Werk

Titel: Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gotti

Verlag: Dieterich

Jahr: 1823

Kollektion: Wissenschaftsgeschichte

Werk Id: PPN35283028X_0005_2NS

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN35283028X_0005_2NS|LOG_0020

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

PARS PRIOR.

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA FEBR. 15, 1821.

1.

Quantacunque cura instituantur obseruationes, rerum naturalium magnitudinem spectantes, semper tamen erroribus maioribus minoribusue obnoxiae manent. Errores obseruationum plerumque non sunt simplices, sed e pluribus fontibus simul originem trahunt: horum fontium duas species probe distinguere oportet. Quaedam errorum caussae ita sunt comparatae, vt ipsarum effectus in qualibet obseruatione a circumstantiis variabilibus pendeat, inter quas et ipsam obseruationem nullus nexus essentialis concipitur: errores hinc oriundi irregulares seu fortuiti vocantur, quatenusque illae circumstantiae calculo subiici nequeunt, idem etiam de erroribus ipsis valet. Tales sunt errores ab imperfectione sensuum prouenientes, nec non a caussis extraneis irregularibus, e. g. a motu tremulo aeris visum tantillum turbante; plura quoque vitia instrumentorum vel optimorum huc trahenda sunt, e. g. asperitas partis interioris libellularum, defectus firmitatis abſolutae etc. Contra aliae errorum cauſſae in omnibus obſeruationibus ad idem genus relatis natura ſua effectum vel abſolute conſtantem exſerunt, vel ſaltem talem, cuius magnitudo ſecundum legem determinatam vnice a circumſtantiis, quae tamquam eſſentialiter cum obſeruatione nexae ſpectantur, pendet. Huiusmodi errores conſtantes ſeu regulares appellantur.

Ceterum perſpicuum eſt, hanc diſtinctionem quodammodo relatiuam eſſe, et a ſenſu latiori vel arctiori, quo notio obſervationum ad idem genus pertinentium accipitur, pendere. E. g. vitia irregularia in diuiſione inſtrumentorum ad angulos menſurandos errorem conſtantem producunt, quoties tantummodo de obſeruatione anguli determinati indefinite repetenda ſermo eſt, ſiquidem hic ſemper eaedem diuiſiones vitioſae adhibentur: contra error ex illo fonte oriundus tamquam fortuitus ſpectari poteſt, quoties indefinite de angulis cuiusuis magnitudinis menſurandis agitur, ſiquidem tabula quantitatem erroris in ſingulis diuiſionibus exhibens non adeſt.

2.

Errorum regularium conſideratio proprie ab inſtituto noſtro excluditur. Scilicet obſeruatoris eſt, omnes cauſſas, quae errores conſtantes producere valent, ſedulo inueſtigare, et vel amovere, vel ſaltem earum rationem et magnitudinem ſummo ſtudio perſcrutari, vt effectus in quauis obſeruatione determinata asſignari, adeoque haec ab illo liberari poſſit, quo pacto res eodem redit, ac ſi error omnino non affuiſſet. Longe vero diuerſa eſt ratio errorum irregularium, qui natura ſua calculo ſubiici nequeunt. Hos itaque in obſeruationibus quidem tolerare, ſed eorum effectum in quantitates ex obſeruationibus deriuandas per ſcitam harum combinationem quantum fieri poteſt extenuare oportet. Cui argumento grauiſſimo ſequentes disquiſitiones dicatae ſunt.

3.

Errores obseruationum ad idem genus pertinentium, qui a caussa simplici determinata oriuntur, per rei naturam certis *limitibus* sunt circumscripti, quos sine dubio exacte assignare liceret, si indoles ipsius caussae *penitus* esset perspecta. Pleraeque errorum fortuitorum caussae ita sunt comparatae, vt secundum legem continuitatis omnes errores intra istos limites comprehensi pro possibilibus haberi debeant, perfectaque caussae cognitio etiam doceret, vtrum omnes hi errores aequali facilitate gaudeant an inaequali, et quanta probabilitas relatiua, in casu posteriori, cuiuis errori tribuenda sit. Eadem etiam respectu erroris totalis, e pluribus erroribus simplicibus conflati, valebunt, puta inclusus erit certis limitibus, (quorum alter aequalis erit aggregato omnium limitum superiorum partialium, alter aggregato omnium limitum inferiorum); omnes errores intra hos limites possibiles quidem erunt, sed prout quisque infinitis modis diuersis ex erroribus partialibus componi potest, qui ipsi magis minusue probabiles sunt, alii maiorem, alii minorem facilitatem tribuere debebimus, eruique poterit lex probabilitatis relatiuae, si leges errorum simplicium cognitae supponuntur, saluis difficultatibus analyticis in colligendis omnibus combinationibus.

Exstant vtique quaedam errorum caussae, quae errores non secundum legem continuitatis progredientes, sed discretos tantum, producere possunt, quales sunt errores diuisionis instrumentorum, (siquidem illos erroribus fortuitis annumerare placet): diuisionum enim multitudo in quouis instrumento determinato est finita. Manifesto autem, hoc non obstante, si modo non omnes errorum caussae errores discretos producant, complexus omnium errorum totalium possibilium constituet seriem secundum legem continuitatis progredientem, siue plures eiusmodi series interruptas, si forte, omnibus erroribus discretis possibilibus secundum magnitudinem ordinatis, vna alteraue differentia inter binos terminos proximos maior euadat, quam differentia inter limites errorum totalium, quatenus e ſolis erroribus continuis demanant. Sed in praxi caſus poſterior vix vmquam locum habebit, niſi diuiſio vitiis craſſioribus laboret.

4.

Deſignando facilitatem relatiuam erroris totalis x, in determinato obſeruationum genere, per characteriſticam φx, hoc, propter errorum continuitatem, ita intelligendum erit, probabilitatem erroris inter limites infinite proximos x et $x + dx$ eſſe $= \varphi x . dx$. Vix, ac ne vix quidem, vmquam in praxi poſſibile erit, hanc functionem a priori aſſignare: nihilominus plura generalia eam ſpectantia ſtabiliri poſſunt, quae deinceps proferemus. Obuium eſt, functionem φx eatenus ad functiones discontinuas referendam eſſe, quod pro omnibus valoribus ipſius x, extra limites errorum poſſibilium iacentibus eſſe debet $= 0$; intra hos limites vero vbique valorem poſitiuum nanciscetur (omittendo caſum, de quo in fine art. praec. locuti ſumus). In plerisque caſibus errores poſitiuos et negatiuos eiusdem magnitudinis aeque faciles ſupponere licebit, quo pacto erit $\varphi(-x) = \varphi x$. Porro quum errores leuiores facilius committantur quam grauiores, plerumque valor ipſius φx erit maximus pro $x = 0$, continuoque decreſcet, dum x augetur.

