DE FIGURIS SUPERFICIERUM FLUIDARUM.

I. A. S.

SECTIO I.

§. 1. Aliquot anni ſunt, quod ad figuras guttarum animum advertere coepi, quae vel a corporibus pendent, quibus adhaeſere, vel corporibus incumbunt, a quibus non trahuntur, vel leviter: quibus figuris cognitis, facilem fore & expeditum tranſitum ad ſuperficies concavas fluidorum, in vaſis ſtagnantium, a quorum ambitu trahuntur, praevidi. Et quamvis initio, ad naturam fluidorum non ſatis attentus, in figuras inciderim, quas a veris abhorrere, & mens curioſius circumſpiciens, & deinde oculus, detexere: ſecundis tamen curis harum ſuperficierum detexi figuras eas, quas, chartis per occaſiones editis, publice proponere non ſum veritus.

Sed, ſolutae ejusmodi chartae in paucorum manus pervenire ſolent univerſae, ſingulae intelligi vix poſſunt. Et ſpa-

ſpatio circumſcripto ſeparanda ſaepe fuerant arcte inter ſe connexa, quaedam, quae ampliorem expoſitionem exigere videbantur, contrahenda, diducenda alia, quae brevius dici poterant. Tandem ab occaſione ejusmodi folia edendi deſtituto, ne ſic quidem omnia exſequi licuit. Non ergo actum me acturum putavi, ſi denuo retractarem theoremata illa univerſa, atque in unum corpus redigerem, adderem omiſſa, ſolutiones inprimis problematum quorundam, quibus incognitis, hoc doctrinae naturalis caput penitus exhauſtum videri non potuit.

§. 2. Scriptum de figuris iſtis adhuc nullum vidi. Legi tentamina aliqua, ſed iis inſtructa principiis, a quibus, ſi quid mei judicii eſt, commodi expectari nihil potuit. Acuti autem CLAIRAUT librum, cujus in hiſtoria Academiae Pariſinae anni M. DCC. XLI, eo capite, quod, *de Figura telluris*, inſcribitur, fit mentio, quaeſitum nanciſci non potui. Cupiebam autem inſpicere, propter articulos quaſi epiſodicos, quibus doctrinam ſuam ornaſſe, auctor eo loco dicitur, rotunditatem guttarum, concavitatem figurae aquae vaſe vitreo contentae, & convexitatem hydrargyri, elevationemque & depreſſionem fluidorum in tubis capillaribus, ſpectantes. Ea ergo qualia ſint, quantumque cum meis conſentiant, dicere nequeo.

Si eadem problemata aggreſſus eſt profundus Geometra, quae ego agitavi, quin ſoluta dederit, nullus dubito. Id autem ſi ſit, erunt fortaſſe, quibus non injucundum videbitur eadem ab alio alia methodo tractata cognoſcere. Quo in genere cum ſinceriora etiam expectanda ſint ab eo, qui nulla alieni lectione ſua perpolivit; me ea ratio & in quaerendo remiſſiorem fecit, & quod, quibus locis quaeſivi, librum non repererim, conſolata eſt.

§. 3.

§. 3. Fundamenta demonstrationibus notio fluidi substernet ea, quam & experimentis & placidis Physicorum consentaneam esse puto. Quam verbo ut exponam, idem mihi fluidum, quod perfecte molle, est. Cum enim fluida ejus generis, quae hic considerabo, aqua, oleum, hydrargyrum, ex particulis minimis determinatae figurae, magnitudinis atque ponderis, constent; eae quidem particulae vi inter se cohaerent, notabilis magnitudinis, quae superanda est, si earum particularum aliquas a contactu reliquarum prorsus divellere velis: ad quamlibet autem illarum particularum ita movendam, ut a contactu reliquarum non recedat, quamvis alias subinde illarum atque alias attingat, vis minima sufficit, atque pondus particulae ita movendae vix superans. Atqui expedita haec partium mobilitas mollis notionem ita constituit, ut praeter eam nihil in hanc ingrediatur.

§. 4. Tenacitatis autem illius fluidorum, qua partium suarum divulsioni resistunt, caussam, ego quoque *Vim attractricem* nomino, quam cuique fluidi particulae, latenti aliquo modo inesse, vel cum ea conjunctam esse, sumo tanquam demonstratum. Ea vi cum quaelibet illarum particularum in quamlibet aliam agat, quae magis, quam dato aliquo minimo intervallo, ab ea sejuncta non est; magis tamen agit in propinquiorem quam in remotiorem, sed secundum legem, mihi quidem, prorsus incognitam; maxime in eas, quas immediate contingit. Cumque vis particulae, ut omnes ejus generis vires, determinatae cujusdam sit magnitudinis; postquam undique aliis sese contingentibus, vel certe quam fieri potest, proxime sibi adjacentibus, particula aliqua cincta est, ita vis ejus in has sibi firmiter jungendas insumitur, ut eas, quae tantillum extra contactum positae sunt, vel plane non, vel parum admodum, trahat. Generatim autem spatium illud sphaericum, intra quod particulae activitas consistit, adeo exiguum est, ut nullo adhuc sensu percipi potuerit,

§. 5.

§. 5. Jam, si fluidum in vacuo locatum sit, attractionem hanc atque pondus particularum solas vires esse, a quibus ejus superficies vel in statu conservatur, vel mutatur, probatione non indiget. Si aër ambiat fluidum, cujus de superficie quaeritur, vel si hanc premat fluidum quodcunque aliud; an aliquid pressio haec ad mutandam superficiei figuram conferat, quidue illud sit, quod confert, nova quaestio est, nec prorsus negligenda. Verum initio extranea haec in superficiem actio segregabitur.

§. 6. Et quod ad pondus particularum attinet, noti sunt effectus qui ex eo apud fluida sequuntur, ex Hydrostaticis. Nobis hic primaria ejus disciplinae propositio suffecerit, quae ita exponi potest:

Fig. I. Si in vase stagnaverit fluidum infra superficiem horizonti parallelam AB, sumaturque in eo fluido figura quaecunque plana CD, magnitudinis evanescentis; fore vim, qua superficies haec CD urgetur secundum rectam sibi perpendicularem, a pressione fluidi infra AB stagnantis, aequalem ponderi partis ejusdem fluidi, quae contineri potest prismate vel cylindro, cujus basis est CD, altitudo autem verticalis CE vel DF, ab aliquo figurae CD puncto, ad planum horizontale AB, erecta. Idemque verum fore, si, vase inverso, fluidum a quacunque caussa retentum stagnaverit supra planum horizontale AB, nisi quod, quae ibi pressiones dicebantur, hic tractiones nominandae, & CE, DF non jam erigendae, sed demittendae sint. Utroque casu vi, qua figura CD ita urgetur, vim secundum partem adversam opponi, ab ejusdem fluidi pressione vel tractione pendentem, earumque virium actione figuram CD in aequilibrio sisti.

Fig. II.

§. 7. Major scilicet est pressio directa in planum CD, quam pondus fluidi spatio ECDF contenti, quod idem planum secuncundum verticales EC, DF sursum atque deorsum urget, siquidem CD horizonti parallelum non sit. Idque a resistentia est vasis fluidum coercentis, cujus compages si solui ponatur, diffluente fluido, omnis tandem in hoc planum CD actio cessat.

§. 8. Hinc autem prompte sequitur generalis lex virium, ab attractione, vel quacunque alia caussa, pendentium, quibus superficies fluidorum vacuo adjacentes conservari possunt, sive corporibus aliis adhaeserint fluida haec, sive iis incumbant, aut vasis quarumcunque figurarum coerceantur. Quam tamen, quo facilius exponi possit, ad guttas sessiles primum, & ad superficies sursum convexas fluidorum in vasis stagnantium, solas applicabo.

THEOREMA I.

§. 9. *Sit ABC superficies fluidi versus superiora convexa, atque DE planum horizontale utcunque a superficie ABC versus superiora remotum. Conservabitur superficies ABC, si in quamlibet ejus particulam omni dabili minorem* Bb, *vis egerit, premendo introrsum secundum perpendicularem particulae, vel secundum hanc directionem resistendo, aequalis ponderi partis fluidi superficie ABC terminati, quam capit cylindrus vel prisma, cujus basis aequalis est particulae* Bb, *altitudo autem, ejus distantia BF a plano horizontali assumpto DE.* Fig. III.

Si enim superficiei ABC vas circumponatur, eminens supra planum horizontale DE, sublatisque viribus, quae superficiem ABC continebant, infundatur vasi fluidum ejus generis, quod superficie ABC terminatur, usque ad DE, persistet sane superficies ABC immota; eritque hujus aequili-
bri

brii caussa, pressio fluidi spatio ABCED contenti, in quamlibet superficiei ABC particulam Bb, aequalis ponderi in theoremate descripto. Idemque adeo pondus, vi particulam Bb secundum perpendiculum prementi, qua, ablato iterum fluido ABCDE, suo loco contineri potest, si reliquis superficiei ABC punctis omnibus similes vires applicatae fuerint, aequale erit.

COROLLARIUM I.

§. 10. Potest ergo superficies ABC conservari infinitis modis, quia pro arbitrio posita fuit DE, a cujus distantia a dato superficiei ABC puncto, magnitudines ponderum, viribus, quibus conservari potest, aequalium, pendent. Et, si loco superficiei horizontalis DE sumatur quaecunque alia GH vel IK, secundum dicta; demonstrata de hac pariter vera erunt. Atqui superficie GH vel IK in locum pristinae DE surrogata, pressiones in omnia superficiei ABC puncta mutantur.

COROLLARIUM II.

§. 11. Crescuntque, per substitutionem hanc plani GH vel IK in locum plani DE, omnes pressiones, in aequales superficiei ABC particulas, aequaliter, vel aequaliter decrescunt. Generatim ergo verum est, si pressiones in aequales superficiei ABC partes, quibus conservatur, omnes, aequalibus incrementis augeantur, vel minuantur aequalibus decrementis, superficiem nihilominus conservari; vel, aequales pressiones omnibus superficiei ABC, per datas vires in statu conservatae, particulis aequalibus applicatas, quibus secundum perpendiculares urgentur in hanc vel illam partem, in superficiei figura nihil mutare.

COROL-

COROLLARIUM III.

§. 12. Atqui ad ejus generis vires, quae aequales superficiei ABC partes aequaliter premunt, referri debet pressio aeris, terram ambientis, propter perparvam guttarum, vel superficierum convexarum ABC, altitudinem. Haec ergo pressio nihil in his superficiebus, quod ullo modo sentiri possit, mutabit, atque eadem erit guttarum figura in pleno aere, quae est in vacuo.

COROLLARIUM IV.

§. 13. Si particula quaevis superficiei ABC omni dabili minor, ut B*b*, dicatur dz, & vis eam directe introrsum premens, qua suo loco conservatur, sit p, sumptoque utcunque plano horizonti parallelo DE, distantia particulae ab hoc plano FB, sit x; g autem notet densitatem sive gravitatem specificam fluidi, quod superficie ABC coercetur; manebit superficies haec, si ubique fuerit $p = gxdz$. Neque mutabitur ita mutatis p, ut jam pro omnibus superficiei particulis sit $p = gxdz \mp gadz$, quamcunque rectam constantem designet a.

COROLLARIUM V.

§. 14. Inaequaliter autem auctis viribus, quae, directe introrsum premendo, superficiem ABC conservabant, haec utique mutabitur. Nisi enim mutari concedatur, conservari eadem superficies poterit, pressa a fluido, cujus suprema superficies DE plana non est, vel certe non parallela horizonti, quod repugnat. Adeoque si, iisdem sumptis, superficies ABC actione virium p conservetur, erit semper $p = gxdz \mp gadz$.

COROL-

COROLLARIUM VI.

§. 15. Superficie ABC per vires p in ſtatu conſervata, ſit DE planum ita poſitum, ut ſit $p = gxdz$; manentibusque viribus iſtis, infundatur vaſi fluidum, cujus pondus ſpecificum ſit γ, ad horizontem usque pro arbitrio ſumptum IK. Diſtantia particulae cujus vis ſuperficiei ABC ab hoc horizonte ſit ξ. Premet ergo & hoc fluidum particulam ſuperficiei Bb, & quamvis aliam, directe introrſum, critque preſſio haec aequalis ponderi $\gamma\xi dz$. Unde, ſi ſuperficies ABC in ſtatu conſervetur a duabus his preſſionibus conjunctis, erit $gxdz + \gamma\xi dz = gxdz \mp gadz$, atque hinc $\gamma\xi = \mp ga$. Id autem cum fieri nequeat, quia a, g, γ conſtantes ſunt, ξ autem modo major, modo minor, niſi ſuperficies ABC horizonti parallela ponatur; patet, manentibus viribus, quibus ſuperficies curva ABC in aere vel vacuo conſervabatur, eam manere non poſſe, ſub fluidum aliquod grave demerſam. Et, ſi ita demerſa maneat, id indicio eſſe, aliquid in viribus illis mutatum eſſe.

§. 16. His declaratis, inventio figurae cujusvis guttae ABC ad id ſolum redit, uti preſſio p, vel reſiſtentia, ab attractione particularum guttae deducatur, ejusque inveſtigetur quantitas, ad quamlibet, quae mente concipi poteſt, ſuperficiei fluidae figuram. Qua in re cum ab aliquibus non mediocris famae phyſicis, nec ejus immeritae, diſcedam, tanto majori cura verſandum erit.

THEOREMA. II.

Fig. IV. §. 17. *Sit ABC quaecunque figura guttae, cujus ſuperficiei parallela ſit intra guttam ſuperficies* abc, *ad diſtantiam* Aa *vel* Bb *intervallo attractionis aequalem: dico vim, qua particulae*

ticulae fluidi in superficie abc *positae, vel intra eam contentae, sese trahunt, ad mutandam figuram guttae nihil conferre.*

Sumta enim quacunque particula D in superficie *abc*, vel E intra illam, si circa D vel E descripta concipiatur sphaera, cujus radius toti intervallo attractionis aequalis sit, patet particulam eam D vel E quaquaversum trahi aequaliter. Est ergo particula, quoad has quidem vires, in aequilibrio.

§. 18. Vires scilicet istae nihil aliud efficiunt, quam particularum fluidarum cohaesionem, quae resistit omni vi, data aliqua non majori, quae unam earum, vel aliquas, divellere conatur a reliquis: motum autem in particulis guttam componentibus aliquem producere, vel figuram guttae mutare, nequit. Resistentia autem illa in omnem partem aequaliter dirigitur.

THEOREMA III.

§. 19. *Iisdem positis, sumatur aliqua particula F intra superficies parallelas ABC,* abc, *ducaturque per eam* Aa, *superficiebus istis perpendicularis, eidemque, tanquam centro, circumscribatur sphaera, cujus radius intervallo attractionis aequalis sit. Trahetur ergo particula F versus quodlibet hujus sphaerae punctum, quod intra superficiem ABC cadit; sed, si quaelibet virium, quibus ita trahitur, in duas solvatur, unam secundum* Aa, *alteram secundum rectam huic* Aa *perpendicularem; ab omnibus istis viribus secundum* Aa *premetur quidem superficies* Aa, *figura autem guttae non mutabitur.*

Posito enim per punctum A plano GH, quod superficiem ABC contingat, atque per F plano illi parallelo IK: patet a pluribus particulis dimidii sphaerae circa F descriptae, quod intra

intra IK cadit, magis versus *a* trahi particulam F, quam versus A urgetur a particulis paucioribus partis ejusdem sphaerae, dimidio minoris, inter plana GH, IK sitae. Premet ergo particula F reliquas in recta *Fa* positas, eaque pressio propagabitur in superficiei *abc* punctum *a*. *Quod erat primum.*

Verum si in quacunque alia recta Bb, intra superficies parallelas ABC, *abc*, utrique ad perpendiculum ducta, sumatur particula L priori F aequalis, & tantumdem a B distans, quantum F distabat ab A, fiantque ad hanc particulam omnia, quae facta sunt apud F: patet quoque, tantumdem particulam hanc L secundum L*b* urgeri, quantum F urgebatur secundum *Fa*, atque tantundem premere *b*, quantum F premebat *a*. Idemque cum de quibuslibet aliis particulis, dicto modo intra superficies ABC, *abc* positis, verum sit, nihil ab aequalibus his viribus, guttae superficiem directe introrsum prementibus, in ejus figura mutabitur §. 11. *Quod erat alterum.*

§. 20. Restant ergo solae vires, ex attractione particulae F, secundum rectas ipsi Aa perpendiculares, planis autem GH, IK parallelas, derivatae, quae aliquid in figura guttae mutare possunt. Quae ergo ita expendendae erunt, ut legem attractionis, secundum quam vires istae, pro dato distantiae augmento, decrescunt, tanquam scopulum hactenus inaccessum, evitemus.

PROBLEMA I.

§. 21. *Gutta per planum quodcunque, superficiei suae perpendiculare, secta, ductaque per aliquod perimetri hujus sectionis punctum A recta BC, quae sectionem contingat, eique perpendiculari AD; sint assignandae vires, quibus particulae fluidae, in plano sectionis ab una hujus rectae AD parte C positae, versus eam rectam trahuntur.*

Fig. V.

In

Intelligatur per AD transire planum, plano sectionis rectum: sumptaque, a parte C hujus plani, in plano sectionis, quacunque particula E, radio qui intervallo attractionis aequalis sit, circa eam E sphaera descripta concipiatur; cujus superficies si planum per AD sectioni rectum non secaverit, nullae ad partem B hujus plani particulae sitae erunt, quae assumptam E versus id trahere possint. Secet ergo superficies sphaerica circa E descripta planum illud per AD: cumque eadem sphaera & a plano secetur, quo guttam secari primum posuimus; sit circuli maximi hac sectione producti pars, quae citra rectam AD cadit, BFGK. Per E ducatur EH rectae AD perpendicularis, & producatur utrinque, factaque HI = HA, agatur & IG tangenti BC parallela, atque rectis istis BC, FE, GI plana intelligantur insistere, plano sectionis recta, quae parallela erunt, atque sphaerae circa E descriptae segmentum illud, quod ad partem B plani AD cadit, in partes divident, quarum illae, quae figurae BFHA utrinque adjacent, similes & aequales erunt ejusdem segmenti partibus, quae adjacent figurae FGIH.

