## Werk

**Titel:** Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gotti
**Verlag:** Dieterich
**Jahr:** 1828
**Kollektion:** Wissenschaftsgeschichte
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN35283028X_0006_2NS
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN35283028X_0006_2NS

**LOG Id:** LOG_0036
**LOG Titel:** Commentationes classis mathematicae
**LOG Typ:** section

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN35283028X
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN35283028X

## Terms and Conditions



## Contact

# COMMENTATIONES

SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARUM GOTTINGENSIS

RECENTIORES

# CLASSIS MATHEMATICAE

TOM. VI.

# LEX MARIOTTI EX PRINCIPIIS THEORETICIS DEDUCTA

## PRAELECTIO PHYSICA

IN CONSESSU SOC. REG. SCIENT. DIE XXVI. JUNII MDCCCXXIV RECITATA

A

JO. TOBIA MAYER.

### §. I.

Exhibeo Vobis, Auditores, disquisitiones quasdam super legem illam celebrem *Mariotti*, via experimentali primum erutam, quatenus illam quoque theoretice, ex conceptibus sanioribus physicorum nostrae aetatis circa causam elasticitatis fluidorum aeriformium, deriuari posse putem.

Notissima sunt experimenta a celeberrimis Naturae scrutatoribus *Boyle* et *Mariotte* circa compressionem aëris primum instituta, posteaque ab aliis repetita, quibus edocti sumus, intra illos saltim limites, intra quos illa experimenta capta sunt, *densitatem aeris compressi esse in ratione vis comprimentis*, eadem manente temperatura. Vnde haec propositio in libris physicorum quoque traditur sub titulo *legis Mariotti*.

## §. II

Limites dictos, ob difficultatem et amplitudinem apparatus, ad eiusmodi experimenta necessarii, et ob varias cautelas in mensurandis exacte voluminibus aëris compressi, casu praesertim, quo iam in spatium admodum paruum redactus esset, hactenus vix ultra vim comprimentem octuplam circiter illius, qua aër in statu naturali prope superficiem terrae a pondere atmosphaerae incumbentis compressus est, licuit extendere. Idem valet de limitibus intra quos rarefactio aëris, imminuta vi premente, adhuc satis accurate licuit obseruari.

Intra hos vero limites lex supra dicta, quod scilicet densitas aëris compressi exacte sit proportionalis vi comprimenti, sat accurate sese comprobauit.

## §. III.

Sunt quidem aliqui, quibus haec lex adeo intra limites memoratos iam sensibiliter a veritate aberrare sit visa e. gr. *Sulzero a*) in cuius experimentis vi comprimenti septuplae circiter illius, qua aër sub initio compressus erat, iam densitas octupla respondere sit deprehensa, ita vt, crescente pressione, densitas aëris (quod vix probabile videtur) in proportione adeo maiori, quam secundnm illam vis comprimentis augeri videatur.

Sed his experimentis alia possunt opponi in quibus nulla eiusmodi aberratio sensibilis sese manifestabat. Ita *Winklerus b*) legem Mariotti sub pressione octupla adhuc veram esse inuenit.

---

*a*) Mem. de l'Acad. de Berlin. ann. 1753.

*b*) Untersuchungen der Natur und Kunst v. Ioh. Heinr. Winkler. Prof. d. Phys. zu Leipzig. 1765. §. 41. etc.

## §. IV.

Vix opus est, ut moneam, in eiusmodi experimentis aërem admodum siccum esse adhibendum.

Nam si aëris quaedam portio vaporibus aqueis mixta est, comprimendo illam, hi vapores decomponuntur, et spatium, quod occupabant, aëri compresso cedunt. Unde non mirum est, si hoc casu aër compressus minus spatium, quam iuxta regulam Mariotti, occupare, adeoque maiorem densitatem indicare videatur, quam si prorsus siccus fuisset adhibitus.

Idem valet in experimentis circa rarefactionem aëris, quando vi comprimenti, minori quam antea, exponitur.