Generaliter autem valor integralis $\int \varphi x . dx$, ab $x = a$ vsque ad $x = b$ extenſi exprimet probabilitatem, quod error aliquis nondum cognitus iaceat inter limites a et b. Valor itaque iſtius integralis a limite inferiori omnium errorum poſſibilium vsque ad limitem ſuperiorem extenſi ſemper erit $= 1$. Et quum φx pro omnibus valoribus ipſius x extra hos limites iacentibus ſemper ſit $= 0$, manifeſto etiam

valor integralis $\int \varphi x . dx$ *ab* $x = -\infty$ *vsque ad* $x = +\infty$ *extenſi ſemper ſit* $= 1$.

5.

Consideremus porro integrale $\int x \varphi x \, . \, dx$ inter eosdem limites, cuius valorem statuemus $= k$. Si omnes errorum caussae simplices ita sunt comparatae, vt nulla adsit ratio, cur errorum aequalium sed signis oppositis affectorum alter facilius producatur quam alter, hoc etiam respectu erroris totalis valebit, siue erit $\varphi(-x) = \varphi x$, et proin necessario $k = 0$. Hinc colligimus, quoties k non euanescat sed e. g. sit quantitas positiua, necessario adesse debere vnam alteramue errorum caussam, quae vel errores positiuos tantum producere possit, vel certe positiuos facilius quam negatiuos. Haecce quantitas k, quae reuera est medium omnium errorum possibilium, seu valor medius ipsius x, commode dici potest erroris pars constans. Ceterum facile probari potest, partem constantem erroris totalis aequalem esse aggregato partium constantium, quas continent errores e singulis caussis simplicibus prodeuntes. Quodsi quantitas k nota supponitur, a quauis obseruatione resecatur, erroque obseruationis ita correctae designatur per x', ipsiusque probabilitas per $\varphi' x'$, erit $x' = x - k$, $\varphi' x' = \varphi x$ ac proin $\int x' \varphi' x' . dx' = \int x \varphi x \, dx - \int k \varphi x \, dx$ $= k - k = 0$, i. e. errores obseruationum correctarum partem constantem non habebunt, quod et per se clarum est.

6.

Perinde vt integrale $\int x \varphi x \, . \, dx$, seu valor medius ipsius x, erroris constantis vel absentiam vel praesentiam et magnitudinem docet, integrale

$$\int x x \varphi x \, . \, dx$$

ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$ extensum (seu valor medius quadrati xx) aptissimum videtur ad incertitudinem obseruationum in genere definiendam et dimetiendam, ita vt e duobus obseruationum systematibus, quae quoad errorum facilitatem inter se differunt, eae praecisione praestare censeantur, in quibus integrale $\int xx\varphi x \,.\, dx$ valorem minorem obtinet. Quodſi quis hanc rationem pro arbitrio, nulla cogente neceſſitate, electam eſſe obiiciat, lubenter aſſentiemur. Quippe quaeſtio haec per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limitibus circumſcribi niſi per principium aliquatenus arbitrarium nequit. Determinatio alicuius quantitatis per obſeruationem errori maiori minoriue obnoxiam, haud inepte comparatur ludo, in quo ſolae iacturae, lucra nulla, dum quilibet error metuendus iacturae affinis eſt. Talis ludi dispendium aeſtimatur e iactura probabili, puta ex aggregato productorum ſingularum iacturarum poſſibilium in probabilitates reſpectiuas. Quantae vero iacturae quemlibet obſeruationis errorem aequiparare conueniat, neutiquam per ſe clarum eſt; quin potius haec determinatio aliqua ex parte ab arbitrio noſtro pendet Iacturam ipſi errori aequalem ſtatuere manifeſto non licet; ſi enim errores poſitiui pro iacturis acciperentur, negatiui lucra repraeſentare deberent. Magnitudo iacturae potius per talem erroris functionem exprimi debet, quae natura ſua ſemper ſit poſitiua. Qualium functionum quum varietas ſit infinita, ſimpliciſſima, quae hac proprietate gaudet, prae ceteris eligenda videtur, quae absque lite eſt quadratum: hoc pacto principium ſupra prolatum prodit.

III. Laplace ſimili quidem modo rem conſiderauit, ſed errorem ipſum ſemper poſitiue acceptum tamquam iacturae menſuram adoptauit. At ni fallimur haecce ratio ſaltem non minus arbitraria eſt quam noſtra: vtrum enim error duplex aeque tolerabilis putetur quam ſimplex bis repetitus, an aegrius, et proin vtrum magis conueniat, errori duplici momentum duplex tantum, an maius, tribuere, quaeſtio eſt neque per ſe clara, neque demonſtrationibus mathematicis decidenda, ſed libero tantum arbitrio remittenda. Praeterea negari non poteſt, iſta ratione continuitatem laedi: et propter hanc ipſam cauſſam modus ille tractationi analyticae magis refragatur, dum ea, ad quae principium nostrum perducit, mira tum simplicitate tum generalitate commendantur.

7.

Statuendo valorem integralis $\int xx\varphi x \,.\, dx$ ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$ extensi $= mm$, quantitatem m vocabimus *errorem medium metuendum*, siue simpliciter *errorem medium* obseruationum, quarum errores indefiniti x habent probabilitatem relatiuam φx Denominationem illam non ad obseruationes immediatas limitabimus, sed etiam ad determinationes qualescunque ex obseruationibus deriuatas extendemus. Probe autem cauendum est, ne error medius confundatur cum medio arithmetico omnium errorum, de quo in art. 5. locuti sumus.

Vbi plura obseruationum genera, seu plures determinationes ex obseruationibus petitae, quibus haud eadem praecisio concedenda est, comparantur, *pondus* earum relatiuum nobis erit quantitas ipsi mm reciproce proportionalis, dum *praecisio* simpliciter ipsi m reciproce proportionalis habetur. Quo igitur pondus per numerum exprimi possit, pondus certi obseruationum generis pro vnitate acceptum esse debet.

8.

Si obseruationum errores partem constantem implicant, hanc auferendo error medius minuitur, pondus et praecisio augentur. Retinendo signa art. 5, designandoque per m' errorem medium obseruationum correctarum, erit

$$m'm' = \int x'x'\varphi' x' \,.\, dx' = \int (x-k)^2 \varphi x \,.\, dx = \int xx\varphi x \,.\, dx$$
$$- 2k\int x\varphi x \,.\, dx + kk\int \varphi x \, dx = mm - 2kk + kk = mm - kk.$$

Si autem loco partis constantis veri k quantitas alia l ab obseruationibus ablata esset, quadratum erroris medii noui euaderet $= mm - 2kl + ll = m'm' + (l-k)^2$.

9.