Trahetur particula E versus planum AD ab omnibus particulis segmento sphaerae BGKA comprehensis. Ab illis autem harum virium, quae a partibus ejus segmenti figurae ABGI utrimque adjacentibus, pendent, vis resultabit media, secundum ipsam EH, quae dicetur Cℓ. Vi ergo similem in modum orta, & quaelibet alia particula, secundum HE versus L productam, posita, in eadem hac recta versus AD urgebitur, atque ex omnibus his viribus componetur vis, qua particularum filamentum HL, tangenti BC parallelum, longitudine autem intervallo attractionis aequale, versus planum AD tractum, punctum hujus plani H urget. Cui cum vis opponatur, qua filamentum ejusdem longitudinis, a puncto H juxta HF protensum, a vi attractrice particularum ad partem

C pla-

C plani AD positarum, secundum eandem directionem urgetur; sola ex his viribus sequetur cohaesio filamenti FHL apud punctum H, actio ad mutandam figuram guttae nulla. Dicetur autem vis haec cohaesionis filamenti cujusvis, tangenti BC paralleli, C*f*.

Trahitur autem eadem, quam sumsimus, particula E, & ab eo fluido, quod partibus segmenti sphaerici, utrinque figurae GIK adjacentibus, continetur, secundum aliquam directionem, quae sit EM, quae eadem recta magnitudinem vis ejus exponat. Ducta ergo MN ad AD parallela, vis EM in duas solvitur, unam MN, quam neque ad mutandam neque ad conservandam figuram guttae aliquid conferre §. 19. vidimus; alteram EN, cujus eadem est cum priori C*f* directio, quamque dicemus E*f*. Atque vi similem in modum orta quaelibet particula filamenti secundum HL, ad distantiam ab hoc puncto H mox definiendam, protensa, versus H trahitur, oriturque ab omnibus his viribus, ea quam dico E*f*, qua totum istud filamentum secundum HL tractum, urget punctum H plani AD; quod idem & in opposita urgetur a vi, qua filamentum, illi, quod consideravimus, aequale, secundum FH urgetur a fluido, ad partem C plani AD, & ad partem D plani GI, posito; suntque oppositae hae vires & ipsae aequales.

Efficietur ergo & ab his viribus cohaesio filamenti apud H; quae priorem C*f* augebit; verum id non aliter fiet, quam si puncto H resistatur secundum DH vi aequali omnibus MN particularum ejus filamenti. Ea resistentia tantillum imminuta, movebitur H secundum HD. Atque hac re vis ista E*f* a prori illa C*f* diversa est, quod C*f* motum puncti H nullum unquam producit: E*f* contra generari non aliter potest, quam si H secundum HD prematur.

COROL-

COROLLARIUM I.

§. 22. Manente distantia EH cadat primum punctum E in ipsam BC, adeoque in C. Cadet ergo H in A, & quia HI = HA, I quoque punctum in A cadet, atque spatium ABGI, eique adjacentes segmenti sphaerici partes, evanescent. Evanescet ergo & vis Cp ad hanc particulam C, quae ab attractione fluidi dicto spatio comprehensi pendebat. Trilineum autem GIK, cui adjacent sphaerae partes, a quarum attractione pendet vis Ep, jam mutatum erit in FHK. Quo majus esse, vel propius ad particulam aliquam in serie CE admoveri, cum nullum possit; vis ista Ep ad particulam C, omnium ejus generis virium, quae ad particulas seriei CE pertinent, maxima erit. Sed si particula attracta tantillum infra C demergatur, vis Cp mox generabitur aliqua, eaque, particula illa porro secundum CE demersa, continuo crescet, Ep autem, & quidem celeriter, decrescet. Namque ea re & spatium GIK minuitur, & celeriter quidem, sed multo celerius pars segmenti sphaerici illi utrinque adjacens, & particulae trahentes, quae hoc spatio comprehenduntur, a particula tracta recedunt, minuiturque praeterea angulus NME, a cujus magnitudine, caeteris manentibus, EN, vi Ep aequalis, pendet.

COROLLARIUM II.

§. 23. Incrementum autem, quod ad vim Cp accedit, interea, dum particula tracta a quocunque puncto rectae CE, ad aliud quodcunque ejusdem rectae punctum, demergitur, decrementi, quo ea re vis Ep minuitur, semper duplum est. Particulae enim trahentes omnes, quae, ea demersione particulae tractae, ex spatio GIK, eique adjacentibus partibus seg-

ſegmenti ſphaerici, excluduntur, transferuntur in ſpatium FGIH, & in partes ſegmenti ſphaerici, quae huic ſpatio adjacent; figura autem BFHA, demerſa ita particula tracta, tantundem augetur a parte BA, quantum FHIG augetur a parte GI; ergo & partes ſegmenti ſphaerici figuris his adjacentes aequalia, ſimilia & ſimiliter reſpectu rectae FE poſita, incrementa capiunt. A vi ergo tractrice particularum, quae demerſione illa ex ſpatio ſphaerico figurae GIK adjacente excluduntur, cum pendeat decrementum, quod vis E*p* ea re capit, incrementum autem vis C*p* a vi tractrice illarum, quae eadem in ſpatium ſphaericum figurae BAIG includuntur; ſequitur utique incrementum iſtud illius decrementi duplum eſſe. Idque facilius etiam perſpicitur, ſi motus a particula tracta E transferatur in plana parallela BC, GI, atque haec plana a particula E recedere ponantur, quod demerſioni hujus particulae infra punctum C aequipollet.

COROLLARIUM III.

§. 24. Ita creſcente vi C*p*, particula in CE magis magisque demerſa, altera E*p* eo usque decreſcit, donec I punctum in K cadat, quod ubi contingit, ſpatium GIK, & pars ſegmenti ſphaerici illi utrinque adjacens, evaneſcit; vis autem C*p* jam ab attractione univerſi ſegmenti ſphaerici, duplo ſpatii FHK utrinque adjacentis, pendet. Neque, ſi particula tracta in CE magis demergatur, aliquid in his viribus mutatur, id eſt, neque reſtituitur E*p*, neque C*p* augetur vel imminuitur, donec perventum ſit ad ſuperficiem guttae, ei, quam conſideramus, ſecundum AD oppoſitam.

COROLLARIUM IV.

§. 25. Si loco ſeriei particularum ſecundum CE poſitarum alia ſumatur, rectae AD pariter parallela, ſed minus quam

quam CE ab illa remota, caeteris manentibus, figura BGKA, atque segmentum sphaerae illi adjacens, major fit, ad quamlibet novae hujus seriei particulam, loco E, in eadem recta tangenti parallela EH, sumptam. Et, si particula tracta cadat in ipsam AD, spatia ista omnium, quae esse possunt, maxima fiunt. Si particula tracta cadat in A, spatium quo comprehenduntur particulae, a quibus vis E*p* pendet, quarta pars est sphaerae, quia hoc casu FHK, cui figurae spatium illud adjacet, quadrans est. Inde, si particula tracta in recta AD sensim demergatur, pars sphaerae particulas comprehendens, a quibus pendet vis C*p*, continuo crescens, tandem fit haemisphaerium, ubi puncta I & K coincidunt; quod ergo ad distantiam a puncto A, duplo intervalli attractionis aequalem, contingit. Si alia sumatur recta, ut CE, ipsi AD parallela, atque secundum hanc particula tacta sensim demergatur, donec puncta I & K coincidant, atque evanescente vi E*p*, vis C*p* fiat, quam potest esse, maxima; distantia punctorum I, K ita coincidentium, ab A, erit rectae HK dupla, adeoque chorda arcus, cujus dimidius est FK. Hinc tanto minor, quo magis series CE, in qua particula sumpta est, a plano per AD distat.

COROLLARIUM V.

§. 26. Producta recta CE & arcu BGK, donec concurrant apud O; si & per CO planum ponatur, sectioni guttae perpendiculare, sphaeram circa E descriptam secans; vis C*p*, qua particula E urgetur directe versus hoc planum CO, ab attractione particularum, spatiis sphaericis figurae CBGP utrinque adjacentibus, comprehensarum, aequalis est illi C*p*, qua particula H directe versus planum AD urgetur, & vis EM particulae E versus planum CO, pendens ab attractione particularum spatio PGO, eique adjacentium partium sphaerae, compreprehensarum, indeque derivata vis Ep, aequalis vi EM, & ex ea derivatae Ep particulae H versus planum AD. Est enim spatium, quo circumscribuntur particulae, ipsam E quolibet modo dicto trahentes, aequale illi, quo circumscribuntur particulae, quae ipsam H eodem modo trahunt. Cum ergo ratio partis sphaerae, quae adjacet figurae GIK, ad partem sphaerae figurae BGIA adjacentem, minor sit ratione partis sphaerae figurae GPO adjacentis, ad partem sphaerae adjacentem figurae CBGP; quod Geometra facile perspicit: sintque praeterea multae particulae partis sphaerae figurae GPO adjacentis, particulae E propinquiores, quam ulla puncta, quae in partem sphaerae figurae GIK adjacentem cadunt: patet utique rationem vis EM ad vim Cp, quibus particula E, attracta a particulis ad partem F plani AD positis, secundum EH, urgetur versus hoc planum AD, minorem fore ratione vis EM ad vim Cp, quibus particula H urgetur versus idem planum. Et quamvis ad spatium GIK angulus MEO major sit, quam ad spatium GPO, atque hinc ratio EN, quae est Ep, ad EM, major ad particulam E a plano AD remotiorem, quam ad illi propinquiorem H: id tamen efficere non potest, ut ratio Ep ad Cp ad particulam remotiorem E aequalis, nedum major fiat, ratione Ep: Cp ad particulam propinquiorem H, nisi EM ad particulam remotiorem major sit quam EM ad propinquiorem, vel ei aequalis, vel certe tantillo minor. Quae omnia cum legi virium attractricium adversari videantur, tuto sumi potest, rationem Ep: Cp ad particulam E a plano AD remotiorem, semper minorem esse, eadem ratione ad particulam propinquiorem, vel in ipso plano positam, H.

COROLLARIUM VI.

§. 27. Posita particula attracta in C, sit AQ = Ep, ad hunc particulae locum. Inde particula attracta in CE sensim demersa, sit HR = Ep ad particulam E, iisdemque & ad reliqua

liqua rectae CO loca factis, descripta sit curva QR, in qua terminentur omnes rectae tangenti BC parallelae, atque in recta AD incipientes, quarum quaevis vim E*p* ad particulam seriei CP sibi respondentem exponit: quae quidem curva cum AD concurret apud S, ubi AS = 2HK §. 24. Eadem curva a puncto Q versus T producatur sic, ut ejus pars QT parti QRS similis & aequalis sit. Per Q agatur rectae AD parallela QV, quae curvae axis erit. Producta ergo HR, donec axem hunc secet apud X, & curvam apud Z; quia decrementum XR, quo vis E*p* imminuta est interea, dum particula attracta ex C demersa est in E, dimidium est incrementi, quod ad vim C*p* eodem tempore accessit, quae ad punctum C nulla fuit §.23.; exponetur vis C*p* ad punctum E, per rectam ZR, atque generatim quaevis ordinaturam curvae SQT tangenti BC parallela, vim C*p* exponet ad illud seriei CP punctum, per quod producta transit. Hinc si vis, qua universa series CP longitudinis AS versus AD urgetur, composita ex omnibus viribus C*p* hujus seriei, sit C*s*, & vis ejusdem seriei, composita ex omnibus E*p*, dicatur E*s*, erit C*s* ad E*s* ut spatium TQS ad spatium QAS: hinc prior vis posteriori multo major erit.

COROLLARIUM VII.

§. 28. Atque haec pariter vera sunt si loco seriei CP sumatur ea, quae in ipso plano AD sita est, versus quod fit attractio, ad quam praeterea spatia SQT, QAS omnium, quae esse possunt, maxima sunt, & ratio cujusque RH ad respondentem RZ, hinc & ratio totius spatii QAS ad spatium TQS, maxima §. 26. Collectis ergo in summam omnibus viribus E*s*, C*s* omnium serierum, in plano sectionis rectae AD parallelarum, quo vires obtineantur, quibus universum fluidum in plano sectionis ad partem L positum, cujus profunditas infra tan-

tangentem BC duplo intervalli attractionis major non est, versus planum AD trahitur, ratio summae omnium E*f* ad summam omnium C*f*, ratione spatii QSA ad seriem AS relati, ad spatium TQS, ad eandem seriem AS relatum, multo minor est; atque adeo prior virium summa, ad summam virium posteriorem, admodum parva. Cumque praeterea vires E*p*, ad profunditatem infra A duplo intervalli attractionis aequalem, agere desinant, vires autem C*p* ultra eum terminum, quemadmodum §. 24. expositum est, protendantur, ad quodcunque intra guttam punctum, a puncto superficiei illo, quod puncto A directe oppositum est, satis remotum; possitque adeo longitudo cujuslibet serierum ipsi AD parallelarum respectu vis C*f* adeo longa concipi, ut longitudo partis ejus seriei, in quam vis E*f* agit, ea fere incomparabiliter minor sit: si summa omnium C*f* ad series hujus longitudinis, dicatur C, & summa omnium E*f* sit E, ratio E : C adeo parva erit, uti E prae C quasi evanescat.

COROLLARIUM VIII.

§. 29. Manente jam AB, flectatur AC in plano sectionis circa punctum A, sed ita, ut angulus BAC, a duobus rectis quantitate omni dabili minore differens, prodeat; quales sunt, quos includunt duae rectae eandem curvam in duobus punctis tangentes, quorum alterum ab altero unico curvae elemento distat. Sintque ex particulis fluidis composita filamenta, FH, HL, nunc quoque rectis AB, AC parallela, atque adeo angulus FHL ad quodlibet filamentum, aequalis angulo BAC. Manebunt omnia, quae hactenus ostensa sunt: vis autem C*f* filamenti FHL, qua apud H cohaeret, jam resistere poterit vi alicui punctum H directe extrorsum urgenti secundum HA, quae angulum BAC bisecat. Id de quolibet filamento cum verum sit, resultabit ex viribus C*f* omnium um filamentorum rectae AD intra puncta A, D applicatis, vis, quae resistere poterit viribus quotcunque aliis, puncta rectae AD directe extrorsum urgentibus, quarum summa datae alicujus magnitudinis est, vel vi ejusdem magnitudinis, uni hujus rectae AD puncto applicatae, secundum eandem directionem. Dicatur tota ea resistentia P, resistentia autem unius filamenti, ut FHL sit P*f*. Cum ergo vis C*f* ad resistentiam P*f* cujuslibet filamentorum dictorum, in data sit ratione, ejus nempe, quae est radii ad sinum vel mensuram anguli BAC, vel ejus supplementi ad duos rectos; erit & vis C, summa omnium C*f*, ad resistentiam P ex omnibus P*f* resultantem, in eadem ratione radii ad sinum, quae sit $\varrho : \sigma$. Atqui, si universa vis C colligatur in unum horum filamentorum, quod sit BAC; vis ista, ad resistentiam ex ea secundum DA resultantem, in eadem ratione, $\varrho : \sigma$, erit. Filamentum ergo hoc BAC, cujus punctum A ab utraque parte cum punctis proximis cohaerere ponitur vi C, eidem vi P, punctum A secundum DA extrorsum prementi, resistet, cui resistebant omnia filamenta; poteritque hoc respectu unum istud filamentum in locum omnium substitui.

COROLLARIUM VIIII

§. 30. Eadem filamenti inflexione, menentibus viribus MN, quas nihil ad figuram guttae conferre vidimus, ex vi E*f* cujusvis filamenti FHL vis oritur, punctum H secundum HD introrsum urgens sic, ut motus hujus puncti, secundum rectam hanc HD, sequuturus sit, nisi eum contraria aliqua vis prohibuerit. Iis autem, quae modo de viribus C*f* dicta sunt, ad vires E*f* applicatis, concluditur, vi illi, qua recta AD secundum longitudinem suam introrsum urgetur a viribus E*f* omnium filamentorum, aequalem esse vim, qua punctum A secundum eandem rectam AD urgetur, quaque particulae fluidae secundum hanc rectam positae praemuntur, ab uno

uno filamento BAC, siquidem ei utrinque, secundum AB, AC applicata sit vis, aequalis E, quae summa est omnium Ef, atque pressionem istam secundum AD esse ad vim E, in ratione $\sigma : \varrho$.

COROLLARIUM X.

§. 31. Si praeter AD & alia recta intelligatur superficiei guttae perpendicularis, atque gutta per eam etiam rectam plano secta esse: vis quidem E, ab iisdem utrinque caussis atque conditionibus pendens, ejusdem magnitudinis erit ad utrumque horum planorum; idemque tanto magis verum erit, si per rectam primo sumtam AD planum ponatur, ab eo, quo gutta initio secta fuit, diversum. Verum vis, qua punctum A secundum AD urgetur a vi E, illi, qua punctum extremum rectae loco AD sumptae secundum eam rectam urgetur ab eadem E, non aliter aequalis erit, quam, si curvedo sectionis guttae per rectam AD aequalis fuerit curvedini sectionis ejusdem guttae per rectam loco AD sumptam. Cum enim generatim vis ista, qua punctum quodvis rectae ut AD, secundum ejus longitudinem urgetur a vi E, sit ad ipsam vim E, ut $\sigma : \varrho$; duae quaelibet istarum virium inter se comparatae erunt ut σ, sinus curvedinum, vel harum mensurae, quia ϱ, & E constantes sunt. Contra, vis C ad diversa puncta in superficie guttae assumpta, ejusdem magnitudinis necessario non erit, quamvis ejusdem sit magnitudinis ad quodlibet planum, per eandem rectam guttae perpendicularem AD, transiens. Pendet enim magnitudo haec a longitudine rectae AD, quae etsi determinatae cujusdam magnitudinis sit ad quodlibet guttae punctum, ejusdem tamen longitudinis ad omnia ejusdem guttae puncta, necessario non est §. 24.

§. 32. Hae ergo ſunt vires, quae figuras guttarum, quas vel aer ambit vel vacuum, mutare ſolae poſſunt. Quae cum non in uno tantum plano guttam ſecante agant, ſed in omnibus, quaecunque per rectam aliquam ſuperficiei guttae perpendicularem poni poſſunt; proximum eſt, ut, omnibus his viribus in ſummam collectis, preſſionem vel reſiſtentiam cujuslibet puncti ſuperficiei, ab illis pendentem, eliciamus. Id autem facile fiet, poſtquam vidimus, & vim E, qua punctum A urgetur ſecundum quamlibet rectam ipſi AD perpendicularem, ejusdem magnitudinis eſſe, & idem de vi C valere. Rectae autem iſtae omnes in planum circuli cadunt, cui AD perpendicularis eſt.