Dum eiusmodi portio aëris dilatatur, particulae aquosae, quibus semper plus minusue mixta est, in vapores mutantur, qui proprium suum spatium occupant, quo facto aër tunc maius spatium, quam si siccus fuisset, occupare videbitur.

Minime igitur mirabimur, si experimenta eiusmodi a diuersis obseruatoribus instituta, haud inter se congruere sint deprehensa.

Praetereo multas alias cautelas in huiusmodi experimentis obseruandas, cum proxime ad huius praelectionis scopum haud pertineant. Adhibitis vero debitis cautelis, vix dubito, legem Mariotti extra illos quoque limites compressionis et dilatationis, quam intra quos experimenta adhuc satis accurate licuit instituere, nos fore inuenturos comprobatam.

Atque id simul ex eo mihi videtur colligi posse, quod nisi vbiuis in atmosphaera nostra densitas aëris foret in ratione pressionis columnae aëris incumbentis, sub eadem temperie, refractiones astronomicae iuxta hanc hypothesin computatae non tam egregie cum obseruatis congruere possent, quam, exceptis causis turbantibus prope horizontem, reuera cum illis consentiunt.

## §. V.

Densitas aëris, aucta vi comprimente, crescit quidem, sed facile patet, casu, quo particulas aëris sub magna pressione ad mutuum earum contactum peruenisse fingamus, de ulteriore eius compressione, adeoque et de lege Mariotti non amplius sermonem esse posse.

In isto enim contactu molecularum aëris non amplius haberemus fluidum aëreum, sed potius solidum seu saltim liquidum, cuius particulae pressioni vlteriori vix adhuc cederent, nouum quasi corpus, cuius densitas per eiusmodi vim mechanicam vix adhuc ulterius augmentum caperet, velut id de omnibus corporibus rigidis ac liquidis nouimus.

Quem valorem haec densitas aëris maxima haberet, nescimus quidem. Forsan illa ad minimum aequeretur densitati aquae, sed ante quam aëris quaedam portio nondum ad hanc densitatem maximam peruenit, semper cogitari potest, illam adhuc ulterius comprimi posse, et quidem iuxta legem Mariotti, hanc vero legem eo momento cessaturam esse, immo ne quidem de ea amplius sermonem esse posse, quam primum aër formam suam aëream seu discretam perdiderit et in nouum quasi corpus transierit.

## §. VI.

Nonnulli quidem physici opinati sunt, aëris compressionem iam sequi debere aliam legem, quam illam Mariotti, quam primum aër maximae suae densitati duntaxat sese appropinguarit, functionemque adeo inter vim comprimentem et densitatem ita debere esse comparatam, ut in magnis compressionibus densitas in minori proportione crescat, quam vis comprimens. Verum hae aliaeque opiniones nullis nituntur solidis argumentis, et haud raro deductae sunt ex falsis conceptibus, quos circa causam ipsam elasticitatis fluidorum aëriformium sibi formarunt physici.

Ita *Eulerus* c) sibi finxerat, aërem constare ex vesiculis admodum paruis, in quarum cauitatibus materia quaedam subtilis aetherea sit inclusa, quae magna celeritate vortices seu gyros in illis peragat, unde vis centrifuga nascatur, quae pressioni externae resistens elasticitatem aëris efficiat. Vt vero compressio in minus spatium fieri possit, hanc hypothesin addit, vt in centro harum vesicularum spatium vacuum detur, quod decrescat, quo maior sit vis comprimens, quae in aërem adeoque eius vesiculas agat.

---

c) L. *Euleri* tentamen explicationis phaenomenorum aëris. Comment. Petrop. Tom. II. p. 437. etc.