Denotante λ coëfficientem determinatum, atque μ valorem integralis $\int \varphi x \,.\, dx$ ab $x = -\lambda m$ vsque ad $x = +\lambda m$, erit μ probabilitas, quod error alicuius obſeruationis ſit minor quam λm (ſine reſpectu ſigni), nec non $1 - \mu$ probabilitas erroris maioris quam λm. Si itaque valor $\mu = \frac{1}{2}$ reſpondet valori $\lambda m = \varrho$, error aeque facile infra ϱ quam ſupra ϱ cadere poteſt, quocirca ϱ commode dici poteſt error *probabilis*. Relatio quantitatum λ, μ manifeſto pendet ab indole functionis φx, quae plerumque incognita eſt. Operae itaque pretium erit, iſtam relationem pro quibusdam caſibus ſpecialibus propius conſiderare.

I. Si limites omnium errorum poſſibilium ſunt $-a$ et $+a$, omnesque errores intra hos limites aeque probabiles, erit φx inter limites $x = -a$ et $x = +a$ conſtans, et proin $= \frac{1}{2a}$. Hinc $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, nec non $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ non maior quam $\sqrt{3}$; denique $\varrho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\, m$, probabilitasque, quod error prodeat errore medio non maior, erit $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$.

II. Si vt antea $-a$ et $+a$ ſunt errorum poſſibilium limites, errorumque ipſorum probabilitas inde ab errore 0 vtrimque in progreſſione arithmetica decreſcere ſupponitur, erit

$$\varphi x = \frac{a - x}{aa}, \text{ pro valoribus ipſius } x \text{ inter } 0 \text{ et } +a$$

$$\varphi x = \frac{a + x}{aa}, \text{ pro valoribus ipſius } x \text{ inter } 0 \text{ et } -a.$$

Hinc deducitur $m = a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\lambda\lambda$, quamdiu λ eſt inter 0 et $\sqrt{6}$, denique $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{(6 - 6\mu)}$, quamdiu μ inter 0 et 1, et proin

$$\varrho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}7174389\, m$$

Probabilitas erroris medium non ſuperantis erit in hoc caſu $= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} = 0{,}6498299$.

III.

III. Si functionem φx proportionalem ſtatuimus huic $e^{-\frac{xx}{hh}}$ (quod quidem in rerum natura proxime tantum verum eſſe poteſt), eſſe debebit

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{h\sqrt{\pi}}$$

denotante π ſemiperipheriam circuli pro radio 1, vnde porro deducimus

$$m = h\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

(V. *Disquiſ. generales circa ſeriem infinitam* etc. art. 28.). Porro ſi valor integralis

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-zz}\,dz$$

a $z = 0$ inchoati denotatur per Θz, erit

$$\mu = \Theta\left(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

Tabula ſequens exhibet aliquot valores huius quantitatis:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Quanquam relatio inter λ et μ ab indole functionis φx pendet, tamen quaedam generalia ſtabilire licet. Scilicet qualiscunque ſit haec functio, ſi modo ita eſt comparata, vt ipſius valor, creſcente valore abſoluto ipſius x, ſemper decreſcat, vel ſaltem non creſcat, certo erit

λ minor vel saltem non maior quam $\mu\sqrt{3}$, quoties μ est minor quam $\frac{2}{3}$;

λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$, quoties μ est maior quam $\frac{2}{3}$

Pro $\mu = \frac{2}{3}$ vterque limes coincidit, puta λ nequit esse maior quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Vt hoc insigne theorema demonstremus, denotemus per y valorem integralis $\int \varphi z \,.\, dz$ a $z = -x$ vsque ad $z = +x$ extensi, quo pacto y erit probabilitas, quod error aliquis contentus sit intra limites $-x$ et $+x$. Porro statuamus

$$x = \psi y,\ d\psi y = \psi' y \,.\, dy,\ d\psi' y = \psi'' y \,.\, dy$$

Erit itaque $\psi 0 = 0$, nec non

$$\psi' y = \frac{1}{\varphi x + \varphi(-x)}$$

quare per hyp. $\psi' y$ ab $y = 0$ vsque ad $y = 1$ semper crescet, saltem nullibi decrescet, siue, quod idem est, valor ipsius $\psi'' y$ semper erit positiuus, vel saltem non negatiuus. Porro habemus $d \,.\, y\psi' y = \psi' y \,.\, dy + y\psi'' y \,.\, dy$, adeoque

$$y\psi' y - \psi y = \int y\psi'' y \,.\, dy$$

integratione ab $y = 0$ inchoata. Valor expressionis $y\psi' y - \psi y$ itaque semper erit quantitas positiua, saltem non negatiua, adeoque

$$1 - \frac{\psi y}{y\psi' y}$$

quantitas positiua vnitate minor. Sit f eius valor pro $y = \mu$, i. e. quum habeatur $\psi\mu = \lambda m$, fit

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\psi'\mu} \text{ siue } \psi'\mu = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu}$$

His ita praeparatis, consideremus functionem ipsius y hanc

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}(y - \mu f)$$

quam statuemus $= Fy$, nec non $dFy = F'y \,.\, dy$. Perspicuum est fieri

$$F\mu = \lambda m = \psi\mu$$

$$F'\mu = \frac{\lambda\mu m}{(1-f)\mu} = \psi'\mu$$

Quare quum $\psi' y$, aucta ipſa y, continuo creſcat (ſaltem non decreſcat, quod ſemper ſubintelligendum), $F' y$ vero conſtans ſit, differentia $\psi' y - F' y = \frac{\mathrm{d}(\psi y - F y)}{\mathrm{d} y}$ erit poſitiua pro valoribus ipſius y maioribus quam μ, negatiua pro minoribus. Hinc facile colligitur, $\psi y - F y$ ſemper eſſe quantitatem poſitiuam, adeoque ψy ſemper erit abſolute maior, ſaltem non minor, quam $F y$, certe quamdiu valor ipſius $F y$ eſt poſitiuus, i. e. ab $y = \mu f$ vsque ad $y = 1$. Hinc valor integralis $\int (F y)^2 \mathrm{d} y$ ab $y = \mu f$ vsque ad $y = 1$ erit minor valore integralis $\int (\psi y)^2 \mathrm{d} y$ inter eosdem limites, adeoque a potiori minor valore huius integralis ab $y = 0$ vsque ad $y = 1$, qui fit $= mm$. At valor integralis prioris inuenitur

$$= \frac{\lambda\lambda mm(1-\mu f)^3}{3\mu\mu(1-f)^2}$$

vnde colligimus, $\lambda\lambda$ eſſe minorem quam $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, vbi f eſt quantitas inter 0 et 1 iacens. Iam valor fractionis $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, cuius differentiale, ſi f tamquam quantitas variabilis consideratur, fit $=$

$$-\frac{3\mu\mu(1-f)}{(1-\mu f)^4} . (2 - 3\mu + \mu f)\mathrm{d} f$$

continuo decreſcit, dum f a valore 0 vsque ad valorem 1 *tranſit*, quoties μ minor eſt quam $\frac{2}{3}$, adeoque valor maximus poſſibilis erit is qui valori $f = 0$ reſpondet, puta $= 3\mu\mu$, ita vt in hoc caſu λ certo fiat minor vel non maior quam $\mu\sqrt{3}$. *Q.E.P.* Contra quoties μ maior eſt quam $\frac{2}{3}$, valor illius fractionis erit maximus pro $2 - 3\mu + \mu f = 0$, i. e. pro $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, vnde ille fit

$=\frac{4}{9(1-\mu)}$, adeoque in hoc caſu λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$. *Q. E. S.*

Ita e. g. pro $\mu=\frac{1}{2}$ certo λ nequit eſſe maior quam $\sqrt{\frac{3}{4}}$, i. e. error probabilis ſuperare nequit limitem $0{,}8660254\,m$, cui in exemplo primo art. 9. aequalis inuentus eſt. Porro facile e theoremate noſtro concluditur, μ non eſſe minorem quam $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ minor ſit quam $\sqrt{\frac{3}{4}}$, contra μ non eſſe minorem quam $1-\frac{4}{9\lambda\lambda}$, pro valore ipſius λ maiori quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

11.