THEOREMA IV.

§. 33. *Si centrum circuli A verſus omnia puncta peripheriae, a diametris BC, DE in quatuor partes aequales ſectae, urgeatur viribus aequalibus; erit ſumma virium verſus puncta dimidiae peripheriae DBE directarum, ad vim ex iis reſultantem ſecundum radium AB, diametro DE perpendicularem, ut dimidia peripheria ad diametrum.* Fig. VI.

Ducto enim quocunque radio alio AF, & ab ejus extremo F demiſſa FG ad diametrum DE perpendiculari; ſi vis ſecundum AB, ex vi ſecundum AF derivata, ſit Q, ipſa autem vis ſecundum AF dicatur V, erit AF : FG = V : Q. Agatur *fg* rectae FG parallela, & adeo propinqua, ut curvedo arcus F*f* evaneſcat. Erit AF : FG = F*f* : G*g*, ergo & F*f* : G*g* = V : Q. Sumpta ergo F*f* ejusdem ubique magnitudinis, expoſitaque per eam vi V; ei reſpondens G*g* vim Q ex ea derivatam exponet, ad quemlibet radium AF: eruntque omnes V, ad omnes Q ex illis derivatas, ut omnes F*f* ad omnes G*g*, id id eſt, ut DBE ad DE; vel generatim, ut dimidium cujuslibet circuli peripheriae, ad ejusdem circuli diametrum.

§. 34. His ad ſuperficiem guttae translatis, vim, qua particula vel punctum A urgetur ſecundum mediam directionem AB a viribus E §. 28, verſus quodlibet dimidiae peripheriae DBE punctum directis, notabo per *ee*, eo ſenſu, ut *e* concipiam latus notare quadrati, quod, ſi baſis fiat parallelepipedi ejus altitudinis, quae eſt diameter particulae A: pondus hujus parallelepipedi, eo fluido repleti, cujus conſideratur ſuperficies, vi ſecundum AB aequalis ſit. Patet autem vi huic *ee* aequali punctum A & ſecundum AD urgeri a viribus E verſus puncta dimidiae peripheriae BDC directis, iisdemque viribus aequales alias ſecundum AC, AE opponi, atque vim *ee* ad quodlibet punctum in ſuperficie guttae aſſumptum, ejusdem eſſe magnitudinis.

§. 35. Similem in modum ex vi C §. 28, verſus quodlibet punctum dimidiae peripheriae DBE directa, reſultat vis quam dico *cc*, eodem, quem modo explicavi, ſenſu; eique aequales ſecundum AC, AD, AE. Atque ab his viribus pendet tota reſiſtentia, quam particula A opponit vi cuicunque, eam ſecundum rectam plano circuli perpendicularem urgenti, ſic ut, niſi vis haec reſiſtentia illa major ſit, motus ſequi nullus poſſit. Verum vis *cc* conſtantis magnitudinis non eſt ad omnia guttae puncta, quia vis C, a qua pendet, modo major modo minor eſt. Caeterum directiones virium *ee*, *cc* in guttae ſuperficie eo modo concipiendae ſunt, quem jam exponam.

THEOREMA V.

Fig. VII §. 36. *Si gutta ABC ſecetur plano horizonti parallelo DEF, & verticali BEG ita poſito, ut communis horum planorum*

norum interſectio EG peripheriae ſectionis horizontalis ad perpendiculum inſiſtat: vires E, quibus punctum ſuperficiei E quaquaverſum trahitur, redibunt ad duas magnitudinis ee, *quarum una directa eſt ſecundum EH, quae recta apud punctum E contingit ſectionem DEF: altera ſecundum EI, ſectionem BEG apud idem punctum E contingentem; & ad duas alias, quarum directiones ſunt rectae, quae easdem ſectiones apud idem punctum E contingunt, in oppoſita vergentes. Similemque in modum & vires omnes C ad duas magnitudinis* cc, *ſecundum easdem tangentes EH, EI directas, & ad duas illis oppoſitas, redibunt.*

Planum enim horizontale DEF verticali BEG rectum eſt, poniturque EH perpendicularis ad communem horum planorum interſectionem EG. Eadem ergo EH & plano BEG perpendicularis erit, & rectae IE in hoc plano ductae, & rectae EK, quae in eodem hoc plano tangenti EI, atque ipſi curvae BE, perpendicularis ponitur. Ergo viciſſim recta haec EK plano per tangentes EH, EI perpendicularis erit, atque circulus in hoc plano IEH centro E deſcriptus, a tangentibus IE, HE productis in quatuor quadrantes dividetur, quemadmodum ſuppoſitum fuit propoſitione proxime praecedenti. Poterunt ergo, quae eo loco demonſtrata ſunt, de rectis EH, EI concludi.

§. 37. Reductae ergo tandem ſunt vires ab attractione mutua particularum guttae pendentes, ad vires filamentorum, quorum aliqua, ut DEF guttam ambiunt ſecundum plana horizonti parallela, reliqua, ut BE ſecundum verticalia. Utrique horum filamentorum & vis *ee* ineſſe concipienda eſt, & ea quam notavi per *cc*. Sunt autem indoles harum virium *ee*, *cc* multum diverſae, & diverſi effectus.

§. 38. Namque vis *ee* ab attractione particularum guttae liberarum pendens, introrſum premit punctum E, non

 ali-

aliter, quum si filamenta BE, DEF elastica forent, atque sese contrahere niterentur in minorem longitudinem: a qua elasticitate utique motum sequi necesse est puncti E, nisi aliquid ei obstet, quemadmodum ex vi hac *ee* sequitur. Atque contractilis haec vis in omnibus filamentis, & in omnibus ejusdem filamenti partibus, eadem est.

§. 39. Altera autem vis *cc* eorundem filamentorum in sola eorum tenacitate sita est, qua disruptioni resistunt, estque plane gemina ei tenacitati, quam in funibus concipiunt statici, quae itidem, cum resistat viribus partes funis in diversa distendentibus, motum tamen per se nullum producit. Neque enim, si a pondere e fune suspenso partem quantumvis magnam auferas, quod reliquum est, sursum a fune tollitur, quam vis jam funis tensio multo quam ante minor sit. Ab hac ergo vi filamentorum id solum sequitur, uti punctum E, versus exteriora pressum, suo loco persistat, quemadmodum persisteret, si filis alligatum foret, guttam secundum lineas DEF, BE, ambientibus.

§. 40. Maxima tensio, quam quodlibet filamentum, ut DEF, ferre potest apud datum punctum E, aequalis est vi *cc* apud illud punctum; qua major filamentum eo loco rumperet. Unde cum vis *cc* diversa esse possit ad diversa ejusdem filamenti puncta; sequitur, quodlibet filamentum vi majori, quam quae minima est omnium virium *cc* ejus filamenti, tendi non posse; siquidem totum filamentum aequaliter tendatur. Vi autem minori ut filamentum tendatur, nihil prohibet.

§. 41. Jam etsi de illarum guttarum figuris quaestio sit, quae fluido gravi constant, initio tamen vis ista a fluidis separanda erit, atque gutta fingenda, cujus partes vis ista non afficit. Non datur ejus generis fluidum, vel si detur, sub senſum noſtrum non cadit. Verum tamen ſi libere cadat fluidum in medio non reſiſtenti, illarum ejus partium, quae antecedentes ſequuntur, in has ex pondere actio omnino nulla eſt. Et ſi fluida dentur, quorum unum alteri miſceri non poteſt, cum ſint ejusdem perfecte gravitatis ſpecificae, atque parva copia alterutrius eorum liquidorum infundatur vaſi, majorem alterius quantitatem continenti: pondus illius ab hujus preſſione ita ſuſtinebitur, uti ad conſervandam vel mutandam fluidi figuram conferre nihil poſſit. Contrahetque gutta cadens, vel ſecundum dicta demerſa, eandem prorſus figuram, quae foret guttae non gravis, ſuperficiei alicujus corporis contiguae, ſiquidem daretur.

§. 42. Guttae autem non gravis figuram, qua ejus partes, in aequilibrio conſtitutae, quieſcunt, a globi figura diverſum eſſe non poſſe, facile perſpicitur. Sola apud ejus modi guttam vis *ee* filamentorum eſt, quae ejus figuram mutare poſſit, a qua quodlibet ſuperficiei punctum directe introrſum premitur, vi, cujus quantitas, quia *ee* ubique eadem eſt, a curvedine ſuperficie apud punctum preſſum pendet ſic, uti major ſit ad partem ſuperficiei magis curvam, minor ad eam, quae magis ad planam accedit §. 30. Unde ſi ea guttae figura fingatur, cujus ſuperficiei partes aequales aequaliter curvae omnes non ſunt, diverſae erunt vires, quibus partes illae vel puncta in earum medio poſita, directe ſecundum interiora guttae urgentur: concedentque partes ſuperficiei, quae reliquis magis planae ſunt, viribus fortioribus partium magis curvarum, neque redibit aequilibrium ante, quam inaequalitas ea curvedinum deſtructa fuerit. Corpus autem, cujus ſuperficies aequaliter ubique curva ſit, praeter globum, nullum eſt.

§. 43. Atque harum guttarum magnitudo limitem non habet. Nihil enim, ut formentur, a vi *ee* ſuperandum eſt, prae-

praeter inertiam fluidi, quae, quantacunque sit, a vi activa quantumvis parva superatur. Neque hic ejus tenacitatis, quam diximus *cc*, ulla est actio; quia vis *ee*, cujuscunque particulae superficiei guttae, illi, qua ea particula extrorsum urgetur, a vi, quae pendet abs *ee* particulae superficiei cujuscunque alterius, plane resistit, neque, ut partem aliquam in subsidium assumat a vi *cc*, opus habet.

§. 44. Sit AB superficies quaecunque ex illarum genere,
F. VIII. quae generari possunt, linea aliqua AC, circa axem fixum DC verticaliter erectum, revoluta, eamque superficiem contingat gutta non gravis, apud verticem C. Addita ergo particulis hujus guttae omnibus vi gravitatis, partes ejus F, G, ab incumbentibus pressae, ab axe recedent, E autem secundum axem subsidet, orieturque gutta, cujus diameter horizonti parallela omnium maxima, ejus altitudine EC, major est. Et quia actiones atque reactiones in quolibet planorum guttam per axem DC secantium, prorsus eaedem sunt: omnes istae guttae sectiones inter se similes & aequales erunt. Sectiones autem guttae horizonti parallelae, utpote quarum cuivis axis DC rectus est, omnes erunt circuli.

§. 45. Harum autem guttarum, atque superficierum concavarum, quarum sectiones horizonti parallelae, propter similem dictae conditionem, itidem circuli sunt, quorum centra in eandem verticalem cadunt omnia, figuras jam solas considerabo. Si scilicet superficies AB, cui gutta gravis insidet, revolutione alicujus lineae AC circa axem verticalem DC generari non potuit; sectiones guttae per verticalem DC utcunque sumtam, tales non erunt, ut earum quaelibet alteri cuicunque possit congruere, neque ejusdem guttae sectiones horizonti parallelae figuras habebunt circuli. Verum harum guttarum

con-

consideratio difficilior est, quam ut eam aggredi ausim. Et tornatiles illae fluidorum superficies, ad perspiciendam ab hac parte, quantum opus est, fluidorum naturam, videntur sufficere. Unde, etsi aliqua eorum, quae porro ostendentur, & de iis guttis vera esse possint, quarum sectiones horizonti parallelae circuli non sunt; de his tamen solis enunciabuntur.

THEOREMA VI.

§. 46. *In gutta gravi, cujus sectiones horizonti parallelae sunt circuli, vires filamentorum horizontalium, quibus tensae, pressioni fluidi guttam componentis resistunt secundum eorum circulorum radios, vi* ee *majores esse.*

Sit ABC sectio guttae gravis per axem, eademque & plano horizonti parallelo secta, sit DE diameter hujus sectionis, quae circulus erit. Plano verticali ABC parallela intelligantur alia duo, utrinque unum, quorum ab ABC distantia infinite parva sit. Secabunt & haec plana sectionem horizontalem, secundum chordas diametro DE parallelas; earum autem chordarum differentia a diametro DE omni dabili minor erit. Prementur ergo plana ista sectioni ABC parallela, a fluido inter ea contento, conabunturque discedere in diversa, secundum rectas illis perpendiculares, ut viribus opus sit, quae ea suis locis contineant, quaequidem nullae sunt aliae, quam filamentorum horizontalium tensiones, quarum partes, quae intra plana cadunt, iis perpendicularia sunt; quo fit ut filamentorum in iis locis tensiones viribus plana in diversa prementibus, directo opponantur. Speciatim autem tensio filamenti horizontalis, cujus diameter est DE, aequalis erit dimidio vis, qua chorda, quam diametro DE parallelam intelleximus ad distantiam infinite parvam, a fluido intra duo plana sectioni ABC parallela in spatio DBC contento, urgetur secundum rectam Fig. IX.

ei

ei in plano horizontis perpendicularem, propterea, quia duae filamenti partes, quae intra plana cadunt apud D & E, pressioni illi resistunt. Pressio autem in chordam dictam aequalis est pressioni ejusdem fluidi in diametrum DE.

Sint ductae DF, EG, quae sectionem apud puncta D, E contingunt. Premetur ergo fluidum spatio DBE contentum in DE, & a tensione filamenti verticalis DBE, apud puncta D, E, quae aequipollet viribus, quibus puncta D, E traherentur secundum DF, EG, non minoribus quam est *ee*, & a pondere fluidi spatio DBE contenti.

Fig. X. & IX. Translatis jam lineis FDEG in *fdeg*, describatur circulus *abc*, rectas *df*, *eg* apud *d*, *e* contingens, qui ponatur esse sectio per axem guttae non gravis, ejusdem materiei, quae gravem composuit, Factisque ad hanc guttam omnibus, quae facta fuere apud gravem, erit vis, qua filamentum *dbe*, secundum *df*, *eg* tractum a vi *ee*, fluidum *dbe* versus *de* premit, aequalis illi, qua filamentum DBE fluidum DBE versus DE premebat, siquidem tensio apud D, E vi *ee* non major esse ponatur. In lineam ergo *de* cum nulla praeterea pressio agat, utique minus haec *de* quam DE premetur, & tensio filamenti horizontalis apud *d*, tensione filamenti horizontalis apud D, minor erit. Cum ergo tensio illa apud *d*, uti cujuslibet alterius filamenti guttae non gravis, sit aequalis vi *ee*, tensio filamenti horizontalis apud D vi *ee* major erit.

COROLLARIUM I.

§. 47. Componitur ergo tensio cujuslibet filamenti horizontalis guttae gravis ex vi *ee*, quae quiescere non potest, & ex parte vis *cc*, quam illa sibi in subsidium assumsit, ut pressioni fluidi extrorsum posset resistere; id est, ex vi activa *ee*, quae nisi impediatur, motum producit, & ex vi mere resistenſtente. Atqui vis omnis ita compoſita ut mere reſiſtens agit. Sit pondus A ſuſpenſum e duobus funiculis, ABC, ABD, quorum directiones inter A, B parallelae ſunt. Eorum funiculorum alter affixus ſit obſtaculo immoto C, ab altero pendeat pondus D, minus pondere A, quo fiet, ut uterque funiculus ad ſuſtinendum pondus A concurrat, atque vis pondus hoc A ſuſtinens ex vi activa ponderis D, atque ex reſiſtentia obſtaculi C, componatur. Imminuto ergo pondere A motus tamen ejus nullus ſequetur, dummodo pondere D minus non fiat; id eſt, dummodo non tollatur id, quod poſitum eſt, vim, qua ſuſtinetur, ex activa & mere reſiſtente componi. Ergo vis ita compoſita non aliter, quam mere reſiſtens, agit. Fig. XI.

COROLLARIUM II.

§. 48. Immo ex dictis ſequitur, vim *ee* filamentorum horizontalium omni pondere dabili minorem eſſe. Reſumpta enim figura IX, ductaque ſecundum theorema primum HS horizontali ea, a qua demiſſa verticalis KL ad quodlibet ſuperficiei ABC punctum L, eſt ut vis, qua illud punctum directe verſus interiora guttae urgetur, a filamentorum tenſionibus: conſtat preſſionem, quam ſuſtinet ſemidiameter DN, aequalem eſſe ponderi fluidi, quod contineri poteſt ſpatio HDNM, qua vi & dimidium chordae ejus ſectionis guttae horizontalis, cujus DE diameter eſt, huic DE parallela & infinite propinqua, ſecundum rectam ei in plano horizontis perpendicularem preſſa, a diametro illa DE recedere conatur. Ei ergo conatui cum tenſio filamenti horizontalis ejusdem ſectionis apud D reſiſtat, tota quidem tenſio eidem ponderi fluidi HDNM aequalis erit, pars autem *ee* eo utique minor. Accedente autem DE motu parallelo ad MB, ſpatium iſtud HDNM conti-

continuo imminuitur, unaque pondus fluidi, quod continere potest, decrescit, fitque tandem & spatium & pondus minus omni dabili. Ergo tanto magis vis *ee* omni dabili minor erit.

COROLLARIUM III.

§. 49. Ergo nec filamentum guttam horizontaliter ambiens quodcunque, vi *ee*, quam elasticitati aliqua ex parte similem esse vidimus, sese contrahens, ex ea sectione, quam ambit, exprimere fluidum poterit in aliam illa superiorem vel inferiorem; quod si fieri debeat, necessario vel pondus fluidi, vel alia vis ponderi comparabilis, superanda est. Consistitque ejus vis *ee* effectus in eo solo, quod particulas ordinet, in ea sectione positas, quam ambit, atque sibi mutuo admoveat reliquas, si forte aliquae, per actionem aliarum virium, ex eo plano translatae sint. Qua in actione cum sola superanda sit particularum inertia, vis quantumvis parva ad eam sufficit. Et generatim, si vis *ee*, una cum parte aliqua vis *cc*, ponderi alicui *p* oppositae sint; idque in aequilibrio contineant; sola pars illa vis *cc* ponderi *p* aequalis ponenda est, neglecta *ee* tanquam infinite parva.