Haec formula Euleriana sequens est. Sit densitas naturalis aëris prope superficiem terrae = G, et densitas maxima, quam aër per compressionem aliquam nancisci posset = q. G (vbi q igitur numerum aliquem magnum denotet). Densitas aeris minus compressi sit = m G. His positis Eulerus inuenit, elasticitatem aëris naturalis sub densitate dicta G, esse ad elasticitatem aëris cuius densitas est m . G vti

$$1 : \frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}}$$

vbi tunc illae elasticitates simul repraesentant vires comprimentes, ita, vt si pressio atmosphaerae, sub qua densitas aëris est = G exprimatur per altitudinem columnae mercurialis = k, vis comprimens hunc aërem, ut nanciscatur densitatem m . G foret

$$K = \frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{(q-1)^2}} \cdot k.$$

Casu quo m est paruum respectu ipsius q, per approximationem facile reperitur

$$K = mk + \frac{m\,(m-1)}{q}\,k$$

ergo si numerus m non magnus sit, erit prope

$$K = mk$$

legi Mariottianae consentaneum.

Ex hisce conceptibus, e Schola Cartesiana desumtis, Eulerus formulam quidem deduxit, quae omnino ita est comparata, vt in compressionibus non admodum magnis fere consentiat cum lege Mariotti. Sed in magnis compressionibus ab illa multum discrepat.

Ita similiter *Alembertius* ex conceptibus quibusdam, a natura elateris corporum firmorum, vti videtur, desumtis, et in aërem, tanquam fluidum elasticum translatis, formam functionis secundum quam aëris densitas a vi comprimente pendere possit, deriuare annisus est. Interim Alembertius ipse confitetur, infinite multas dari posse functiones, quae conditionibus illis generalibus, quae inter vim illam comprimentem et densitatem aëris iuxta naturam elaterum, locum habere possent, satisfaciant, atque ita adhuc valde licet dubitari, an functio illa, cui prae aliis ob formam suam simplicem, palmam tribuit, veram relationem inter densitatem aëris et vim comprimentem exhibeat. Revera quoque haec functio ita est comparata, vt iuxta illam lex, secundum quam densitas aëris a superficie terrae versus loca elevatiora decresceret, nimis aberraret ab illa, qua in mensurandis altitudinibus ope barometri, et in computu refractionum astronomicarum vti solemus *d*).

Similiter

---

*d*) Iuxta formulam Alembertianam relatio inter vim comprimentem $= y$ et densitatem aëris, seu spatium $= u$ in quod aër compressus est (hoc spatio $u$ existente in ratione inuersa illius densitatis) sequenti aequatione exprimitur

$$y = \frac{(a-u)^2}{a^2} + \frac{(a-u)^2}{au}$$

vbi sub littera $a$ quantitas quaedam constans est intelligenda. *d'Alembert* traité de l'équilibre et du mouuement des Fluides. a Paris 1744. pag. 64.

Similiter quoque Hypothesis *Dan. Bernoulli* ad legem Mariotti deducendam in vsum vocata, quod scilicet elasticitas aëris in motu quodam continuo et rapidissimo particularum eius iuxta omines directiones consistat, nostra aetate tam parum placebit physcis, quam theoria illa vorticum Cartesianorum, qua vsus erat *Eulerus*, nisi simul indigitentur vires, quae ad eiusmodi motus producendos necessario requiruntur.

Qui vortices seu gyros materiae cuiusdam subtilis ad haec vel illa naturae phaenomena explicanda in vsum vocant, ad duas saltim vires, velut in quocunque motu curuilineo, recurrere debent. Sed quaenam sint hae vires et unde nascantur, haud debet esse obscurum, nisi tota explicatio prō fictitia sit habenda. Idem quoque valet e. gr. de vorticibus seu gyris, quibus phaenomena Electromagnetismi explicare tentarunt aliqui physicorum. Possibile immo forsan probabile est, vortices seu gyros quosdam partes suas agere in hisce phaenomenis. Sed hactenus non nisi alterutram illarum virium potui eruere, unde motus ille curuilineus deduci posset.

## §. VII.

Quod ad Elasticitatem aëris similiumque fluidorum aëriformium spectat, nostris temporibus saltim causam eius proximam nouimus, scilicet quod haec elasticitas non nisi vi expansiuae caloris, cum particulis ponderabilibus eiusmodi fluidorum coniuncti, sit adscribenda.