Quum plura problemata infra tractanda etiam cum valore integralis $\int x^4\,\varphi x\,.\,dx$ nexa ſint, operae pretium erit, eum pro quibusdam caſibus ſpecialibus euoluere. Denotabimus valorem huius integralis ab $x=-\infty$ vsque ad $x=+\infty$ extenſi per n^4.

I. Pro $\varphi x=\frac{1}{2a}$, quatenus x inter $-a$ et $+a$ continetur, habemus $n^4=\frac{9}{5}a^4=\frac{9}{5}m^4$.

II. In caſu ſecundo art. 6, vbi $\varphi x=\frac{a\mp x}{aa}$, pro valoribus ipſius x inter o et $\pm a$, fit $n^4=\frac{1}{15}a^4=\frac{12}{5}m^4$.

III. In caſu tertio vbi

$$\varphi x=\frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{a\sqrt{\pi}}$$

inuenitur per ea, quae in commentatione ſupra citata exponuntur, $n^4=\frac{3}{4}h^4=3m^4$.

Ceterum demonſtrari poteſt, valorem ipſius $\frac{n^4}{m^4}$ certo non eſſe minorem quam $\frac{9}{5}$, ſi modo ſuppoſitio art. praec. locum habeat.

12.

Denotantibus x, x', x'' etc. indefinite errores obseruationum eiusdem generis ab inuicem independentes, quorum probabilitates relatiuas exprimit praefixa characteristica φ; nec non y functionem datam rationalem indeterminatarum x, x', x'' etc.: integrale multiplex (I)

$$\int \varphi x . \varphi' x . \varphi'' x \ldots . \mathrm{d}x . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots$$

extensum per omnes valores indeterminatarum x, x', x'', pro quibus valor ipsius y cadit intra limites datos o et η, exprimet probabilitatem valoris ipsius y indefinite intra o et η siti. Manifesto hoc integrale erit functio ipsius η, cuius differentiale statuemus $= \psi \eta . \mathrm{d}\eta$, ita vt integrale ipsum fiat aequale integrali $\int \psi \eta . \mathrm{d}\eta$ ab $\eta = o$ incepto. Hoc pacto simul characteristica $\psi \eta$ probabilitatem relatiuam cuiusuis valoris ipsius y exprimere censenda est. Quum x considerari possit tamquam functio indeterminatarum y, x', x'' etc., quam statuemus

$$= f(y, x', x'' \ldots)$$

integrale (I) fiet

$$= \int \varphi . f(y, x', x'' \ldots) . \frac{\mathrm{d} f(y, x', x'' \ldots)}{\mathrm{d}y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots \mathrm{d}y . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots,$$

vbi y extendi debet ab $y = o$ vsque ad $y = \eta$, indeterminatae reliquae vero per omnes valores, quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x'' \ldots)$. Hinc colligitur

$$\psi y = \int \varphi \, f(y, x', x'' \ldots) . \frac{\mathrm{d} f(y, x', x'' \ldots)}{\mathrm{d}y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots$$

integratione, in qua y tamquam constans considerari debet, extensa per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc., qui ipsi $f(y, x', x'' \ldots)$ valorem realem conciliant.

13.

Ad hanc integrationem reipsa exsequendam cognitio functionis φ requireretur, quae plerumque incognita est: quinadeo, etiamsi haec functio cognita esset, in plerisque casibus integratio vires analyseos superaret. Quae quum ita sint, probabilitatem quidem singulorum valorum ipsius y assignare non poterimus: at secus res se habebit, si tantummodo desideratur valor medius ipsius y, qui oritur ex integratione $\int y \psi y \,.\, \mathrm{d}y$ per omnes valores ipsius y, quos quidem assequi potest, extensa. Et quum manifesto pro omnibus valoribus, quos y assequi nequit, vel per naturam functionis quam exprimit (e. g. pro negatiuis, si esset $y = xx + x'x' + x''x'' +$ etc.), vel ideo quod erroribus ipsis x, x', x'' etc. certi limites sunt positi, statuere oporteat $\psi y = 0$, manifesto res perinde se habebit, si integratio illa extendatur per omnes valores reales ipsius y, puta ab $y = -\infty$ vsque ad $y = +\infty$. Iam integrale $\int y \psi y \,.\, \mathrm{d}y$ inter limites determinatos, puta ab $y = \eta$ vsque ad $y = \eta'$ sumtum aequale est integrali

$$\int y \varphi \cdot f(y, x', x'' \ldots) \frac{\mathrm{d} f(y, x', x'' \ldots)}{\mathrm{d}y} \,.\, \varphi x' \,.\, \varphi x'' \ldots \mathrm{d}y \,.\, \mathrm{d}x' \,.\, \mathrm{d}x'' \ldots$$

integratione extensa ab $y = \eta$ vsque ad $y = \eta'$, atque per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc. quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x'' \ldots)$, siue quod idem est, valori integralis

$$\int y \varphi x \,.\, \varphi x' \,.\, \varphi x'' \ldots \mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}x' \,.\, \mathrm{d}x'' \ldots$$

adhibendo in hac integratione pro y eius valorem per x, x', x'' etc. expressum, extendendoque eam per omnes harum indeterminatarum valores, quibus respondet valor ipsius y inter η et η' situs. Hinc colligimus, integrale $\int y \psi y \,.\, \mathrm{d}y$ per omnes valores ipsius y, ab $y = -\infty$ vsque ad $y = +\infty$ extensum obtineri ex integratione

$$\int y \varphi x \,.\, \varphi x' \,.\, \varphi x'' \ldots \mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}x' \,.\, \mathrm{d}x'' \ldots$$

per omnes valores reales ipsarum x, x', x'' etc. extensa, puta ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ vsque ad $x' = +\infty$ etc.

14.