§. 50. Neque tamen propterea filamentorum guttam in planis horizonti parallelis ambientium actio, ad mutandas earum figuras, prorsus nulla erit unquam. Si enim aliqua harum sectionum circulus non fuerit, partes filamenti sectionem eam ambientis aequales, a fluido illi incumbente aequaliter extrorsum pressae, inaequaliter reagent, quantumvis iners concipiatur filamentum, & ab omni elasticitate destitutum; conabunturque, quantum in se est, sectionem illam ad figuram circuli reducere. Verum eam figuram ubi sectio adepta fuerit, haec quoque actio cessabit, nullaque adeo erit in eo casu, quem solum consideramus, quo sectiones istae

omnes

omnes sunt circuli. Ad conservandam autem figuram guttarum nihil tensio ista filamentorum horizontalium conferet aliud, quam quod in ea fluidi actione, quam initio consideravimus, expositam figura III, resistentia vasis confert, quae nisi diffluxum fluidi secundum plana horizonti parallela prohiberet, actio fluidi, particulae B*b*, secundum verticalem BF eique parallelas, incumbentis, in hanc particulam nulla foret. Talis vis & in gutta requiritur, ut aliqua possit esse pressio in filamenta ejus verticalia, quae nisi adesset, dilaberetur fluidum inter eorum filamentorum interstitia; quam praestant filamenta horizontalia ita tensa. Motus a tensione hac, vel mutatio figurae, vel actio in filamenta verticalia omnino ulla, expectari non debent; utpote a vi, quae actione opposita fluidi filamentum extrorsum prementis, in aequilibrio continetur.

§. 51. Pendet ergo figura guttarum gravium, quarum sectiones horizonti parallelae sunt, a sola actione ponderis fluidi, ex quo constant, in filamenta verticalia. Sequiturque ex dictis, ne haec quidem filamenta vi aliqui contractili praedita esse, quae partem finitae magnitudinis quantumvis parvam ejus ponderis ferre possit. Quamvis, si contractilis talis vis, cujuscunque magnitudinis, filamentis his verticalibus inesse fingatur, nihil per eam in figura guttae mutetur. Dicatur tensio cujuslibet filamenti verticalis apud punctum datum, *tt*, eodem sensu quo dicta fuerunt *ee*, *cc*, §. 34. Erit *tt* per totam ejus filamenti longitudinem eadem. Generaliter enim verum est tensionem vel tenacitatem cujuscunque fili vel funis, ea perfectione flexilis, quae in mechanicis sumi solet, corpori cuicunque lubrico impositi, atque, viribus inter se aequalibus, ejus partibus extremis applicatis, in diversa tracti, secundum totam fili longitudinem eandem esse. Ni-

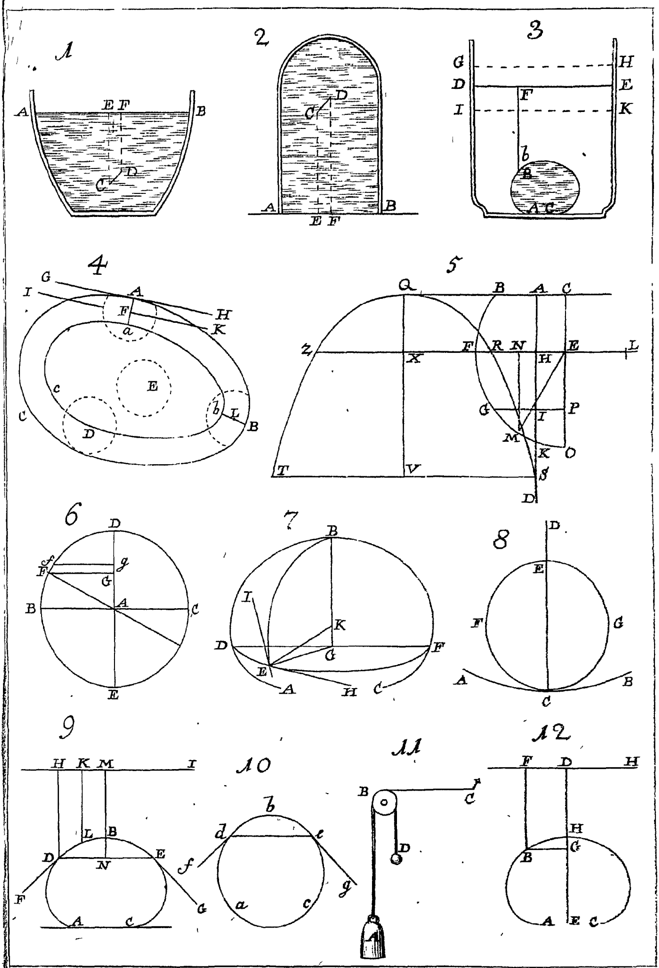
Nihil autem magis lubricum est ipso fluido, neque est apud guttam rotundam quidquam, quod diversas ejusdem filamenti verticales partes diversimode posset tendere. Porro, & ad omnia ejusdem guttae filamenta verticalia vim tt ejusdem magnitudinis esse, concedi debet.

F. VII. Cum ergo sit tenacitas ista filamenti verticalis BE, ad vim ex ea derivatam secundum EK, rectae EI, quae id apud E contingit, perpendicularem, ut $\varrho : \sigma$ (ita enim notata est ratio radii ad sinum curvedinis filamenti apud E, quae eadem est ratio radii circuli filamentum apud E osculantis, ad filamenti elementum) sitque, si elementa haec, ds, ubique ejusdem magnitudinis sumantur, $\varrho : \sigma = dx : -ddy$, notante dx elementum abscissae ab axi BG, & dy illi respondens elementum adplicatae EG, axi perpendicularis: erit vis illa vel resistentia secundum EK, a tenacitate tt pendens, $= -\frac{ddy}{dx}\,tt$.

PROBLEMA II.

§. 52. *Invenire figuram guttae basi suae insidentis, cujus sectiones horizonti parallelae omnes sunt circuli.*

Fig. XII Sit ABC sectio guttae per ejus axem DE, ejusque figurae perimeter unum filamentorum guttae verticalium. FH sit horizontalis ea, a qua, demissis ad filamentum ABC verticalibus, ut FB, pressio, quam §. 13. diximus p, aequatur facto xds, dicta FB ista, vel, quae ei aequalis est DG, x, ac posita g, quod notaverat gravitatem specificam fluidi, ex quo gutta constat, $=1$, quod pariter positum est, cum cc; ee, tt quadrata aequalia sumpta fuere ponderibus; reliquis denominationibus manentibus. Cum ergo pressio, qua elementum curvae puncto B adjacens extrorsum urgetur, aequalis sit vi sive resistentiae suo id loco retinenti, secundum eandem directionem



Comm. Soc. Reg. Scient. T. I. Tab. XV. p. 332.

nem introrſum agendo: erit $xds = -\frac{ddy}{dx}tt$, hinc $xdxds = -ttddy$, atque ad fluentes redeundo, $\frac{xxds}{2} = eeds - ttdy$. Valor autem conſtantis ee reperitur, poſita DH, quae eſt x ad filamenti ABC verticem, $= a$. Cum enim hoc loco ſit $dy = ds$, erit $\frac{aads}{2} = eeds - ttds$, & $ee = \frac{aa}{2} + tt$. Quo ſuo loco ſubſtituto, aequatio figuram ſectionis guttae exponens mutatur in hanc: $\frac{xxds}{2} = \frac{aads}{2} + ttds - ttdy$; ſive $2ttdy = aads + 2ttds - xxds$. Q. E. I.

§. 53. Haec ergo eſt aequatio pro gutta ſeſſili baſeos rotundae. Deducentur autem ex his & reliquae figurae, ſuperficierum aeri contiguarum vel vacuo, quibus fluida terminantur, in vaſis vel ſiphonibus ſtagnantia, vel guttae a corporibus pendentes, quibus adhaeſere: dummodo harum quoque figurarum ſectiones horizonti parallelae omnes circuli ſint.

§. 54. Quatuor omnino harum ſuperficierum formae ſunt, per ſiphones vel erectos vel inverſos optime declarandae. Prima ABC ſurſum convexa, quae liquidum infra ſuperficiem horizonti parallelam RS deprimit, ad quam preſſione ſolius ponderis fluidi crure ſiphonis altero N contenti, elevaretur, vi attractrice apud A, C, & reliqua puncta peripheriae circuli horizonti paralleli per haec puncta deſcripti, dempta. Altera DEF ſurſum concava, quae fluidum elevat ſupra ſuperficiem horizonti parallelam RS, ad quam decideret, vi attractrice apud D, F dempta, preſſione autem hydroſtatica in crure ſiphonis altero O, quae iam eſt, manente. Tertia GHI, deorſum convexa, quae fluidum ſuſtinet infra ſuperficiem horizontalem RS poſitum, cum tractione, F. XIII.

quae

quae pendet a pondere eius, quod cruri siphonis alteri P inest, id tantum sustineatur, quod plano illi RS insidet. Quarta denique KLM, deorsum concava, atque deorsum trahens liquidum sibi impositum, versus planum horizonti parallelum RS, supra quod tractio, pendens a pondere ejus, quod cruri hujus siphonis Q inest, id elevavit. Patetque facile, plures his formas locum non habere.

PROBLEMA III.

§. 55. *Superficie fluidi aeri contigua vel vacuo, cujus sectiones horizonti parallelae omnes circuli sunt, quorum centra in eundem axem verticalem cadunt, quacunque, per hunc axem secta, invenire figuram sectionis.*

I. In crure nN siphonis AnN, attractio nulla sit, stagnetque hic fluidum sola gravitate animatum sub superficie horizonti parallela per N posita, quae in RS cadat. Urgebitur ergo quaelibet particula superficiei ABC directe extrorsum a pressione hydrostatica fluidi crure nN contenti, eruntque ejus pressionis, atque reactionis ipsius superficiei ABC, non aliae conditiones, quam quas in superioribus posui. Ergo & figura sectionis aequatione §. 52. reperta exponetur, verticalibus x ab horizontali RS deorsum vergentibus, quarum minima est a; atque semiordinatis y, iis certe quae vertici B vicinae sunt, crescentibus, dum x a termino a crescunt.

II. In crure oO siphonis DoO stagnet liquidum sub O & sub superficie horizonti parallela, quae itidem in RS cadat, pariterque solo pondere suo, attractione nulla turbatum, agat adversus fluidum crure siphonis altero contentum. Sustinebit ergo solum fluidum, quod in hoc crure sub plano RS stagnat, reliquum a superficie DEF sustinebitur, atque vicissim omnes ejus superficiei particulas directe extrorsum trahet, sic, ut ut ejus tractionis eaedem prorsus leges sint, quae fuere pressionis, quam modo consideravimus. Neque ergo sectionis DEF figura, a figura sectionis ABC aliter, quam sola positione respectu horizontalis RS, differet.

III. In crure pP siphonis inversi GpP, liquidum itidem sola gravitate animatum, stagnet supra superficiem horizonti parallelam RS, atque tractione sua hydrostatica retineat liquidum, quod in crure opposito supra idem planum RS situm est. Reliquum ergo hujus siphonis liquidum a superficie GHI coercebitur, atque vicissim quamlibet ejus particulam directe extrorsum premet, vi, quae nunc quoque eodem modo exponenda est, quo in casibus praecedentibus exponebatur. Verum, semiordinatis y crescentibus, verticales x hic decrescunt, quod aliqua in aequatione reperta mutat. Scribendum scilicet jam est $-dx$ loco dx in aequatione $xdxds = - ttddy$, ut fiat $xdxds = ttddy$; unde ad fluentes redeundo, fit $\frac{xxds}{2} = eeds + ttdy$, atque $ee = \frac{aa}{2} - tt$. Hinc $\frac{xxds}{2} = \frac{aads}{2} - ttds + ttdy$, &, $2ttdy = 2ttds - aads + xxds$.

IV. In crure qQ siphonis inversi KqQ liquidum pariter sola gravitate deorsum impulsum stagnet supra superficiem horizonti parallelam RS, quam apud Q attingat. Urgebit ergo tractione sua puncta superficiei KLM directe extrorsum, viribus, quae nunc quoque sunt, ut eorum punctorum distantiae a plano horizontali RS, crescentque hic etiam semiordinatae y, his distantiis x decrescentibus. Erit ergo figura sectionis, quoad aequationem, qua exponitur, plane similis figurae GHI, solaque positione respectu lineae horizontalis RS ab ea diversa.

V. Demptis autem vel obstructis tubis nN, oO, pP, qQ, ut ut ex siphonibus vasa fiant, mutataque eorum vasorum figura utcunque, dummodo ea mutatio puncta superficierum curvarum, quas insideravimus, non attingat, nihil in his superficiebus mutatum iri, cum facile perspicitur, aequationes,

$$2ttdy = 2ttds + aads - xxds$$
$$2ttdy = 2ttds - aads + xxds,$$

generatim figuram sectionis, quam quaesivimus, expriment, pertinebitque earum prior ad figuras ABC, DEF, versus horizontalem RS convexas; altera ad concavas, GHI, KLM.

COROLLARIUM.

§. 56. Et, si r dicatur radius circuli, quamcunque figurarum istarum osculantis in puncto, cujus distantia ab horizontali RS est x, quia generatim est $r ; ds = tt : xds$, erit ubique $tt = rx$. Ad quamlibet ergo harum figurarum erit rectangulum rx ejusdem ubique magnitudinis tt; unde r cujuslibet puncti $= \frac{tt}{x}$ prodibit, x adplicata ad quadratum tt, eruntque duorum quorumvis eandem figuram osculantium circulorum radii r, ut x, distantiae punctorum figurae, quae osculantur, a recta RS, inverse. Eademque & de duabus quibusvis earundem figurarum vera erunt, si ad utramque earum tt ejusdem magnitudinis fuerit.

SECTIO

SECTIO II.

FIGURIS SUPERFICIERUM FLUIDARUM VERSUS BASIN CONVEXIS.

§. 57. Erunt jam figurae istae paullo accuratius considerandae; primo quidem illae, quae horizontali RS convexitatem obvertunt, deinde & eae, quae ei obvertunt concavitatem, apud verticem certe B, E, H vel L. Fieri enim potest, ut quae figura eo loco ad RS concava est, alibi versus eandem rectam convexa fiat. Horizontalem autem istam RS cujusvis figurae *Basin* dicam.

§. 58. Figura XIV duas hujus generis superficierum F. XIV.
sectiones per axim conjunctim sistit, estque in ea RS basis ea, quae & in proxima figura his litteris notata fuit; AB, basi RS perpendicularis, producta in *b*, communis superficierum axis; CDE sectio guttae sessilis, vel superficiei, qualis solet esse hydrargyri, in vase vitreo cylindrico, stagnantis, cujus axis verticalis est, vel aquae ultra marginem ejusmodi vasis assurgentis, quae figura XIII notabatur per ABC; & *cde* sectio superficiei sursum concavae, qualis solet esse aquae in vase vitreo cylindrico, cujus axis itidem horizonti rectus est, stagnantis, quae figura XIII signatur litteris DEF; D, *d* sunt

ſunt vertices harum ſectionum, unde DA fit $= a$, ad inferiorem, Ad autem ad ſuperiorem. Ponuntur enim hae rectae a inter ſe aequales, neque tt ſectionis CDE ab tt ſectionis cde diverſa eſſe. FG, gf ſectiones apud puncta F, f utcunque ſumpta contingunt, axi occurrentes apud G, g, & per eadem puncta FH, fh horizonti parallelae ſunt, qua re fit AH vel Ah, x, ipſaeque FH, fh, fiunt y. Quae vero de his figuris cognoſci poſſunt, aequatione

$$2ttdy = 2ttds + aads - xxds$$

comprehenduntur.

COROLLARIUM I.

§. 59. Eſt ergo $ds : dy = 2tt : (2tt + aa - xx)$. Sed $ds : dy =$ FG : FH vel $fg : fh$ eſt ratio radii ad ſinum anguli FGH, fgh, quem tangens includit cum axe. Hinc datis conſtantibus, a, t angulus iſte, vel poſitio tangentis, ad quodlibet punctum ſectionis, vel ad quamlibet x, datur; & viciſſim dato angulo iſto x in promptu eſt.

COROLLARIUM II.

§. 60. Apud verticem D vel d, ubi $ds = dy$, tangens axi perpendicularis, atque horizontali RS parallela eſt. Inde creſcente x, ex analogia iſta $ds : dy = 2tt : (2tt + aa - xx)$ ſequitur dy decreſcere, ſic tamen ut poſitiva maneat, quamdiu xx minus eſt, quam $2tt + aa$. Porro autem creſcente x, poſtquam ad eam magnitudinem pervenit, uti fit $xx = 2tt + aa$, evaneſcit dy, ſimulque angulus, qui, puncto F, f a vertice recedente, decreverat, atque recta, IK, ik, quae ſectionem apud puncta haec I, i contingit, axi parallela fit. Inde ſi x ulterius creſcat, fit dy negativa, quod indicio eſt curvam iterum ad axem accedere, rectasque, quae eam apud haec

haec puncta contingunt, axi occurrere ad partes B, b, sensimque crescere angulos, quos cum axe includunt, x ita crescente, quia, quo major fit negativa $2tt + aa - xx$, eo & dy majorem fieri necesse est. Finis hujus incrementi est, ubi $xx = 4tt + aa$. Hoc enim posito fit $ds : dy = 2tt : (2tt + aa - 4tt - aa) = 2tt : -2tt$, atque $ds = - dy$. Angulus ergo CBA, cba, quem recta CE, ce curvam hoc loco contingens, cum axe Bb includit, rectus est. Ulterius autem si crescere ponatur x, sequitur dy ipsa ds majorem esse posse, quod fieri nequit, nisi angulus detur, cujus sinus radium excedit.

COROLLARIUM III.

§. 61. Continebitur ergo curva CDE, cde universa inter rectas horizonti parallelas, quarum una per D, d duci potest id est ad distantia ab RS aequalem a, altera autem per B, b transit, cujus puncti distantia ab A est $\sqrt{(4tt + aa)}$. Ex eo autem, quod recta, quae curvam apud C, c, E, e, contingit, axi perpendicularis sit, non sequitur eam in sese redire, vel apud puncta B, b axi conjungi.

COROLLARIUM IV.

§. 62. Si & per I, i, punctum contactus rectae IK, ik axi parallelae, horizontalis IL, il ducatur, erit AL, Al = $\sqrt{(2tt + aa)}$ §. 60. Haec ergo AL vel Al si dicatur c, & AB sive Ab, quae fuit = $\sqrt{(4tt + aa)}$ sit b; per quaslibet duas rectarum a, b, c, datur tt. Nam quia $bb = 4tt + aa$, & $cc = 2tt + aa$, erit $4tt = bb - aa$, & $2tt = cc - aa$, & $bb - cc = 2tt$.

COROL-

COROLLARIUM V.

