurs est supérieure à celle des arcs mineurs, d'où 6.0.4, et donc le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[Bala] R. BALASUBRAMANIAN, On Waring's problem : $g(4) \leq 21$ , Hardy-Ramanujan Journal 2 (1979), 1-31.

[Chen] CHEN Jing-run, Waring's problem for $g(5) = 37$ , Sci. Sinica 13 (1964), 1547-1568.

[Dave] H. DAVENPORT, Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities, Ann. Arbor. Publishers, Ann Arbor, Mich. 1963.

[Desh] J.-M. DESHOUILLERS, Le problème de Waring pour les bicarrés ; le point en 1984 , Séminaire de Théorie Analytique des Nombres de Paris, année 1984-1985, (à paraître).

[Grea] G. GREAVES, On the representation of a number as a sum of two fourth powers, Math. Z. 94 (1966), 223-234.

[Mard] C. MARDJANICHVILI, Estimation d'une somme arithmétique, Doklady Akad. Nauk. CCCP, 22 (1939), 387-389.

[Nage] T. NAGELL, Introduction to Number Theory, Chelsea Publishing Company, 2nd ed. New York 1964.

[R-S] J. B. ROSSER and L. SCHOENFELD, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Ill. J. Math. 6 (1962), 64-94.

[Thom 1] H. E. THOMAS, A numerical approach to Waring's problem for fourth powers, The University of Michigan, Ph. D., 1973.

[Thom 2] H. E. THOMAS, Waring's problem for twenty two biquadrates, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 427-430.

[Vaug] R. C. VAUGHAN, The Hardy-Littlewood method, Cambridge tracts in mathematics ; vol. 80.

(texte reçu le 15 octobre 1985)

-:-:-:-

Jean-Marc DESHOUILLERS
U.E.R. de Math. et Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F - 33405 TALENCE CEDEX