Reducta itaque functione y ad formam aggregati talium partium

$$A x^\alpha x'^\beta x''^\gamma \ldots$$

valor integralis $\int y \psi y \,.\, \mathrm{d}y$ per omnes valores ipſius y extenſi, ſeu valor medius ipſius y, aequalis erit aggregato partium

$$A \times \int x^{\alpha} \varphi x \,.\, \mathrm{d}x \times \int x'^{\beta} \varphi x' \,.\, \mathrm{d}x' \times \int x''^{\gamma} \varphi x'' \,.\, \mathrm{d}x'' \ldots.$$

vbi integrationes extendendae ſunt ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ vsque ad $x' = +\infty$ etc.; ſiue quod eodem redit, aggregato partium quae oriuntur, dum pro ſingulis poteſtatibus x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ipſarum valores medii ſubſtituuntur, cuius theorematis grauiſſimi veritas etiam ex aliis conſiderationibus facile deriuari potuiſſet.

15.

Applicemus ea, quae in art. praec. expoſuimus, ad caſum ſpecialem, vbi

$$y = \frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

denotante σ multitudinem partium in numeratore. Valor medius ipſius y hic illico inuenitur $= mm$, accipiendo characterem m in eadem ſignificatione vt ſupra. Valor verus quidem ipſius y in caſu determinato maior minorue euadere poteſt medio, perinde ac valor verus termini ſimplicis xx: ſed probabilitas quod valor fortuitus ipſius y a medio mm haud ſenſibiliter aberret, continuo magis ad certitudinem appropinquabit creſcente multitudine σ. Quod quo clarius eluceat, quum probabilitatem ipſam exacte determinare non ſit in poteſtate, inueſtigemus errorem medium metuendum, dum ſupponimus $y = mm$. Manifeſto per principia art. 6. hic error erit radix quadrata valoris medii functionis

$$\left(\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma} - mm\right)^2$$

ad quem eruendum ſufficit obſeruare, valorem medium termini talis $\frac{x^4}{\sigma\sigma}$ eſſe $= \frac{n^4}{\sigma\sigma}$ (vtendo charactere n in ſignificatione art. 11.), valorem medium autem termini talis $\frac{2\,xxx'x'}{\sigma\sigma}$ fieri $= \frac{2\,m^4}{\sigma\sigma}$, vnde facillime deducitur valor medius iſtius functionis

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}$$

Hinc diſcimus, ſi copia ſatis magna errorum fortuitorum ab inuicem independentium x, x', x'' etc. in promtu ſit, magna certitudine inde peti poſſe valorem approximatum ipſius m per formulam

$$m = \sqrt{\frac{(xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.})}{\sigma}}$$

erroremque medium in hac determinatione metuendum, reſpectu quadrati mm, eſſe

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

Ceterum, quum poſterior formula implicet quantitatem n, ſi id tantum agitur, vt idea qualiscunque de gradu praeciſionis iſtius determinationis formari poſſit, ſufficiet, aliquam hypotheſin reſpectu functionis φ amplecti. E. g. in hypotheſi tertia art. 9, 11. iſte error fit $= mm\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Quod ſi minus arridet, valor approximatus ipſius n^4 ex ipſis erroribus adiumento formulae

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \text{etc.}}{\sigma}$$

peti poterit. Generaliter autem affirmare poſſumus, praeciſionem duplicatam in iſta determinatione requirere errorum copiam quadruplicatam, ſiue pondus determinationis ipſi multitudini σ eſſe proportionale.

Prorſus ſimili modo, ſi obſeruationum errores partem conſtantem inuoluunt, huius valor approximatus eo tutius e medio arithmetico multorum errorum colligi poterit, quo maior horum multitudo fuerit. Et quidem error medius in hac determinatione metuendus exprimetur per

$\sqrt{mm}$

$$\sqrt{\frac{mm-kk}{\sigma}}$$

ſi k deſignat partem conſtantem ipſam atque m errorem medium obſeruationum parte conſtante nondum purgatarum, ſiue ſimpliciter per $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, ſi m denotat errorem medium obſeruationum a parte conſtante liberatarum (v. art. 8.).

16.

In artt. 12—15. ſuppoſuimus, errores x, x', x'' etc. ad idem obſeruationum genus pertinere, ita vt ſingulorum probabilitates per eandem functionem exprimantur. Sed ſponte patet, diſquiſitionem generalem artt. 12 — 14 aeque facile ad caſum generaliorem extendi, vbi probabilitates errorum x, x', x'' etc. per functiones diuerſas φx, $\varphi' x'$, $\varphi'' x''$ etc. exprimantur, i. e. vbi errores illi pertineant ad obſeruationes praeciſionis ſeu incertitudinis diuerſae. Supponamus, x eſſe errorem obſeruationis talis, cuius error medius metuendus ſit $= m$; nec non x', x'' etc eſſe errores aliarum obſeruationum, quarum errores medii metuendi reſp. ſint m', m'' etc. Tunc valor medius aggregati $xx + x'x' + x''x'' +$ etc. erit $mm + m'm' + m''m'' +$ etc. Iam ſi aliunde conſtat, quantitates m, m', m'' etc. eſſe in ratione data, puta numeris 1, μ', μ'' etc. reſp. proportionales, valor medius expreſſionis

$$\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

erit $= mm$. Si vero valorem eiusdem expreſſionis determinatum, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipſi mm aequalem ponimus, error medius, cui haec determinatio obnoxia manet, ſimili ratione vt in art. praec. inuenitur

$$= \frac{\sqrt{(n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

vbi n', n'' etc. reſpectu obſeruationum, ad quas pertinent errores

x', x'' etc., idem denotare ſupponuntur, atque n reſpectu obſervationis primae. Quodſi itaque numeros n, n', n'' etc. ipſis m, m', m'' etc. proportionales ſupponere licet, error ille metuendus medius fit

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4)} \cdot \sqrt{(1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

At haecce ratio, valorem approximatum ipſius m determinandi, non eſt ea, quae maxime ad rem facit. Quod quo clarius oſtendamus, conſideremus expreſſionem generaliorem

$$y = \frac{xx + \alpha' x' x' + \alpha'' x'' x'' + \text{etc.}}{1 + \alpha' \mu' \mu' + \alpha'' \mu'' \mu'' + \text{etc.}}$$

cuius valor medius quoque erit $= mm$, quomodocunque eligantur coëfficientes α', α'' etc. Error autem medius metuendus, dum valorem determinatum ipſius y, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipſi mm aequalem ſupponimus, inuenitur per principia ſupra tradita

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4 + \alpha'\alpha'(n'^4 - m'^4) + \alpha''\alpha''(n''^4 - m''^4) + \text{etc})}}{1 + \alpha'\mu'\mu' + \alpha''\mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

Vt hic error medius fiat quam minimus, ſtatuere oportebit

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4} \cdot \mu'\mu'$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4} \cdot \mu''\mu'' \text{ etc.}$$

Manifeſto hi valores euolui nequeunt, niſi inſuper ratio quantitatum n, n', n'' etc. ad m, m', m'' etc. aliunde nota fuerit; qua cognitione exacta deficiente, ſaltem tutiſſimum videtur *), illas his proportionales ſupponere (v. art. 11), vnde prodeunt valores

*) Scilicet cognitionem quantitatum μ', μ'' etc. in eo ſolo caſu in poteſtate eſſe concipimus, vbi per rei naturam errores x, x', x'' etc. ipſis 1, μ', μ'' etc. proportionales, aeque probabiles cenſendi ſunt, aut potius vbi $\varphi x = \mu' \varphi'(\mu' x) = \mu'' \varphi''(\mu'' x)$ etc.