§. 63. Hinc porro sequitur $bb - cc = cc - aa$, id est, quadrata bb, cc, aa esse in progressione arithmetica; atque, aequalibus his quadratorum differentiis in factores suos solutis, esse $b - c : c - a = c + a : b + c$. Id est BL : LD = L$d$: Lb.

COROLLARIUM IV.

§. 64. Datur etiam tt per DL & LB datas. Sit DL, quae fuit $c - a = m$, & LB $= b - c$ sit $= n$; AD autem $= a$ incognita ponatur, quam investigare animus est. Erit AL $= c = a + m$, & AB $= b = a + m + n$. Ergo $bb - cc = 2an + 2mn + nn$ & $cc - aa = 2am + mm$; quae cum aequalia sint; ex aequatione $2na + 2nm + nn = 2ma + mm$ facile elicitur a, atque hinc b & c, per quarum rectarum duas quasvis tt dari vidimus.

§. 65. Sunt & aliae hujus generis viae ad tt perveniendi. Verum mihi adeo difficilis visa est accurata mensuratio rectarum, a quibus progrediuntur, a, b, c, m, n & similium, ut eam nequidem tentare voluerim. Neque ergo adhuc adfirmare possum tt eandem esse, ad quamvis ejusdem fluidi guttam, sive magna ea, sive parva fuerit. Quod an ita sese habeat an secus, deficiente hic, propter legem attractionis nondum cognitam, ratiocinio, sola docere potest experientia. Illud per eam facile evincitur, crescente AD vel Ad, DL vel dl decrescere. Cum ergo, quo differentia duorum quadratorum $cc - aa$ maneat, crescente latere alterutrius a, differentia laterum $c - a$ decrescere debeat; sique crescente a, differentia $c - a$ decrescat, differentia quadratorum $cc - aa$ vel prorsus non, vel certe non adeo multum, mutetur; tt, quam dimidio differentiae $cc - aa$ aequalem esse vidimus, non abs-

absque omni probabilitate, ad omnes ejusdem fluidi guttas, eadem fumetur, a quacunque caussa haec aequalitas pendeat. Verum probabilitatem hanc vel in certitudinem evehendi vel refutandi, argumenta, quae sequuntur, dabunt. Figurarum autem ipsarum symptomata reliqua ex earum quadratura commodius deducentur.

PROBLEMA. IIII.

§. 66. *Ducta per punctum curvae CDE*, cde *quodcunque F*, f *recta FM*, fm, *axi Bb parallela, spatium curvilineum DFMA*, dfmA, *quadrare.*

Elementum spatii hujus est xdy; aequatio autem ad curvam haec, $(2tt + aa - xx)\, ds = 2ttdy$, & $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Hinc $(2tt + aa - xx)^2\, (dx^2 + dy^2) = 4t^4\, dy^2$, & $(2tt + aa - xx)^2\, dx^2 = (4t^4 - (2tt + aa - xx)^2)\, dy^2$.

Pono hanc differentiam quadratorum $4t^4 - (2tt + aa - xx)^2$, sive $- 4ttaa - a^4 + 4ttxx + 2aaxx - x^4$ aequalem quadrato $ffvv$, sumpta constanti f pro arbitrio. Erit $(2tt + aa - xx)^2\, dx^2 = ffvvdy^2$, & $(2tt + aa - xx)\, dx = fvdy$, hinc $dy = \frac{(2tt + aa - xx)\, dx}{fv}$ & $xdy = \frac{(2tt + aa - xx)\, xdx}{fv}$. Fluxio autem aequationis $- 4ttaa - a^4 + 4ttxx + 2aaxx - x^4 = ffvv$ cum sit $8ttxdx + 4aaxdx - 4x^3\, dx = 2ffvdv$, vel $(2tt + aa - xx)\, xdx = \frac{1}{2} ffvdv$, erit $\frac{(2tt + aa - xx)\, xdx}{fv} = \frac{1}{2} fdv$, hinc & $xdy = \frac{1}{2} fdv$. Ergo spatium quaesitum $\int xdy = \frac{1}{2} fv + ee$.

Verum ee nihilo aequale esse mox perspicitur. Si enim x ponatur $= a$, spatium ADFM $= \int xdy$, evanescit, fitque adeo

adeo $\frac{1}{2} fv + ee = 0$. Eadem autem a in locum x aquatio- nis $4t^4 - (2tt + aa - xx)^2 = ffvv$ suffecta, colligitur $fv = o$; ergo & $ee = o$, Estque adeo $\int xdy$, sive spatium DFMA, vel $dfmA = \frac{1}{2} fv$.

COROLLARIUM I.

§. 67. Pendet ergo inventio spatii DFMA, $dfmA$, a curva, ad quam $4t^4 - (2tt + aa - xx)^2$, sive $- 4t^2a^2 - a^4 + 4t^2x^2 + 2a^2x^2 - x^4, = ffvv$, qua ad axem B$b$ sic descri- pta, ut x utriusque curvae, CDE vel cde, & novae hujus, eaedem sint, spatium illud ad quamlibet x reperitur nullo ne- gotio. Substituto vero in locum $4tt + aa$ hujus aequationis, quod §. 62 ei aequale esse vidimus, bb, fit $- bbaa + bbxx + aaxx - x^4 = ffvv$, ex qua aequatione primariae curvae pro- prietates facile deducuntur. Namque

1) Primum hujus aequationis membrum in duos hos factores $bb - xx$ & $xx - aa$ solvitur, & horum quilibet in duos alios; $bb - xx$ in $b + x$, & $b - x$; & $xx - aa$ in $x + a$ & $x - a$. Si ergo ponatur $v = o$, quatuor repe- riuntur x, ad puncta in quibus curva cum axe concurrit, una $= + b$, altera $= - b$, tertia $= + a$, quarta $= - a$; ca- duntque eorum punctorum duo B, D ad unam baseos RS par- tem, reliqua b, d ad alteram.

2) Si x sumatur minor quam a, fit $xx - aa$ negati- vum; verum $bb - xx$ positivum manet, quia b major est quam a, tantoque major quam ista x. Ergo $(bb - xx)(xx - aa) = ffvv$ negativum fit, & v impossibilis. Sin x major suma- tur quam b, fit $bb - xx$ negativum, sed $xx - aa$ positivum manet, quia a, minor quam b, tanto minor est, quam hac x. Unde $(bb - xx)(xx - aa) = ffvv$ denuo negativum fit, & v im-

v impossibilis. Eademque pariter vera sunt, si a, b, x omnes sumantur negativae, id est, si ponantur cadere ad partem baseos RS oppositam illi, ad quam ante cadebant; quia ea re nihil in functione $(bb - xx)(xx - aa)$ mutatur. Rectarum ergo basi RS parallelarum nulla curvam secat, quae vel intra puncta D, d cadit, vel extra B, b.

3) Verum si x minor quidem sumatur quam b, major autem quam a, utrumque $bb - xx$ & $xx - aa$ positivum est, atque hinc $(bb - xx)(xx - aa) = ffvv$ possibile. Cumque hinc eliciatur $fv = \pm \sqrt{((bb - xx)(xx - aa))}$; cuilibet x ita sumptae duae respondent v inter se aequales, quarum una ad dextram axis Bb partem cadit, altera ad sinistram. Eaedemque prorsus v prodeunt, si x sumatur negativa. Quaelibet ergo rectarum basi RS parallelarum, quae vel intra B, D cadit vel intra b, d, curvam bis secat, sic ut partes ejus, utrinque inter axem & curvam interceptae, aequales sint; atque duae quaelibet harum ordinatarum, quae aequaliter a puncto A distant, & inter se aequales.

4) Constat ergo figura, quam aequatio $-bbaa + bbxx + aaxx - x^4 = ffvv$ definit, ex duabus ovalibus FDG, fdg, similibus inter se & aequalibus, similiterque ad basin positis, quarum quaelibet ab axe Bb in partes similes & aequales secatur. Unde, si per A recta ducatur quaecunque, alterutram ovalium secans in F, G, eadem producta & alteram secabit in f, g, sic ut hujus rectae partes FA, GA, oppositis Af, Ag aequales sint, atque ab ovalibus partes FG, fg inter se similes & aequales, sed alterne positas, abscindant. Ergo A curvae centrum erit, atque Bb, Mm ejus axes, hic quidem infinitae magnitudinis, ille autem finitae. Fig.XV

5) Ex aequatione autem ad eandem curvam $4t^4 - (2tt + aa - xx)^2 = ffvv$ perspicitur, vv crescere, quando quadratum

dratum $(2tt + aa - xx)^2$, a constanti $4t^4$ subtrahendum ut relinquatur $ffvv$, decrescit, & maximum fieri, quando hoc quadratum fit minimum, decrescere, dum idem quadratum crescit. Verum omne quadratum semper cum radcie sua pariter crescit vel decrescit, sive positiva haec sit sive negativa, estque minimum quadratorum radicis cujuscunque variabilis semper nihilum, cujus & radix nihilum est. Erit ergo v maxima, quae respondet abscissae x, ex aequatione $2tt + aa - xx = 0$ eliciendae, id est, ea quae respondet $x = \surd(2tt + aa)$, sive $x = c$, sic enim supra §. 62. $\surd(2tt + aa)$ signata est. Ad hunc terminum, a punctis D, d, semiordinatae crescunt, ab eodemque, ad B, b vicissim decrescunt. Maxima autem omnium semiordinatarum, quae imposterum dicetur e, est $= \frac{2tt}{f}$; quia, si in aequatione, quam modo tractamus, loco x scribatur $\surd(2tt + aa)$, & e loco v, elicitur $2tt = fe$.

COROLLARIUM II.

§. 68. Descripta ergo curva FDG fdg, ductaque HI, hi basi sive axi mM parallela, quae sectionem CDE secet in K, k si ab his punctis K, I, k, i, ad eandem mM, perpendiculares demittantur, KL, IM, kl, im, factaque AN, A$n = \frac{1}{2}f$, compleatur rectangulum AP, Ap, erit hoc rectangulum aequale spatio curvilineo ADKL Adkl. Atque vicissim si linea CDE, cde a puncto D, d curvetur ita, ut ubique rectangulum AP, Ap spatio curvilineo ADKL, Adkl aequale sit, erit GDE, cde figura sectionis superficiei fluidae, de qua jam agitur.

COROLLARIUM III.

§. 69. Si HI, hi axi mM parallela, maxima sit earum, quae ita intra curvam FDG fdg ordinari possunt, punctum K, k in-

k incidit in contactum rectae axi B*b* parallelae, & curvae CDE, *cde*, fitque rectangulum AP, A*p*, spatio ADKL, A*dkl* aequale, $\frac{1}{2}fe$; quod cum sit *tt*, sequitur & spatium ADKL, A*dkl* ad hunc rectae HI, *hi* situm, quadrato *tt* aequale fore. Inde si HI, *hi* versus B, *b* fluere pergat, rectangulum AP, A*p* imminuitur, unaque spatium curvilineum, quia scilicet jam KL, *kl* versus axem B*b* redit, ac, quod spatium hoc motu verrit, id a spatio ab ea ante descripto subtrahendum est. Eadem HI, *hi*, ubi punctum B, *b* attingit, rectangulum AP, A*p*, atque spatium, motu crescentis KL, *kl* generatum, evanescit; quod indicio est partem ejus negativam, quae descripta est ab KL, *kl*, a contactu curvae CDE, *cde* revertente, aequalem esse positivae, quam eadem recta descripsit, ab AD, A*d* ad contactum eum promota. Si ergo KL, *kl* ipsa curvam contingere ponatur, a puncto autem E, *e* axi B*b* parallelam esse EQ, *eq*, erit ADKL = LKEQ, & A*dkl* = *lkeq*.

COROLLARIUM IV.

§. 70. Atque hinc clare apparet, terminum curvae E, *e*, quo loco ejus tangens basi *m*M parallela est, non attingere axem B*b*. Si enim attingeret, spatium BKLA spatio KLAD aequale foret, totum parti, quod esse nequit. Abrumpitur ergo hoc loco curva, non progressura ulterius, nisi semiordinata HI, *hi*, postquam punctum B, *b* attigit, iterum versus axem *m*M redeat. Si autem redeat, generantur iterum rectangula $\frac{1}{2}fv$, atque HI, *hi* sensim ad *m*M accedente, primo quidem crescunt, deinde, quemadmodum ante a nihilo creverant, ad nihilum usque decrescunt. Spatia autem rectangulis istis aequalia, incipiendo a puncto E, *e* ad quamlibet partem rectae EQ, *eq* apponere licet, quia, ad quamcunque apponantur, spatium, quale recta

recta KL, *kl* motu suo antea descripserat, indeque destruxerat contrario motu, denuo aliquod prodit, ac primo quidem, recedente KL, *kl* ab EQ, *eq*, crescit, deinde, ubi KL, *kl* moveri incipit in contraria, decrescentibus v, vicissim decrescit, eodem in utraque constructione modo. Si autem spatia ista ad partem A, rectae EQ, *eq* apponantur, producitur curva CDE, *cde* a puncto E, *e* in spatium inter parallelas B*b*, & EQ vel *eq* interceptum, redit deinde versus EQ, *eq*, eamque secat in puncto R, *r*, quo eadem recta antea secta fuit a parte ejusdem curvae DKE, *dke*; inde porro progreditur, fitque apud punctum S, *s*, quod a basi *m*M tantundem, quam D, *d* distat, basi huic parallela. Pars autem curvae ERS, *ers* parti EKD, *ekd*, similis & aequalis est, & utraque apud R, *r* similiter dividitur. Neque apud S istud vel *s* curvae finis est; verum redeunte denuo recta HI *hi* versus B, *b*, ad punctum S, *s* ei pars accrescit, parti DRE, *dre* similis, aequalis, & similiter posita: & ita, productis per B, D, *b*, *d* rectis basi *m*M parallelis, curva ista CDERS, *cders*, utramque harum parallelarum alternatim contingens, ad utramque axis B*b* partem excurrit in infinitum, praeter hunc B*b* eique homologos, & alios axes transversos EQ, *eq*, assumens, utrosque numero infinito.

COROLLARIUM V.

§. 71. Si in aequatione $4t^4 - (2tt + aa - xx)^2 = ffvv$, ex ea, quae fundamenti loco est, $(2tt + aa - xx)\,ds = 2ttdy$ substituatur $\frac{4t^4 dy^2}{ds^4}$ pro $(2tt + aa - xx)^2$, fit $\frac{4t^4 ds^2 - 4t^4 dy^2}{ds^2} = ffvv$, sive $\frac{4t^4 dx^2}{ds^2} = ffvv$, & $\frac{2t^2 dx}{ds} = fv$, vel $\frac{t^2 dx}{ds} = \frac{1}{2} fv$, id est, $ds : dx = t^2 : \frac{1}{2} fv$. Est ergo generatim radius, ad sinum anguli, quem recta quaecunque curvam CDE, *cde* contingens includit cum horizontali, ut t^2 ad $\frac{1}{2} fv$, hoc est, ut spatium ADKL, A*dkl*, ad spatium eius generis, quod adjacet abscissae x, quae pertinet ad punctum illud contactus. Et quia

$tt = \frac{1}{2} fe$, eſt quoque $ds : dx = e : v$, notante e nunc quoque ſemiordinatarum curvae FDG, fdg maximam HI, hi.

§. 72. Superficiebus, quas modo conſideramus, ſola ſervit pars curvae CDE, cde, cujus arcus, a vertice D, d incipientes, modo majores modo minores, cum axe Bb revoluti, ſuperficies eas generant. Magnitudo autem arcuum, ceteris paribus, a poſitu ſuperficiei corporis ſolidi pendet, quo ſuperficies fluida terminatur. Guttae plano horizonti parallelo inſidentis ſectio eſt tota CDE; cde vero eſt ſectio guttae aereae, vel ſi ita loqui licet, guttae vacui, in vaſe aqua, vel alio ejus generis fluido, tantum non pleno, atque plano horizonti parallelo contecto, haerentis. Aerem enim hic non agere pono, & ſpatium aere plenum concipio, quaſi eſſet vacuum. Eam ſectionem figura XVI ſeorſim exhibet, notantibus A, B, C, D, E punctis, quae in antecedentibus figuris per has litteras notabantur. CE ergo eſt diameter baſeos cui gutta inſidet, vel ſub qua ſedet, & CB ejus baſeos ſemidiameter. FH diametrorum guttae horizontalium maximam notat, cujus FG dimidium eſt. Denique DB $= b - a$ eſt guttae altitudo. Figura ergo CDE deſcribi quidem per quadraturam modo datam poteſt: optabile autem fuit, puncta ſaltem principalia curvae C, F, D, H, E accuratiori methodo determinari, quam ſolae ſuppeditaverunt numerorum certa ratione convergentium ſeries.

PROBLEMA V.

§. 73. *Puncta curvæ CDE mediante ſerie infinita ad eius axem AB referre.* F. XVI

In Problemate praecedenti fuit $x\,dy = \frac{1}{2} f\,dv$, unde $dy = \frac{\frac{1}{2} f\,dv}{x}$. Sed x obtineri poteſt ex aequatione ejusdem Problematis $-4ttaa - a^4 + 4ttxx + 2aaxx - x^4 = ffvv$, quae quidem,

 ſi

si in locum $4tt+aa$ surrogetur bb, & cc in locum $2tt+aa$, quorum aequalitas supra ostensa est §. 62, fit $-bbaa+2ccxx-x^4 = ffvv$, vel $x^4-2ccxx=-bbaa-ffvv$; unde $cc-xx= \surd(c^4-bbaa-ffvv)$, siquidem x minor fuerit quam c, quod cum locum habeat in vicinia verticis, D, d, hic usurpabitur. Hinc autem $x^2=c^2-\surd(c^4-bbaa-ffvv)$. Jam quia $c^2=2tt+aa$, & $b^2=4t^2+aa$, est $c^4-bbaa=4t^4+4t^2a^2 + a^4-4t^2a^2-a^4=4t^4$, atque $xx=c^2-\surd(4t^4-ffvv)$, vel si loco $2tt$ scribatur fe §. 67, erit $xx=c^2-\surd(f^2e^2-f^2v^2) = c^2-f\surd(e^2-v^2)$, & $x=\surd(c^2-f\surd(e^2-v^2))$. Unde $dy=\frac{\frac{1}{2}fdv}{\surd(c^2-f\surd(e^2-v^2))}$

Haec expressio etsi in seriem converti possit, commodior tamen multo est, quae prodit faciendo $\surd(e^2-v^2)=z$, unde fit $e^2-v^2=zz$, & $vv=ee-zz$, atque $vdv=-zdz$, hinc $dv=\frac{-zdz}{\surd(ee-zz)}$; quibus omnibus substitutis fit $dy= \frac{-\frac{1}{2}fzdz}{\surd(ee-zz)}\times\frac{1}{\surd(cc-fz)}$.