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'\mu'}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''\mu''} \text{ etc.}$$

i. e. coëfficientes α', α'' etc. aequales ſtatui debent ponderibus relatiuis obſeruationum, ad quas pertinent errores x', x'' etc., aſſumto pondere obſeruationis, ad quam pertinet error x, pro vnitate. Hoc pacto, deſignante vt ſupra σ multitudinem errorum propoſitorum, habebimus valorem medium expreſſionis

$$\frac{xx + \alpha' x'x' + \alpha'' x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

$=mm$, atque errorem medium metuendum, dum valorem fortuito determinatum huius expreſſionis pro valore vero ipſius mm adoptamus

$$\frac{\sqrt{(n^4 + \alpha'\alpha' n'^4 + \alpha''\alpha'' n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4)}}{\sigma}$$

et proin, ſiquidem licet, ipſas n, n', n'' etc. ipſis m, m', m'' proportionales ſupponere,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

quae formula identica eſt cum ea, quam ſupra pro caſu obſeruationum eiusdem generis inueneramus.

17.

Si valor quantitatis, quae ab alia quantitate incognita pendet, per obſeruationem praeciſione abſoluta non gaudentem determinata eſt, valor incognitae hinc calculatus etiam errori obnoxius erit, ſed nihil in hac determinatione arbitrio relinquitur. At ſi *plures* quantitates ab eadem incognita pendentes per obſeruationes haud abſolute exactas innotuerunt, valorem incognitae vel per quamlibet harum obſeruationum eruere poſſumus, vel per aliquam plurium obſeruationum combinationem, quod infinitis modis diuerſis fieri poteſt. Quamquam vero valor incognitae tali modo prodiens errori ſemper obnoxius manet, tamen in alia combinatione maior, in alia minor error metuendus erit. Similiter res ſe habebit, ſi plures quantitates a pluribus incognitis ſimul pendentes ſunt obſeruatae: prout obſeruationum multitudo multitudini incognitarum vel aequalis, vel hac minor vel maior fuerit, problema vel determinatum, vel indeterminatum, vel plus quam determinatum erit (generaliter ſaltem loquendo), et in caſu tertio ad incognitarum determinationem obſeruationes infinitis modis diuerſis combinari poterunt. E tali combinationum varietate eas eligere, quae maxime ad rem faciant, i. e. quae incognitarum valores erroribus minimis obnoxios ſuppeditent, problema ſane eſt in applicatione matheſeos ad philoſophiam naturalem longe grauiſſimum.

In Theoria motus corporum coeleſtium oſtendimus, quomodo valores incognitarum *maxime probabiles* eruendi ſint, ſi lex probabilitatis errorum obſeruationum cognita ſit; et quum haec lex natura ſua in omnibus fere caſibus hypothetica maneat, theoriam illam ad legem maxime plauſibilem applicauimus, vbi probabilitas erroris x quantitati exponentiali e^{-hhxx} proportionalis ſupponitur, vnde methodus a nobis dudum in calculis praeſertim aſtronomicis, et nunc quidem a plerisque calculatoribus ſub nomine methodi quadratorum minimorum vſitata demanauit.

Poſtea ill. Laplace, rem alio modo aggreſſus, idem principium omnibus aliis etiamnum praeferendum eſſe docuit, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, ſi modo obſeruationum multitudo ſit permagna. At pro multitudine obſeruationum modica, res intacta manſit, ita vt ſi lex noſtra hypothetica reſpuatur, methodus quadratorum minimorum eo tantum nomine prae aliis commendabilis habenda ſit, quod calculorum concinnitati maxime eſt adaptata.

Geometris itaque gratum fore ſperamus, ſi in hac noua argumenti tractatione docuerimus, methodum quadratorum minimorum exhibere combinationem ex omnibus optimam, non quidem proxime, ſed abſolute, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, quaecunque obſeruationum multitudo, ſi modo notionem erroris medii non ad mentem ill. Laplace, ſed ita vt in artt. 5 et 6 a nobis factum eſt ſtabiliamus.

Ceterum expreſſis verbis hic praemonere conuenit, in omnibus diſquiſitionibus ſequentibus tantummodo de erroribus irregularibus atque a parte conſtante liberis ſermonem eſſe, quum proprie ad perfectam artem obſeruandi pertineat, omnes errorum conſtantium cauſſas ſummo ſtudio amouere. Quaenam vero ſubſidia calculator tales obſeruationes tractare ſuſcipiens, quas ab erroribus conſtantibus non liberas eſſe iuſta ſuſpicio adeſt, ex ipſo calculo probabilium petere poſſit, diſquiſitioni peculiari alia occaſione promulgandae reſeruamus.

18.

Problema.

Deſignante U functionem datam quantitatum incognitarum V, V', V'' etc., quaeritur error medius M in determinatione valoris ipſius U metuendus, ſi pro V, V', V'' etc. adoptentur non valores veri, ſed ii, qui ex obſeruationibus ab inuicem independentibus, erroribus mediis m, m', m'' etc. reſp. obnoxiis prodeunt.

Sol. Denotatis erroribus in valoribus obſeruatis ipſarum V, V', V'' etc. per e, e', e'' etc., error inde redundans in valorem ipſius U exprimi poterit per functionem linearem

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{etc.} = E$$

vbi λ, λ', λ'' etc. ſunt valores quotientium differentialium $\frac{dU}{dV}$, $\frac{dU}{dV'}$, $\frac{dU}{dV''}$ etc. pro valoribus veris ipſarum V, V', V'' etc., ſiquidem obſeruationes ſatis exactae ſunt, vt errorum quadrata productaque negligere liceat. Hinc primo ſequitur, quoniam obſeruationum errores a partibus conſtantibus liberi ſupponuntur, valorem medium ipſius E eſſe $= 0$. Porro error medius in valore ipſius U metuendus, erit radix quadrata e valore medio ipſius EE, ſiue MM erit valor medius aggregati

$$\lambda\lambda ee + \lambda'\lambda' e'e' + \lambda''\lambda'' e''e'' + \text{etc.} + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \text{etc.}$$

At valor medius ipſius $\lambda\lambda ee$ fit $\lambda\lambda mm$, valor medius ipſius $\lambda'\lambda' e'e'$ fit $= \lambda'\lambda' m'm'$ etc.; denique valores medii productorum $2\lambda\lambda' ee'$ etc. omnes fiunt $= 0$. Hinc itaque colligimus

$$M = \sqrt{(\lambda\lambda mm + \lambda'\lambda' m'm' + \lambda''\lambda'' m''m'' + \text{etc.})}$$

Huic ſolutioni quasdam annotationes adiicere conueniet.