Soluitur autem factor $\frac{1}{\surd(cc-fz)}$ per theorema binomiale in seriem hanc

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{fz}{c^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{f^2z^2}{c^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{f^3z^3}{c^7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{f^4z^4}{c^9}$$
$$+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{f^5z^5}{c^{11}}+ \&c.$$

Multiplicatisque hujus seriei terminis alterne sumptis per $-\frac{\frac{1}{2}fzdz}{\surd(ee-zz)}$, duae producuntur series, quarum summa fluxioni dy aequalis est. Earum serierum prima est

$$A = -\frac{\frac{1}{2} f}{c} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} f^3}{c^5} \cdot \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2} f^5}{c^9} \cdot \frac{z^5\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}}$$
$$- \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{2} f^7}{c^{13}} \cdot \frac{z^7\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} - \&c.$$

Altera vero haec

$$B = -\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} f^2}{c^3} \cdot \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} f^4}{c^7} \cdot \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2} f^6}{c^{11}} \cdot \frac{z^6\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}}$$
$$- \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{1}{2} f^8}{c^{15}} \cdot \frac{z^8\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} - \&c.$$

quae adeo ſi ad fluentes reducantur, ſumma fluentium iſtarum, quae dicentur a, b, exhibet y.

In ſerie A exponentes dignitatum lineae variabilis z omnes impares ſunt, qui ſeſe excipiunt ordine. Eſt autem differentialis $\frac{z^n\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}}$, ubi n impar eſt, integrale iſtud:

$$-\frac{1}{\varkappa}(\alpha z^{n-1} + \beta e^2 z^{n-3} + \gamma e^4 z^{n-5} + \ldots \mu e^{n-1})\sqrt{(ee-zz)}$$

in quo exponentes $n-1$, $n-3$, $n-5$ omnes pares ſunt, & decreſcunt usque ad o. Praeterea autem

$\varkappa = n.\ n-2.\ n-4.\ n-6\ \ldots\ 1,$

$\alpha = \frac{\varkappa}{n}.$

$\beta = \alpha.\ \frac{n-1}{n-2}.$

$\gamma = \beta.\ \frac{n-3}{n-4}.$

$\delta = \gamma.\ \frac{n-5}{n-6}$, & ita porro, usque dum peruentum ſit ad minimos omnium parium vel imparium, 2, 1. Hanc ergo formulam ad terminos ſeriei A applicando, fit

$$\int.\ \frac{z\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -1.\ \sqrt{(ee-zz)}$$

$$\int.\ \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -\frac{zz+2ee}{3}.\ \sqrt{(ee-zz)}$$

$$\int \frac{z^5\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -\frac{3.z^4 + 4.e^2z^2 + 2.4.e^4}{3.\ 5}\sqrt{(ee-zz)}$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -\frac{3.5.z^6 + 3.6.e^2z^4 + 6.4.e^4z^2 + 6.4.2.e^6}{3.\ 5.\ 7}\sqrt{(ee-zz)}$$

&c.

His ergo in coefficientes conſtantes feriei A, id eſt in, $-\frac{\frac{1}{2}f}{c}$, $-\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}f^3}{c^5}$ & reliquos multiplicatis, prodit feries

$$a = \frac{f}{2}.\ \frac{1}{c}.\sqrt{(ee-zz)}$$
$$+\frac{1.\ 3}{1.\ 2}.\frac{f^3}{2^3}.\ \frac{zz+2ee}{3.\ c^5}.\sqrt{(ee-zz)}$$
$$+\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}.\frac{f^5}{2^5}.\frac{3z^4+4e^2z^2+8e^4}{3.\ 5.\ c^9}.\sqrt{(ee-zz)}$$
$$+\frac{1.3.5.7.9.11}{1.2.3.4.5.6}.\frac{f^7}{2^7}.\frac{15z^6+18e^2z^4+24e^4z^2+48e^6}{3.\ 5.\ 7.\ c^{13}}.\sqrt{(ee-zz)}:$$
$$+\ \&c.$$

In ferie autem B exponentes lineae variabilis z omnes pares ſunt, atque ordine continuo creſcunt, ut generatim coefficiens variabilis cujuſcunque termini ejus feriei ſit . . . $\frac{z^n\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}}$, ſi n quemlibet numerum parem denotet. Hujus formae fluxiones ad fluentes reducuntur, ſi π ponatur arcus eſſe circuli radio $= 1$ deſcripti, cujus ſecans eſt $\frac{e}{z}$, quo ſumpto ſit $d\pi = -\frac{dz}{\sqrt{(ee-zz)}}$ atque $\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} =$
$-\frac{1}{\varkappa}((\alpha z^{n-1} + \beta e^2 z^{n-3} + \gamma e^4 z^{n-5} + \ldots\ldots\ldots$
$\mu e^{n-2} z)\ \sqrt{(ee-zz)}\ + \mu e^n \pi.$
Exponentes $n-1$, $n-3$, hic omnes impares ſunt, atque decreſcunt, ut apparet: $\varkappa$ autem, α, β, γ, δ eodem modo reperiuntur, quo in ferie praecedenti.

His

His ergo fubftitutis, fit in hac ferie B

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -\frac{z}{2}.\sqrt{(ee-zz)} - \frac{ee\pi}{2}$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -\frac{2z^3+3e^2z}{2.4}.\sqrt{(ee-zz)} - \frac{3e^4\pi}{2.4}$$

$$\int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -\frac{2.4.z^5+2.5.e^2z^3+5.3e^4z}{2.4.6}.\sqrt{(ee-zz)} - \frac{5.3e^6\pi}{2.4.6}$$

$$\int \frac{z^8\,dz}{\sqrt{(ee-zz)}} = -\frac{6.4.2.z^7+4.2.7.e^2z^5+2.7.5e^4z^3+7.5.3.e^6z}{2.4.6.8}$$

&c $\sqrt{(ee-zz)} - \frac{7.5.3.e^8\pi}{2.4.6.8}$

atque his in coefficientes conftantes ejusdem feriei B, id eft, in $-\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}f^2}{c^3}$, $-\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{2}f^4}{c^7}$ & reliquos multiplicatis, prodit feries

$$b = \frac{f^2}{2^2}.\frac{z\sqrt{(ee-zz)}+\pi ee}{2.c^3}$$

$$+\frac{1.3.5}{1.2.3.2^4}.f^4.\frac{(2z^3+3e^2z)\sqrt{(ee-zz)}+3\pi e^4}{2.4.c^7}$$

$$+\frac{1.3.5.7.9.}{1.2.3.4.5}.\frac{f^6}{2^6}\;\frac{(8z^5+10e^2z^3+15e^4z)\sqrt{(ee-zz)}+15\pi e^6}{2.4.6\;c^{11}}$$

$$+\frac{1.3.5.7.9.11.13.}{1.2.3.4.5.6.7.2^8}f^8\frac{(48z^7+56e^2z^5+70e^4z^3+105e^6z)\sqrt{(ee-zz)}}{2.4.6.8.\;c^{15}}$$

$$+\frac{105\pi e^8}{}$$

&c. Duae ergo iftae feries a & b, quarum fumma eft y, propofito fatis faciunt, poteftque per eas curva CDE, ad datas c atque f, e, conftrui.

COROLLARIUM I.

§. 74. Maxima femiordinatarum curvae eft ea, ad quam HI, *hi* Fig. XV. quam generatim diximus v, eft $= e$, atque adeo $z = \sqrt{(ee-vv)} = 0$. Secans autem arcus π ad radium 1, quae fuit $\frac{e}{z}$, hic fit $\frac{e}{0}$ adeoque ipfa fecans infinita, quod indicio

dicio est ipsum π ad hunc locum quadrantem esse. His omnibus observatis series a mutatur in istam

$$\alpha = \frac{f}{2} \cdot \frac{e}{c}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{f^3}{2^3} \cdot \frac{2 \cdot e^3}{3 \cdot c^5}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{f^5}{2^5} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot e^5}{3 \cdot 5 \cdot c^9}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{f^7}{2^7} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot e^7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot c^{13}}$$

&c

Sumpto autem t pro guttae modulo, si dicatur $t = 1$, erit & $\frac{fe}{2} = tt = 1$, & generatim $\frac{f^n e^n}{2^n} = 1$: mutabiturque series in istam

$$\alpha = \frac{1}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \frac{1}{c}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3\, c^5} \quad \ldots\ldots \quad = \frac{1}{c^5}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot c^9} \quad \ldots\ldots \quad = \frac{7}{3\, c^9}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot c^{13}} \quad \ldots \quad = \frac{33}{5\, c^{13}}$$

+ &c.

COROLLARIUM II.

§. 75. In serie autem b si eadem substituantur, ponaturque π jam notare peripheriae quadrantem, fit

$$\beta = \frac{f^2}{2^2} \cdot \frac{\pi \cdot e^2}{2 \cdot c^3}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{f^4}{2^4} \cdot \frac{3 \cdot \pi \cdot e^4}{2 \cdot 4 \cdot c^7}$$

+

$$+\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{f^6}{2^6}\cdot\frac{3.5.\pi.e^6}{2.4.6.c^{11}}$$

$$+\frac{1.3.5.7.9.11.13}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{f^8}{2^8}\cdot\frac{3.5.7.\pi.e^8}{2.4.6.8.c^{15}}$$

&, si nunc quoque pro $\frac{f^n e^n}{2^n}$ scribatur 1,

$$\beta = \frac{\pi}{2.c^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \frac{\pi}{2.c^3}$$

$$+\frac{1.3.5.}{1.2.3.}\,\frac{3.\pi}{2.4.c^7} \quad . \quad = \frac{15\,\pi}{2^4\,c^7}$$

$$+\frac{1.3.5.7.9.}{1.2.3.4.5.}\,\frac{3.5.\pi}{2.4.6.c^{11}} \quad . \quad = \frac{315\,\pi}{2^7\,c^{11}}$$

$$+\frac{1.3.5.7.9.11.13.}{1.2.3.4.5.6.7}\,\frac{3.5.7.\pi}{2.4.6.8\,c^{15}} = \frac{15015\,\pi}{2^{11}\,c^{15}}$$

&c.

COROLLARIUM III.

§. 76. Ad semidiametrum autem baseos guttae BC, est $v=0$, quod idem & apud punctum D locum habet. Hinc quia $v=\sqrt{(ee-zz)}$, est quoque haec $\sqrt{(ee-zz)}=0$, & $z=e$, unde series a ad semidiametrum istam baseos, atque abscissam AB, applicata, prorsus evanescit. Ad seriem autem b fit secans arcus $\pi=\frac{e}{e}=1$. Cum ergo secans radio aequalis sit, & cum arcus nullus est, & cum dimidium peripheriae complet; nullus autem sit arcus π apud punctum D, erit apud B aequalis dimidiae peripheriae. Id nisi sumatur, diameter baseos guttae nulla prodibit, cum aliquam esse necesse sit. Substitutis autem istis in serie b, eadem obtinetur β, quam modo habuimus; praeterquam quod jam π non quadrantem, sed dimidium peripheriae, denotet. Unde si π nunc quoque quadrantem notet, semidiameter baseos guttae BC duplo illius β aequalis erit. Repertisque α & β, erit $\alpha + \beta$ ſemidiametrorum ſectionum guttae horizontalium maxima FG, 2β ſemidiameter baſeos CB, & $\alpha - \beta$ harum ſemidiametrorum differentia.

PROBLEMA VI.

§. 77. *Data ſemidiametrorum guttae horizontalium maxima, invenire lineam* c.

Si ſemidiameter haec maxima dicatur y, erit $y = \alpha + \beta =$ $\frac{1}{c} + \frac{\pi}{2c^3} + \frac{1}{c^5} + \frac{15\pi}{16c^7} + \frac{7}{3c^9} + \frac{315\pi}{128c^{11}}$ & ita porro.
ſique $\frac{1}{c}$ ponatur $= Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + Ey^9 +$ &c, reperietur per methodos ſeries convertendi,

$A = 1,$

$B = -\frac{\pi}{2}$

$C = \left(\frac{3\pi^2}{4} - 1\right)$

$D = -\left(\frac{12\pi^3}{8} - \frac{49\pi}{16}\right)$

$E = \left(\frac{55\pi^4}{16} - \frac{145\pi^2}{16} + \frac{8}{3}\right).$

cumque ex poſitis ſequatur

$$c = \frac{1}{Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + Ey^9 \text{ \&c.}}$$

ſi unitas per ſeriem iſtam dividatur, reſtituanturque valores litterarum A, B, C, D, E, erit

$c = \frac{1}{y}$

$+ \frac{\pi y}{2}$

$$- \left(\frac{2\pi^2}{4} - 1\right) y^3$$
$$+ \left(\frac{7\pi^3}{8} - \frac{33\pi}{16}\right) y^5$$
$$- \left(\frac{30\pi^4}{16} - \frac{21\pi_2}{4} + \tfrac{5}{3}\right) y^7$$
$$+ \text{\&c.} \quad \text{Q. E. I.}$$

§. 78. Eſt pro omnibus his ſeriebus quadrans peripheriae circuli ad radium 1, quem diximus π, $= 1, 570796$, & $\frac{1}{2}\pi = 0, 785398$, quibus numeris legitime uſurpatis, fit

	In Serie α	In Serie β
Logmus termini I^i.	0, 0000000 — lc	—1, 8950896 — $3lc$
II^i.	0, 0000000 — $5lc$	0, 1680909 — $7lc$
III^i.	0, 3679767 — $9lc$	0, 5872201 — $11lc$
IIII^i.	0, 8195439 — $13lc$	1, 0613250 — $15lc$
V^i.	1, 3102380 — $17lc$	1, 5647653 — $19lc$
VI^i.	1, 8238054 — $21lc$	2, 0865569 — $23lc$
VII^i.	2, 3524165 — $25lc$	2, 6209154 — $27lc$
VIII^i.	2, 8916855 — $29lc$	3, 1644292 — $31lc$

ex quibus ipſi ſerierum termini, ad quamlibet c aſſumptam, expedite inveniuntur, maxime ſi c majuſcula ſit, quo caſu ſeries vehementer convergunt, atque pauci ejus termini ad exhibendum α vel β, quod quaeritur, ſufficiunt. Si enim c multo minor quam 2 ſumatur, ulterius etiam, quam hic factum eſt, ſeriem continuare neceſſe eſt. Debet autem c ſemper major ſumi quam $\sqrt{2}$ ſive 1, 4142136, quia, cum $cc = aa + 2$. ſi cc ſumatur $= 2$, fit $aa = 0$, & $a = q\sqrt{-1}$, ſi cc quantitate qq minor ſumatur quam 2; cum aliquam eſſe hujus lineae a magnitudinem omnino neceſſe ſit.

§. 79. Illa autem ſeries, qua ex data ſemidiametro tae horizontali omnium maxima y reperitur c, §. 77 ad numeros decimales reducta ita sese habet

$$c = \frac{1}{y} + 0,7854y - 0,2337y^3 + 0,1515y^5 - 0,1278y^7 \text{ \&c.}$$

Satis celeriter convergit, si y minor sit unitate, vel non multo major. Si autem unitatem vehementer excesserit, fere inutilis fit. Id enim habet incommodi, quod non, nisi magno labore, producatur. Quaerenda igitur & alia fuit series, ad magnas istas y atque a parvas, c vero radice quadratica numeri 2 non multo majores.

PROBLEMA VII.

§. 80. *Puncta curvae CDE per seriem infinitam a reperta diversam, ad ejus axem AB referre.*

Problemate IIII fuit $\frac{(2tt + aa - xx)\, dx}{\sqrt{(4t^4 - (2tt + aa - xx)^2)}} = dy$ unde si tt iterum dicatur 1, ponaturque $xx - aa = vv$, atque hinc $xdx = vdv$, atque $dx = \frac{v\,dv}{\sqrt{(aa + vv)}}$, fit $dy = \frac{(2 - vv)}{\sqrt{(4v^2 - v^4)}}$

$$\times \frac{v\,dv}{\sqrt{(aa + vv)}} = \frac{(2 - vv)\,dv}{\sqrt{(4 - vv)}\sqrt{(aa + vv)}}$$

Soluitur autem $\frac{1}{\sqrt{(4 - vv)}}$ in hanc seriem $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{v^4}{2^5}$ $+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{v^6}{2^7}$ + &c, qua per $2dv - v^2dv$ multiplicata, prodeunt duae series istae

$$dv + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2dv}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{v^4dv}{2^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{v^6dv}{2^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{v^8dv}{2^8} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{4}{2} \cdot \frac{v^2dv}{2^2} - \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 4} \cdot \frac{v^4dv}{2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 12}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{v^6dv}{2^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 16}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{v^8dv}{2^8} \text{ \&c.}$$

in quarum posteri supleti sunt factores, quibus denominato-

res

res terminorum ejus ſeriei reducuntur ad denominatores terminorum ſeriei prioris, illis homogeneos. Uniri ergo jam poſſunt homogenei iſti ſerierum termini; quo facto, atque tota ſerie per $\sqrt{(aa+vv)}$ diviſa, prodit

$$dy = \frac{dv}{\sqrt{(aa+vv)}} \times \left(1 - \frac{3.v^2 dv}{2.\ 2^2} - \frac{1.5.v^4}{2.4.2^4} - \frac{1.3.7.v^6}{2.4.6.2^6} - \frac{1.3.5.9.v^8}{2.4.6.8.2^8}\right. \text{ \&c.}$$

Hujus jam ſeriei fluens obtinebitur repertis fluentibus quantitatum $\frac{dv}{\sqrt{(aa+vv)}}$, $\frac{v^2 dv}{\sqrt{(aa+vv)}}$ & generatim $\frac{v^{2n} dv}{\sqrt{(aa+vv)}}$.

Eſt autem, ſi λ ſit logarithmus quantitatis $\frac{v + \sqrt{(aa+vv)}}{a}$, ad modulum ſive ſubtangentem 1,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(aa+vv)}} = \lambda$$

$$\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{(aa+vv)}} = \tfrac{1}{2}.\, v\sqrt{(aa+vv)} - \tfrac{1}{2}.\, aa\lambda$$

$$\int \frac{v^4 dv}{\sqrt{(aa+vv)}} = \left(\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{2}a^2 v\right)\sqrt{(aa+vv)} + \tfrac{3}{8}a^4\lambda,$$

& generatim $\int \frac{v^{2n} dv}{\sqrt{(aa+vv)}} = (\alpha v^{2n-1} + \beta v^{2n-3}$

$+\gamma v^{2n-5} + \ldots \mu v^3 + \nu v)\sqrt{(aa+vv)} + \kappa\lambda$

ſiquidem fiat $\alpha = \frac{1}{2n}$

$$\beta = -\alpha,\ \frac{2n-1}{2n-2}.\ a^2$$

$$\gamma = -\beta.\ \frac{2n-3}{2n-4}.\ a^2$$

$$\delta = -\gamma.\ \frac{2n-5}{2n-6}.\ a^2$$

$$\epsilon = -\delta.\ \frac{2n-7}{2n-8}.\ a^2$$

. . . .

. . . .

$$\nu = -\mu.\ \tfrac{3}{2}.\ a^2$$

$$\kappa = -\nu.\ 1.\ a^2.$$

 Flu-

Fluentibus ergo istis ordine in factores constantes serierum hactenus repertarum ultimae ductis, rescriptoque x pro $\sqrt{(aa+vv)}$, fit

$$y=\lambda$$

$$-\frac{3}{2.\,2^2}\left(\tfrac{1}{2}vx-\tfrac{1}{2}a^2\lambda\right)$$

$$-\frac{1.\,5}{2.\,4.\,2^4}\left(\tfrac{1}{4}v^3x-\frac{1.\,3}{4.\,2}a^2vx+\frac{1.\,3}{4.\,2}a^4\lambda\right)$$

$$-\frac{1.3.7}{2.4.6.2^6}\left(\tfrac{1}{6}v^5x-\frac{1.\,5}{6.\,4}a^2v^3x+\frac{1.\,5.\,3}{6.\,4.\,2}a^4vx-\frac{1.5.3}{6.\,4.\,2}a^6\lambda\right)$$

$$-\frac{1.\,3.\,5.\,9}{2.\,4.\,6.\,8.\,2^8}\left(\tfrac{1}{8}v^7x-\frac{1.\,7}{8.\,6}a^2v^5x+\frac{1.\,7.\,5}{8.\,6.\,4}a^4v^3x-\frac{1.\,7.\,5.\,3}{8.\,6.\,4.\,2}a^6vx+\frac{1.\,7.\,5.\,3}{8.\,6.\,4.\,2}a^8\lambda\right)$$

$$-\frac{1.\,3.\,5.\,7.\,11}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,2^{10}}\left(\tfrac{1}{10}v^9x-\frac{1.\,9}{10.\,8}a^2v^7x+\frac{1.\,9.\,7}{10.\,8.\,6}a^4v^5x-\frac{1.\,9.\,7.\,5}{10.\,8.\,6.\,4}a^6x^3x+\text{\&c}\right.$$

$$-\frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,13}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,2^{12}}\left(\tfrac{1}{12}v^{11}x-\frac{1.\,11}{12.\,10}a^2v^9x+\frac{1.\,11.\,9}{12.\,10.\,8}a^4v^7x-\frac{1.\,11.\,9.\,7}{12.\,10.\,8.\,6}a^6v^5x+\text{\&c.}\right.$$

$$-\text{\&c}$$

vel coefficientibus numericis in numeros decimales conversis

$$y=\lambda+0{,}187500.\,a^2\lambda-0{,}014649.\,a^4\lambda+0{,}002136.\,a^6\lambda-0{,}000372.\,a^8\lambda\,\text{\&c}$$
$$-0{,}187500.\,vx.$$
$$-0{,}009766.\,v^3x+0{,}014649.\,a^2vx$$
$$-0{,}001139.\,v^5x+0{,}001424.\,a^2v^3x-0{,}002136.\,a^4vx$$
$$-0{,}000171.\,v^7x+0{,}000199.\,a^2v^5x-0{,}000248.\,a^4v^3x+0{,}000372.\,a^6vx$$
$$-0{,}000029.\,v^9x+0{,}000033.\,a^2v^7x-0{,}000039.\,a^4v^5x+0{,}000048.\,a^6v^3x$$
$$-0{,}000005.\,v^{11}x+0{,}000005.\,a^2v^9x-0{,}000006.\,a^4v^7x+0{,}000007.\,a^6v^5x$$
$$\text{\&c}$$

Per

Per hanc ergo seriem y reperietur ad quamlibet x assumptam tanto expeditius, quo minor fuerit a. Sed cum logarithmi λ naturales sint, quippe quorum modulus est 1, reducendi erunt logarithmi tabulares in hoc systema: sumpto l, logarithmo tabulari numeri, cujus logarithmus naturalis quaeritur, faciendo $\lambda = 2,\ 302585 l$.

COROLLARIUM I.

§. 81. Ad diametrum guttae horizontalium maximam est $x = c = \sqrt{(aa + 2)}$, atque hinc $vv = xx - aa = 2$. Fit ergo numerus, cujus logarithmus est λ, qui generatim fuit $\frac{v + \sqrt{(aa + vv)}}{a}$, sive $\frac{v + x}{a}$, hoc loco, $\frac{c + \sqrt{2}}{a}$ & hinc $\lambda = 2,\ 302585 \cdot l \frac{c + \sqrt{2}}{a}$ In reliquos autem seríerum terminos, si iidem valores inferantur, prior quidem, quae habet λ, praeterea non mutatur, altera autem, ad maximam hanc y fit

$-0,187500.\sqrt{2cc}$
$-0,019532.\sqrt{2cc} + 0,014649.a^2\sqrt{2cc}$
$-0,004556.\sqrt{2cc} + 0,002848.a^2\sqrt{2cc} - 0,002136.a^4\sqrt{2cc}$
$-0,001368.\sqrt{2cc} + 0,000796.a^2\sqrt{2cc} - 0,000496.a^4\sqrt{2cc} + 0,000372.a^6\sqrt{2cc}$
$-0,000464.\sqrt{2cc} + 0,000264.a^2\sqrt{2cc} - 0,000156.a^4\sqrt{2cc} + 0,000096.a^6\sqrt{2cc}$
$-0,000160.\sqrt{2cc} + 0,000080.a^2\sqrt{2cc} - 0,000048.a^4\sqrt{2cc} + 0,000028.a^6\sqrt{2cc}$.
&c

Numeris ergo istis in summam collectis, fit maxima $y =$
$\lambda(1 + 0,187500.a^2 - 0,014649.a^4 + 0,002136.a^6 - 0,000372.a^8 \&c)$
$- c\sqrt{2}(0,213634 - 0,018680.a^2 + 0,002852.a^4 - 0,000503.a^6 \&c)$
Vel, si loco λ scribatur $2,302585 \times l.\frac{c + \sqrt{2}}{a}$, notante nunc quoque l logarithmum tabularem, multiplicator autem ejus 2, 302585, quo in systema logarithmorum naturalium transfertur, ducatur in ipsos seriei prioris terminos; posterioris autem

autem seriei termini multiplicentur per $\sqrt{2} = 1, 414213$, fit y maxima

$$= l. \frac{c+\sqrt{2}}{a}(2,302585 + 0,431730.aa - 0,033731.a^4 + 0,004918.a^6 - 0,000626.a^8 + \&c)$$
$$- c(0,302155 - 0,026417.a^2 + 0,004033.a^4 - 0,000711.a^6 + \&c)$$

Series autem istae satis celeriter convergunt, tantoque celerius, quo minor est a; quae quidem unitatem nunquam excedere ponitur, quia ii casus, quibus a guttae modulo major est, per praecedentes series commode expediuntur.

COROLLARIUM II.

§. 82. Ad diametrum autem baseos guttae est $x = b = \sqrt{(aa+4)}$; atque hinc $v = 2$, quibus in series universales illatis, λ pro hac y fit logarithmus naturalis numeri, $\frac{b+2}{a}$, ipsaeque series, lentius jam convergentes, degenerant in istas

$$y = \lambda(1 + 0,187500.aa - 0,014649.a^4 + 0,002136.a^6 - 0,000372.a^8 + \&c)$$
$$- b(0,59942 - 0,06702.aa + 0,01000.a^4 - 0,00131.a^6 + \&c)$$

Vel si hic pro λ scribatur $2,302585 \times l.\frac{b+2}{a}$, multiplicatis per logarithmi hujus multiplicatorum nunc quoque ipsis seriei terminis, fit

$$y = l.\frac{b+2}{a}(2,302585 + 0,431730.aa - 0,033731.a^4 + 0,004918.a^6 - 0,000626.a^8 + \&c)$$
$$- b(0,59942 - 0,06702.aa + 0,01000.a^4 - 0,00131.a^6 + \&c)$$

COROL-

COROLLARIUM III.

§. 83. Si a admodum parva fiat, 0, 001 puta, vel minor, dignitates ejus aa, a^4 cet. tanto minores fiunt, evanescuntque prae parvitate omnes serierum termini, praeter primos, nisi ingentibus numeris uti velis; c autem $= \surd (aa+2)$ jam non differt notabiliter ab $\surd 2$, & $b = \surd(aa+4)$ ab ipso 2. Unde $c + \surd 2$ fit $2\surd 2$ & $b+2=4$. Semidiametrorum ergo guttae horizontalium maxima ad hos casus fit . . . $2,302585 \cdot l. \frac{2\surd 2}{a} - 0,302155 \cdot \surd 2$; & semidiameter baseos $2,302585 \cdot l. \frac{4}{a} - 1,19884$. Propter parvas autem a, rationes $2\surd 2 : a$ & $4 : a$ magnae sunt, & earum logarithmi magni. Crescunt ergo tandem y istae in ingentem magnitudinem, altitudinibus guttarum ita crescentibus, ut, quantum auctae sint, percipi prorsus nequeat. Est enim altitudo, quae generatim fuit $b-a$, omnibus his casibus ad sensum $= b = 2$.

§. 84. Si a penitus evanescat, fiatque $= 0$, rationes $2\surd 2 : a$ & $4 : a$ infinitae fiunt, & earum logarithmi infiniti. Verum de hoc casu, qui sessilibus guttis cum pendulis quadam ratione communis est, distinctius agere praestat.

PROBLEMA VIII.

§. 85. *Posita in gutta sessili recta a nulla, invenire quamvis y.*

Aequatio ad guttas has, generalis $\frac{(2+aa-xx)dx}{\surd(4-(2+aa-xx)^2)} = dy$, posita $a=0$, mutatur in $\frac{(2-xx)dx}{\surd(4xx-x^4)} = dy$ sive

2 —

$\frac{(2-xx)\,dx}{x\sqrt{(4-xx)}} = dy$, vel $\frac{2dx}{x\sqrt{(4-xx)}} - \frac{xdx}{\sqrt{(4-xx)}} = dy$. Fluens autem primi termini hujus aequationis cum sit logarithmus naturalis numeri $\frac{2+\sqrt{(4-xx)}}{x}$, negative sumptus, & fluens secundi, $\sqrt{(4-xx)}$, erit aequatio fluens ista: $\sqrt{(4-xx)} - 2 - l.\frac{2+\sqrt{(4-xx)}}{x} + l\,\frac{4}{0} = y$, sive $\sqrt{(4-xx)} - 2 + l.\,\frac{4x}{0(\sqrt{2}+\sqrt{(4-xx)})} = y$. Hujus autem aequationis membrum antecedens cum infinitum fiat, quaecunque sumatur x, erit & quaelibet y ad hunc casum infinita, quod indicio est curvam CDE, *cde* degenerasse in rectam horizontali RS parallelam.

F. XIV.

COROLLARIUM.

§. 86. Superficies ergo guttae sessilis plana non fit, nisi linea a penitus evanescat, quod fieri non posse, cum facile perspiciatur, superficies haec semper curva erit, & tota, & quaelibet ejus pars, quamvis circa axem curvedo ista possit esse prorsus insensibilis. Talis autem utique fit, si admodum parva fiat a, & gutta insigniter lata. Eadem & de superficiebus cavis tenenda sunt, qualis est aquae in vase vitreo stagnantis, infra supremum hujus marginem, & quae his similes sunt.

§. 87. Hae ergo sunt guttarum sessilium, & superficierum cavarum illis geminarum, dimensiones, quas, quo absque labore perspicerentur, in tabulam redegit filius meus adolescens, quam adjunxi. Ejus tabulae tituli ad figuram XVI referendi sunt: quo facto reliqua adeo clara fiunt, ut explicatione non egeant.

TA-

TABULA

praecipuas Guttarum sessilium Dimensiones exhibens. *Fig.* 16.

c = AG	a = AD	b = AB	DB	GH	BE
100	99, 99	100, 01	0, 02	0, 01	0, 000001
90	89, 99	90, 01	0, 02	0, 01	0, 000002
80	79, 99	80, 01	0, 02	0. 01	0, 000003
70	69, 99	70, 01	0, 03	0, 01	0, 000004
60	59, 99	60, 02	0, 03	0, 02	0, 000007
50	49. 98	50, 02	0, 04	0, 02	0, 00001
45	44, 98	45, 02	0, 04	0, 02	0, 00002
40	39, 97	40, 02	0, 05	0, 02	0, 00003
35	34, 97	35, 03	0, 06	0, 03	0, 00004
30	29, 96	30, 03	0, 07	0, 03	0, 00006
25	24, 96	25, 04	0, 08	0, 04	0, 0001
20	19, 95	20. 05	0, 10	0, 05	0, 0002
15	14, 93	15, 07	0, 13	0, 07	0, 0004
10	9, 90	10, 10	0, 20	0, 10	0, 001
9	8, 89	9, 11	0, 22	0, 11	0, 002
8	7, 87	8, 12	0, 25	0, 13	0, 003
7	6, 85	7, 14	0. 28	0, 14	0, 004
6	5, 83	6, 16	0, 33	0, 17	0, 007
5	4, 79	5, 19	0, 40	0, 21	0, 01
4	3, 74	4, 24	0, 50	0, 26	0, 02
3	2, 64	3, 32	0, 67	0, 37	0. 06
2	1, 41	2, 45	1, 03	0, 65	0, 22
1, 9	1, 27	2, 37	1, 10	0, 71	0, 27
1, 8	1, 11	2, 29	1, 17	0, 79	0, 33
1, 7	0, 94	2, 21	1, 27	0, 91	0, 47
1, 6	0. 75	2, 13	1, 39	1, 10	0, 65
1, 5	0, 50	2, 06	1, 56	1, 40	0, 96
1, 47	0, 40	2, 04	1, 64	1, 64	1, 18
1, 445	0, 30	2, 02	1, 72	1, 86	1, 44
1, 428	0, 20	2, 01	1, 81	2, 24	1, 82
1, 418	0, 10	2, 003	1, 90	2, 92	2, 49
1, 4142	0, 01	2, 000	1, 99	5, 22	4, 80
1, 4142	0, 001	2, 0000	2, 00	7, 52	7, 09
1, 4142	0, 0001	2, 0000	2, 00	9, 82	9, 39
1, 4142	0, 00001	2, 0000	2, 00	12, 12	11, 70
1, 4142	0, 000001	2, 0000	2, 00	14, 43	14, 00

§. 88. Dantur per eam tabulam praecipuae guttae dimensiones, ex guttae vel superficiei concavae modulo. Ejus ergo moduli magnitudine cognita, & dimensiones istae per mensuras notas dantur, ignorata, sola perspicitur dimensionum ad se invicem relatio. Modulum autem ad omnes ejusdem fluidi guttas eundem esse, sumsi quidem ut non improbabile §. 65: sed nondum evici. Quae deinde ostensa sunt, duplicem rei penitus conficiendae viam apperiunt.

§. 89. Prima est dimensio guttarum sessilium. Eam instituere ut ea accuratione possem, quae requiritur, instrumentum confectum est, quod magnitudines quantumvis parvarum linearum exhibet per revolutiones cochleae, atque ad eum potissimum laborem, quem prae manibus habebam, aptatum. Cochleae revolutiones 70 dant pollicis londinensis $\frac{23}{12}$, unde sequitur unam revolutionem partibus 0, 027380 ejus pollicis aequalem esse. Potest autem revolutio facile in 10 partes subdividi, &, si curam adferre quis velit, harum quaelibet in decem alias, sed istud non plena fide.

§. 90. Hoc instrumento instructus, ante omnia altitudines guttarum mercurialium vitro plano laevigato insidentium, vel chartae vitro huic adglutinatae, mensus sum, adeo latarum, ut diametrorum horizontalium maxima sextuplum altitudinis excederet. Cum enim ex dictis §. 83, atque ex tabula appareat, evanescente fere ad guttas istas *a*, modulum dimidio altitudinis aequalem esse, hac inprimis ratione modulus, si constans esset, & expedite, & accurate obtineri posse visus est. Deprehendi autem altitudinem omnium ex hoc genere guttarum, quantumvis diversarum basium, &, sive vitro insiderent, sive chartae, revolutionum 4, 90, vix ulla inter diversas observationes differentia. Modulus ergo ex his guttis collectus, est 2, 45 revolutionum cochleae, sive partium pol-

licis

licis londinensis 0, 0678924: sequiturque ex observatis, latarum ejusmodi guttarum omnium eundem esse modulum; quod nisi foret, altitudo quoque illarum ex hac classe, quae reliquis magis vel minus latae sunt, harum altitudine major vel minor esset, pro majori vel minori, ad quem earum dimensiones exigendae sunt, modulo.

§. 91. Quod ad minores mercurii guttas attinet; earum modulos difficiliori paullo modo assecutus sum, atque exemplo optime declarando. Aliqua hujus generis guttarum, quas mensus sum, altitudinem habuit 4,40, & diametrum horizontalem maximam 11,12 revolutionibus cochleae aequalem. Ratio ergo altitudinis ad semidiametrorum guttae horizontalium maximam fuit ut 1 ad 1, 26. Quae cum guttis tabulae comparata, illi guttae convenire deprehensa est, cujus altitudo est paullo major, quam 1,81 moduli; quia hujus guttae altitudo, ad semidiametrum suam horizontalem maximam, est ut 1 ad 1, 23. Interpolata ergo tabula, altitudo guttae mensae assumpta est modulorum 1, 82. Erat autem 4,40 revolutionum. Applicato ergo numero 1, 82 ad numerum 4, 40 modulus guttae prodit 2, 41 cochleae revolutionum, cujus ab eo, quem guttae latissimae dederunt, 2, 45 differentia in censum venire non potest. Eodem modo sex vel septem aliis guttis tractatis, quarum minima alta fuit revolutiones 2, 29, modulus plerumque deprehensus est inter 2, 40 & 2, 48, cum ad minimam hanc guttarum mensarum esset 2, 41: nam duae tantum ex omni numero ad 2, 30 vel 2, 31 eum deprimunt.