I. Quatenus ſpectando obſeruationum errores tanquam quantitates primi ordinis, quantitates ordinum altiorum negliguntur, in formula noſtra pro λ, λ' λ'' etc. etiam valores eos quotientium $\frac{dU}{dV}$ etc. adoptare licebit, qui prodeunt e valoribus obſeruatis quantitatum V, V', V'' etc. Quoties U eſt functio linearis, manifeſto nulla prorſus erit differentia.

II. Si loco errorum mediorum obſeruationum, harum pondera introducere malumus, ſint haec, ſecundum vnitatem arbitrariam, reſp. p, p', p'' etc., atque P pondus determinationis valoris ipſius U e valoribus obſeruatis quantitatum V, V', V'' etc. prodeuntis. Ita habebimus

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda\lambda}{p} + \frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \text{etc.}}$$

III. Si T eſt functio alia data quantitatum V, V', V'' etc. atque, pro harum valoribus veris,

$$\frac{dT}{dV} = \varkappa,\ \frac{dT}{dV'} = \varkappa',\ \frac{dT}{dV''} = \varkappa'' \text{ etc.}$$

error in determinatione valoris ipſius T, e valoribus obſeruatis ipſarum V, V', V'' etc. petita, erit $= \varkappa e + \varkappa' e' + \varkappa'' e'' +$ etc., $= E'$, atque error medius in iſta determinatione metuendus $= \sqrt{(\varkappa\varkappa mm + \varkappa'\varkappa' m'm' + \varkappa''\varkappa'' m''m'' + \text{etc.})}$. Errores E, E' vero manifeſto ab inuicem iam non erunt independentes, valorque medius producti EE', ſecus ac valor medius producti ee', non erit $= 0$, ſed $= \varkappa\lambda mm + \varkappa'\lambda' m'm' + \varkappa''\lambda'' m''m'' +$ etc.

IV. Problema noſtrum etiam ad caſum eum extendere licet, vbi valores quantitatum V, V', V'' etc. non immediate per obſeruationes inueniuntur, ſed quomodocunque ex obſeruationum combinationibus deriuantur, ſi modo ſingularum determinationes ab inuicem ſunt independentes, i. e. obſeruationibus diuerſis ſuperſtructae: quoties autem haec conditio locum non habet, formula pro M erronea euaderet. E. g. ſi vna alterave obſeruatio, quae ad determinationem valoris ipſius V inſeruiit, etiam ad valorem ipſius V' determinandum adhibita eſſet, errores e et e' haud amplius ab inuicem independentes forent, neque adeo producti ee' valor medius $= 0$. Si vero in tali caſu nexus quantitatum V, V' cum obſeruationibus ſimplicibus, e quibus deductae ſunt, rite perpenditur, valor medius producti ee' adiumento annotationis III. aſſignari, atque ſic formula pro M completa reddi poterit.

19.

Sint V, V', V'' etc. functiones incognitarum x, y, z etc., multitudo illarum $= \pi$, multitudo incognitarum $= \rho$, ſupponamusque, per obſeruationes vel immediate vel mediate valores functionum inuentos eſſe $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc., ita tamen vt hae determinationes ab inuicem fuerint independentes. Si ρ maior eſt quam π, incognitarum euolutio manifeſto fit problema indeterminatum; ſi ρ ipſi π aequalis eſt, ſingulae x, y, z etc. in formam functionum ipſarum V, V', V'' etc. redigi vel redactae concipi possunt, ita vt ex harum valoribus obseruatis valores istarum inueniri possint, simulque adiumento art. praec. praecisionem relatiuam singulis his determinationibus tribuendam assignare liceat; denique si ϱ minor est quam π, singulae x, y, z etc. infinitis modis diuersis in formam functionum ipsarum V, V' V'' etc. redigi, adeoque illarum valores infinitis modis diuersis erui poterunt. Quae determinationes exacte quidem quadrare deberent, si obseruationes praecisione absoluta gauderent; quod quum secus se habeat, alii modi alios valores suppeditabunt, nec minus determinationes e combinationibus diuersis petitae inaequali praecisione instructae erunt.

Ceterum si in casu secundo vel tertio functiones V, V', V'' etc. ita comparatae essent, vt $\pi - \varrho + 1$ ex ipsis, vel plures, tamquam functiones reliquarum spectare liceret, problema respectu posteriorum functionum etiamnum plus quam determinatum esset, respectu incognitarum x, y, z etc. autem indeterminatum; harum scilicet valores ne tunc quidem determinare liceret, quando valores functionum V, V', V'' etc. absolute exacti dati essent: sed hunc casum a disquisitione nostra excludemus.

Quoties V, V', V'' etc. per se non sunt functiones *lineares* indeterminatarum suarum, hoc efficietur, si loco incognitarum primitiuarum introducuntur ipsarum differentiae a valoribus approximatis, quos aliunde cognitos esse supponere licet. Errores medios in determinationibus $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. metuendos resp. denotabimus per m, m', m'' etc., determinationumque pondera per p, p', p'' etc., ita vt sit $pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc. Rationem, quam inter se tenent errores medii, cognitam supponemus, ita vt pondera, quorum vnum ad lubitum accipi potest, sint nota. Denique statuemus

$(V - L)\sqrt{p} = v$, $(V' - L')\sqrt{p'} = v'$, $(V'' - L'')\sqrt{p''} = v''$ etc.

Manifesto itaque res perinde se habebit, ac si obseruationes immediamediatae, aequali praecisione gaudentes, puta quarum error medius $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc., siue quibus pondus $= 1$ tribuitur, suppeditauissent

$$v = 0,\ v' = 0,\ v'' = 0 \text{ etc.}$$

20.

PROBLEMA.

Designantibus v, v', v'' etc. functiones lineares indeterminatarum x, y, z etc. sequentes

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

ex omnibus systematibus coëfficientium $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc., qui indefinite dant

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

ita vt k sit quantitas determinata i. e. ab x, y, z etc. independens, eruere id, pro quo $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' +$ etc. nanciscatur valorem minimum.