§. 92. Non poterant diametri horizontales guttarum exactissime capi, guttis vel cedentibus, vel ab instrumento ferreo, quo mensurabantur, attractis. Satis ergo inter se conveniunt moduli, ex erroneis aliquantulum mensuris eliciti,

citi, ut ſtatui poſſit, minorum guttarum modulos, a modulis majorum ejusdem fluidi guttarum, diverſos non eſſe. Facile enim, ut ſpero, concedetur, quae de argento vivo oſtenſa ſunt, de omnibus omnium fluidorum guttis vera eſſe, quae planis inſident, a quibus non trahuntur, vel adeo leviter, ut ejus attractionis effectus ſenſu percipi non poſſit; atque de ſuperficiebus concavis atque convexis reliquis, nulla actione illi contraria, a qua praecipue pendent, turbatis.

§. 93. Altera modulos hos inveniendi ratio nititur dimenſione ſpatii plani ADIK, *Adik* inter horizontalem RS, axem B*b* eique parallelam tangentem KI, *ki*, atque ipſam ſectionem DI, *di* intercepti, quod ſpatium quadrato moduli aequale eſſe, oſtenſum eſt, atque, ſi LI *li* admodum parva ſit, a rectangulo ALIK A*lik* vix differt. Immerſo autem tubo vitreo cylindrico in argentum vivum, vaſe ſat amplo exceptum, ſectio per axem ſpatii hujus tubi, quod a mercurio vacuum manſit, cum repleri debuiſſet per leges hydroſtaticas, ſi nulla foret apud fluida attractio, duplum eſt ſpatii ADIK, ſi quidem IL ſit ſemidiameter ejus tubi. Hinc modulus a media proportionali inter ſemidiametrum hanc baſeos tubi, atque rectam quae metitur depreſſionem argenti vivi in tubo infra ſuperficiem ejus, quod ſtagnat in vaſe, admodum parum differet.

§. 94. Cum ergo ex menſuris Muſſchenbroeckianis ſpatium ALIK in tubis, quorum amplitudo eſt 0, 05, & 0, 007 partium digiti rhenani, ſit 0, 0098 partium quadrati ejusdem digiti, cujus numeri dimidius eſt 0, 0049; erit modulus pro ſuperficiebus mercurii radici quadraticae hujus dimidii, 0, 07 aequalis, qui ab eo, quem ſupra elicuimus 0, 06 789 adeo parum differt, ut cum hic error, tum alter ille, quem committo, dum reductionem pollicis rhenani ad londinennensem negligo, tanquam minutiae vix perceptibiles, contemnendi videantur.

§. 95. Eadem modulum investigandi ratio si ad aquam transferatur, est *Al* ejus altitudo in tubo vitreo angusto, supra superficiem ejus, quae in vase stagnat, cui tubi extremum immersum est, reliquis omnibus manentibus. Cum ergo hic, ex celeberrimi MUSSCHENBROEKII mensuris, sit $Alik = 0, 0185$ partibus quadrati pollicis rhenani, erit modulus non minor partibus 0, 136 ejus pollicis quae conficiunt pollicis londinensis partes 0, 140.

§. 96. Verum eundem modulum cum quaererem ex dimensionibus guttarum, quae plano vitreo insidebant, cui ceratum induxeram, conspersum pulvere lycopodii; multo eum minorem deprehendi. Namque latiores guttae non majorem eum 3, 25 cochleae revolutionibus prodiderunt, quae partes pedis londinensis 0, 09 nondum conficiunt. Minus latarum aliquae modulum paullo majorem fecerunt, aliae minorem; duae omnino ad 0, 11 vel 0, 12 partes pollicis londinensis eum evehere visae sunt. Verum adeo parum inter se convenerunt harum guttarum mensurae, ut ratio altitudinis ad semidiametrum horizontalem maximam, quae semper decrescere debebat, crescente guttae altitudine, hic aliquando creverit, saepe multo minus decreverit, quam altitudinis incrementum exigebat. Quod mihi tandem persuasit, attractionem superficiei, cui guttae meae insidebant, non omnino nullam esse, eaque re altitudinem earum esse imminutam. Et curiosius inspicienti, plerumque pulvis ea parte vuidus apparuit, qua gutta sederat, quod manifesto indicio est pulverem illum aquam trahere, etiamsi non tam vehementer trahat, ut ea vis cohaesionem inter ipsius aquae, guttam formantis, particulas possit superare. Relictis ergo aquae gut-

guttis, iis certe quae cerato lycopodii pulvere conſperſo inſident, in eo modulo, quem tubi capillares ſuppeditarunt, acquieſcendum fuit. Circa reliquorum autem fluidorum vel ſemifluidorum corporum modulos, ſi quid memoratu dignum forte impoſterum obſervavero, id deinde dabo.

§. 97. Diverſorum fluidorum guttae, quarum altitudines, vel diametri horizontales maximae, vel latera, quae dicta fuere *a*, *b*, *c*, vel quae ex his addendo aut ſubtrahendo prodierant rectae, per eosdem numeros exprimuntur ex eorum fluidorum modulis; id eſt, apud quas linearum illarum eadem eſt ratio ad fluidorum modulos, inter ſe ſimiles ſunt, atque reliquas etiam dimenſiones ſuas, ſimiliter ſumptas, modulis illis proportionales habent. Sic ſi fuerit gutta aquae, plano eam prorſus non trahenti inſidens, & gutta hydrargyri, vitro inſidens vel chartae, fueritque utriusque guttae altitudo ad modulum fluidi, ex quo componitur, in ratione ſesqui altera: altitudo quidem guttae aquae altitudinis guttae hydrargyri, atque illius diameter horizontalis maxima, diametri horizontalis maximae iſtius, dupla erit, quia modulus aquae moduli hydragyri duplus eſt; ipſa autem gutta aquae guttae hydrargyri plane ſimilis.

§. 98. Tenſiones autem filamentorum, quae in guttis concepi, verticalium, cum ſint aequales ponderibus quadratorum *tt*, iis fluidis plenorum, e quibus guttae conſtant: erunt tenſiones illae apud duas quasvis diverſorum fluidorum guttas, ut quadrata iſta *tt*, quae ſunt quadrata modulorum, & ut fluidorum pondera ſpecifica, conjunctim. Sic, modulus aquae ad modulum argenti vivi ſi nunc quoque ſumatur $= 2 : 1$, quia pondus ſpecificum aquae eſt ad pondus ſpecificum argenti vivi fere ut 1 ad 14, erit tenſio illa apud guttam aquae, ad tenſionem ſimilem apud guttam mercurii ut eſt $4 : 1$ & ut $1 : 14$, id eſt ut $4 : 14$, vel ut 1 ad 3, 5.

§. 99. Sed & aliae quaestiones complures expediuntur, cognitis fluidorum modulis, & facillime per tabulam traditam. Sic si sipho fuerit AB, ex cruribus cylindricis diversarum amplitudinum compositis, quarum utraque datur, in eoque stagnaverit aqua, sub superficiebus cavis A, B, quarum inferior B fortius premitur ab aere, quam superior A; quaeraturque pressionum illarum differentia, sive altitudo pressionis aquae, excessui pressionis aeris in B supra ejus pressionem in A, aequalis: ducta per A horizontali AC, ab hac in B demissa verticalis BC datur per observationem. Amplitudo autem tubi A data si exprimatur per datum fluidi modulum, dimidium ejus numeri exponit GH tabulae, eique respondens *a* tabulae in promptu est. Sit AD aequalis huic *a*: similemque in modum investigata *a* ad tubum B sit BF. Quia ergo altitudo fluidi AD sustinetur a superficie concava A, & BF, a superficie B; ducta per D horizontali, ab hac demissa verticalis ED, altitudini pressionis quaesitae aequalis erit. Est autem ista EF = CB + BF — AD. Datur ergo, tantoque magis differt ab observata CB, quo magis AD, BF differunt; id est, quo magis differunt amplitudines crurum A, B. Contra cruribus istis ad aequalitatem accedentibus, imminuta continuo differentia BF—AD differentia quoque altitudinum CB, EF continuo imminuitur, atque ad aequalia crura prorsus evanescit. Fig. XVII.

§. 100. Similem in modum ratiocinandum erit, si argentum vivum siphone contineatur, ab aere inaequaliter pressum. Nam & hic differentia altitudinis pressionis ab elevatione superficiei mercurii superioris supra inferiorem, non ab unius tantum cruris amplitudine pendet, verum ab amplitudine utriusque.

PROBLEMA VIII.

§. 101. *Si RS nunc quoque horizonti parallela sit, eique perpendicularis Bb axis sectionum guttarum CDE, cde conju-* F. XVIII.

ga-

gatarum, sintque per aliquod punctum, F, f *curvae CDE,* cde *ductae FG,* fg *verticali* Bb; *& FH,* fh *horizontali RS, parallelae; invenire magnitudinem spatii, revolutione curvilinei ADFG, Adfg, circa axem* Bb, *generati.*

Litteris reliquis eadem, quae adhuc semper, notantibus, y autem nunc iterum quamlibet FH, fh significante, intelligatur FG, fg rectangulum esse, latitudinis infinite parvae dy, exponique adeo per xdy. Revoluto ergo rectangulo isto FG, fg circa Bb, cylindrus describetur rectus, cavus, solidum autem revolutione figurae ADFG, Adfg circa axem Bb generatum, ex cavis ejusmodi cylindris totum componetur. Unde cavi hi cylindri fluxiones erunt solidi. Dicatur ipsum solidum q, & ista ejus fluxio dq; π autem jam peripheria sit, ad radium ϱ: erit peripheria ad radium HF, $hf = \frac{\pi}{\varrho}.y$. Cavus autem cylindrus revolutione rectanguli FG generatus, erit $\frac{\pi y}{\varrho} \times xdy$, ergo $dq = \frac{\pi}{\varrho}.yxdy$.

Fuit autem §. 66.

$xdy = \frac{1}{2}fdv$, atque $fvdy = (2tt + aa - xx)\,dx$, hinc $fvdy - (2tt + aa - xx)\,dx = 0$, ergo & $\frac{\pi fvdy}{2\varrho} - \frac{\pi}{2\varrho}(2tt + aa - xx)\,dx = 0$. Priori in $dq = \frac{\pi}{\varrho}.yxdy$ substituto, eique nihilo hoc addito, fit $dq = \frac{\pi}{2\varrho}.(fydv + fvdy - 2ttdx - aa\,dx + xxdx)$ cujus aequationis fluens est $q = \frac{\pi}{2\varrho}(fyv - 2ttx - aax + \frac{x^3}{3}) + e$, quae ergo magnitudinem solidi quaesiti generatim exhibet. Reperitur autem e ponendo $x = a$, quod contingit apud puncta D, d ubi & y & q evanuere, quibus in aequationem introductis fit $0 = \frac{\pi}{2\varrho}(-2tta - a^3 + \frac{a^3}{3}) + e$ & hinc

$e =$

$e = \frac{\pi}{2\varrho}(2tta + \frac{2}{3}a^3)$; atque hoc in illius locum suffecto, $q = \frac{\pi}{2\varrho}$ $(fvy - 2ttx - aax + \frac{x^3}{3} + 2tta + \frac{2}{3}a^3)$. Q. E. I.

COROLLARIUM I.

§. 102. Si x sit AK $= c$, cui respondet semiordinatarum maxima KL, est $fv = 2tt$. Sique jam KD dicatur b, unde fit $a = c - b$, substituanturque novae hae denominationes in aequatione hoc modo soluta: $q = \frac{\pi}{2\varrho}(fvy - (2tt + aa)x + \frac{x^3}{3}$ $+ (2tt + aa)\,a - \frac{a^3}{3})$ fit $q = \frac{\pi}{2\varrho}(2tty - c^3 + \frac{c^3}{3} + c^2\,(c - b)$ $- \frac{1}{3}(c - b)^3)$, sive $q = \frac{\pi}{2\varrho}(2tty - c^3 + \frac{c^3}{3} + c^3 - c^2b - \frac{c^3}{3}$ $+ c^2b - cb^2 + \frac{b^3}{3})$, &, sublatis quae sese destruunt: $q =$ $\frac{\pi}{2\varrho}(2tty - cb^2 + \frac{b^3}{3})$ vel $q = \frac{\pi tty}{\varrho} - \frac{\pi}{\varrho}(\frac{cb^2}{2} - \frac{b^3}{6})$. Est autem $\frac{cb^2}{2} - \frac{b^3}{6}$ segmentum sphaerae radio c descriptae, cujus altitudo sive sinus versus est b, & $\frac{\pi tty}{\varrho}$ cylindrus, cujus baseos diameter est $2t$, altitudo $2y$.

COROLLARIUM II.

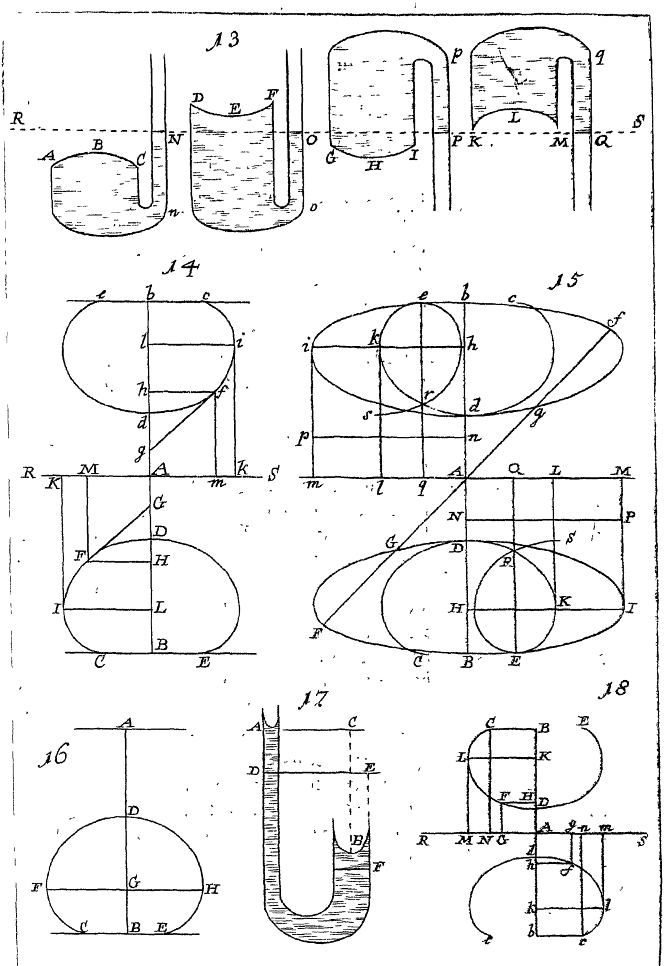
§. 103. Solidum revolutione figurae FHD fhd circa eundem axem Bb genitum, cum reliquantur, eo quod adhuc consideravimus, a cylindro subtracto, quem rectangulum FHAG, fhAg revolutum generavit; sit autem cylindrus iste $\frac{\pi vvx}{2\varrho}$, erit solidum ex FHD, fhd generatim $= \frac{\pi}{2\varrho}(yyx - fvy$ $+ (2tt + aa)x - \frac{x^3}{3} - (2tt + aa)\,a + \frac{a^3}{3}$. Unde magnitudo integri solidi deducitur, revolutione dimidiae sectionis CLFDB, $clfdb$ generati, si ponatur x quidem $= b$, y autem semidiametrum baseos guttae CB, cb notare intelligatur, & v, quod hic evanuit, quaeque ex eo facta sunt, tol-

tollantur. Fit autem his omnibus observatis, quod quaeritur $q = \frac{\pi}{2\varrho}\left(byy + \frac{(bb+aa)}{2}b - \frac{b^3}{3} - \frac{(bb+aa)}{2}a + \frac{a^3}{3}\right)$, quia $2tt = \frac{bb-aa}{2}$; id est, fit $q = \frac{\pi}{2\varrho}\left(byy + \frac{b^3}{2} + \frac{a^2b}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{abb}{2} - \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3}\right.$ sive $q = \frac{\pi}{2\varrho}\left(byy + \frac{b^3}{6} - \frac{bba}{2} + \frac{baa}{2} - \frac{a^3}{6}\right)$, vel brevius $q = \frac{\pi}{2\varrho}\left(byy + \frac{1}{6}(b-a)^3\right)$. Cum ergo $\frac{\pi}{2\varrho}.\,byy$ sit cylindrus revolutione rectanguli ABCN, Abcn circa latus AB, Ab genitus, & $\frac{\pi}{2\varrho}.\,\frac{1}{6}(b-a)^3$ sphaera, cujus diameter est $b-a$ = BD: gutta quaelibet sessilis summae cylindri, cujus basis eadem est cum basi guttae, altitudo vero b, & sphaerae, cujus diameter est altitudo guttae, aequalis erit.

§. 104. Per haec ergo cum quantitas fluidi determinatur, dati moduli, quae in tubo id fluidum trahente suspensa tenetur, cujus amplitudo itidem cognita est; tum magnitudo guttae ejusdem fluidi plano horizonti parallelo insidentis, a quo non trahitur, si hujus diameter detur, horizonti parallalela, maxima. Possunt enim, & expeditissime per tabulam traditam, ex his datis reliqua reperiri, quibus calculus niti debet. Eidem tabulae, si columna adjiceretur, quae magnitudinem cujuslibet guttae, quas complectitur, exhiberet per cubos moduli; a data magnitudine guttae ad ejus dimensiones reliquas regressus facilis foret. Etsi enim, aequatione hujus Problematis superioribus addita, utique ab data q, ad quamlibet rectarum, quas notant a, b, c, y, regressus detur; difficiliorem tamen calculum metuo, & series nimium complicatus.

§. 105. Mea certe sitis, qua guttas has appetebam, per ea, quorum maximam partem exposui, tantisper sedata est. Nam & pensiles guttas, & superficies fluidorum apud axem suam erga basin horizonti parallelam concavas, eadem fere ratione tractavi. Iis autem in ordinem redigendis atque illustrandis, quod tempus jam non sufficiat, caussa sunt inopportuni quidam scrupuli, qui sese mihi haec retractandi objecerunt, in dubitationem inducentes, quae certissima fuerant visa. Addam tamen, quae restant, tomo actorum proximo.

LA-


13
14
15
16
17
18