Solutio. Statuamus

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

etc.: eruntque etiam ξ, η, ζ etc. functiones lineares ipsarum x, y, z etc., puta

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma aa + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma bb + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma cc + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

(vbi Σaa denotat aggregatum $aa + a'a' + a''a'' +$ etc., ac perinde de reliquis).

multitudoque ipſarum ξ, η, ζ etc. multitudini indeterminatarum x, y, z etc. aequalis, puta $= \pi$. Per eliminationem itaque elici poterit aequatio talis *)

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}$$

in qua ſubſtituendo pro ξ, η, ζ etc. valores earum ex III, aequatio identica prodire debet. Quare ſtatuendo

$$\left.\begin{aligned}a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha\\ a'[\alpha\alpha] + b'[\alpha\beta] + c'[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha'\\ a''[\alpha\alpha] + b''[\alpha\beta] + c''[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha'' \text{ etc.}\end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

neceſſario erit indefinite

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - A \quad \text{(V)}$$

Haec aequatio docet, inter ſyſtemata valorum coëfficientium $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. certo etiam referendos eſſe hos $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc., nec non, pro ſyſtemate quocunque, fieri debere indefinite

$$(\varkappa - \alpha)v + (\varkappa' - \alpha')v' + (\varkappa'' - \alpha'')v'' + \text{etc.} = A - k$$

quae aequatio implicat ſequentes

$$(\varkappa - \alpha)a + (\varkappa' - \alpha')a' + (\varkappa'' - \alpha'')a'' + \text{etc.} = 0$$

$$(\varkappa - \alpha)b + (\varkappa' - \alpha')b' + (\varkappa'' - \alpha'')b'' + \text{etc.} = 0$$

$$(\varkappa - \alpha)c + (\varkappa' - \alpha')c' + (\varkappa'' - \alpha'')c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando has aequationes reſp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc., et addendo, obtinemus propter (IV)

$$(\varkappa - \alpha)\alpha + (\varkappa' - \alpha')\alpha' + (\varkappa'' - \alpha'')\alpha'' + \text{etc.} = 0$$

ſiue quod idem eſt

$$\begin{aligned}\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.} &= \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.}\\ &\quad + (\varkappa - \alpha)^2 + (\varkappa' - \alpha')^2 + (\varkappa'' - \alpha'')^2 + \text{etc.}\end{aligned}$$

vnde patet, aggregatum $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}$ valorem minimum obtinere, ſi ſtatuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. *Q. E. I.*

---

*) Ratio, cur ad denotandos coëfficientes e tali eliminatione prodeuntes, hos potiſſimum characteres elegerimus, infra elucebit.

Ceterum hic valor minimus ipſe ſequenti modo eruitur. Aequatio (V) docet eſſe

$$\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \text{etc.} = 1$$

$$\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \text{etc.} = 0$$

$$\alpha c + \alpha' c' + \alpha'' c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando has aequationes reſp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. et addendo, protinus habemus adiumento aequationum (IV)

$$\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} = [\alpha\alpha]$$

21.

Quum obſeruationes ſuppeditauerint aequationes (proxime veras) $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., ad valorem incognitae x inde eliciendum, combinatio illarum aequationum talis

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = 0$$

adhibenda eſt, quae ipſi x coëfficientem 1 conciliet, incognitasque reliquas y, z etc. eliminet; cui determinationi per art. 18. pondus

$$= \frac{1}{\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}}$$

tribuendum erit. Ex art. praec. itaque ſequitur, determinationem maxime idoneam eam fore, vbi ſtatuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. Hoc pacto x obtinet valorem A, manifeſtoque idem valor etiam (absque cognitione multiplicatorum α, α', α'' etc) protinus per eliminationem ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. elici poteſt, Pondus huic determinationi tribuendum erit $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, ſiue error medius in ipſa metuendus

$$= m\sqrt{p[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

Prorſus ſimili modo determinatio maxime idonea incognitarum reliquarum y, z etc. eosdem valores ipſis conciliabit, qui per eliminationem ex iisdem aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. prodeunt.

Denotando aggregatum indefinitum $vv + v'v' + v''v''$ etc., siue quod idem est hoc

$$p(V-L)^2 + p'(V'-L')^2 + p''(V''-L'')^2 + \text{etc.}$$

per Ω, patet, 2ξ, 2η, 2ζ etc. esse quotientes differentiales partiales functionis Ω, puta

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx},\ 2\eta = \frac{d\Omega}{dy},\ 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz} \text{ etc.}$$

Quapropter valores incognitarum ex obseruationum combinatione maxime idonea prodeuntes, quos *valores maxime plausibiles* commode vocare possumus, identici erunt cum iis, per quos Ω valorem minimum obtinet. Iam $V - L$ indefinite exprimit differentiam inter valorem computatum et obseruatum. Valores itaque incognitarum maxime plausibiles iidem erunt, qui summam quadratorum differentiarum inter quantitatum V, V', V'' etc. valores obseruatos et computatos, per obseruationum pondera multiplicatorum, minimam efficiunt, quod principium in *Theoria Motus Corporum Coelestium* longe alia via stabiliueramus. Et si insuper praecisio relatiua singularum determinationum assignanda est, per eliminationem indefinitam ex aequationibus (III) ipsas x, y, z etc. in tali forma exhibere oportet:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ y &= B + [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ z &= C + [\gamma\alpha]\xi + [\gamma\beta]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$

etc.

quo pacto valores maxime plausibiles incognitarum x, y, z etc. erunt resp. A, B, C etc., atque pondera his determinationibus tribuenda $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., ſiue errores medii in ipſis metuendi

$$\text{pro } x \ldots\ldots m\sqrt{p[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$
$$\text{pro } y \ldots\ldots m\sqrt{p[\beta\beta]} = m'\sqrt{p'[\beta\beta]} = m''\sqrt{p''[\beta\beta]} \text{ etc.}$$
$$\text{pro } z \ldots\ldots m\sqrt{p[\gamma\gamma]} = m'\sqrt{p'[\gamma\gamma]} = m''\sqrt{p''[\gamma\gamma]} \text{ etc.}$$
etc.

quod conuenit cum iis, quae in *Theoria Motus Corporum Coeleſtium* docuimus.

22.

De caſu omnium ſimpliciſſimo, ſimul vero frequentiſſimo, vbi vnica incognita adeſt, atque $V = x$, $V' = x$, $V'' = x$ etc., paucis ſeorſim agere conueniet. Erit ſcilicet $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., et proin

$$\xi = (p + p' + p'' + \text{ etc.})\, x - (pL + p'L' + p''L'' + \text{ etc.})$$

Hinc porro

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p + p' + p'' + \text{ etc.}}$$

$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{ etc.}}{p + p' + p'' + \text{ etc.}}$$

Si itaque e pluribus obſeruationibus inaequali praeciſione gaudentibus, et quarum pondera reſp. ſunt p, p', p'' etc., valor eiusdem quantitatis inuentus eſt e prima $= L$, e ſecunda $= L'$, e tertia $= L''$ etc., huius valor maxime plauſibilis erit

$$= \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{ etc.}}{p + p' + p'' + \text{ etc.}}$$

pondusque huius determinationis $= p + p' + p''$ etc. Si omnes obſeruationes aequali praeciſione gaudent, valor maxime plauſibilis erit

$$= \frac{L + L' + L'' + \text{ etc.}}{\pi}$$

i. e. aequalis medio arithmetico valorum obſeruatorum, huiusque determinationis pondus $= \pi$, accepto pondere obſeruationum pro vnitate.