Reuera quoque hunc calorem ex istis fluidis rursus expelli, seu, vt dicitur, in statum liberum redire obseruamus, quam primum illa formam suam elasticam vel nimia quadam compressione perdunt, vel quoque his vel illis processibus chemicis, vt dici solet, decomponuntur, ita vt particulae eorum ponderabiles, quae antea per vim caloris certis quibusdam interuallis a se inuicem distare cogebantur, adeoque fluidum discretum, vt dici solet, constituebant, iam ad ipsum contactum mutuum peruenire, seu quoque aliis corporibus sese iungere possint.

Ita cognitum est, comprimendo vapores elasticos aquae, calorem, qui antea in illis latebat, a vinculis suis liberari, vaporesque ipsos in aquam liquidam mutari.

Similiter aëris atmosphaerici quaedam portio in igniario pneumatico subito compressa, tantam quantitatem caloris emittit, vt in illo fomitem, lanam, et complura alia corpora ignem capere videamus. Verum vt aër per eiusmodi compressionem forma sua elastica prorsus destitui possit, vis comprimens seu mechanica admodum magna esset adhibenda. Quaedam fluida aëriformia minorem vim comprimentem requirunt, quemadmodum patet ex experimentis cl. *Biot*, quibus iam per solam compressionem mixtum aliquod, ex Gas hydrogenio et oxygenio factum, decomposuit et in aquam vertit, similiterque et gas ammoniacale aliaque in formam liquidam transiisse scimus, ita, vt fluida aëriformia non nisi pro vaporibus modo magis permanentibus seu vi cuidam comprimenti resistentibus, sint habenda, omnia vero sine dubio per compressionem satis validam forma sua elastica priuarentur.

Multo facilius hoc fit, si vires chemicae agunt, quibus particulae ponderabiles eiusmodi fluidorum aliis corporibus sese iungere coguntur, quo casu semper calorem sese manifestare videmus, velut in oxydationibus phosphori, sulphuris, aliorumque corporum, in quibus pars ponderabilis gas oxygenii, in aëre atmosphaerico contenti, illis corporibus chemice sese iungit, adeoque hoc gas ipsum decomponitur, quo casu calor eius specificus, qui antea erat in statu latenti, subito erumpit, sensus nostros afficit, et in thermometra vim suam expansiuam exserit.

## §. VIII.

Interim fluida elastica seu aëriformia formam suam expansivam quoque perdere possunt, si ipso suo calore latenti, seu per refrigerationem seu quoque per actiones chemicas priuantur.

Sicut enim e. gr. vapores aquosae rursus in formam liquidam reuertunt, si debito gradui frigoris exponuntur, quo casu calor in hisce vaporibus latens, et vi sua expansiua non prorsus destitutus, in medium ambiens frigidius transit, ita admodum probabile est, omnia quoque fluida aeriformia decompositionem fore perpessura, si medio cuidam absolute frigido h. e. ab omni calore libero destituto, exponi possent.

Sed nouimus, omnes adhucusque cognitos gradus frigoris artificialis longe adhuc distare a puncto initiali absoluto scalae thermometricae verae, h. e. illo, qui omni absentiae caloris responderet, a *puncto illo infimo* vti dicitur Caloris, de quo scimus, illud ad minimum cadere in gradum $215^{\text{mum}}$ subter punctum congelationis in scala Reaumuriana.

Praeter hanc vero decompositionem fluidorum aëriformium per refrigerationem, fieri potest, vt et forma sua elastica priuarentur, adeoque decomponerentur, casu, quo forsan calor in illis latens, per actionem chemicam seu attractionem in alia corpora transire possit, ita vt particulas ponderabiles horum fluidorum deserere cogatur, velut id in initio Cap. XI. Compendii mei physices iam monui.

Eiusmodi decompositionem iam diu in vaporibus Naphtae et Spiritus Vini rectificatissimi obseruavit Ill. *Davy*, cum ipsis filum tenue ex Platina confectum (antea quidem paululum calefactum) obtulisset. Hoc filum viuide in illis incipit candescere, et dum hoc fit, vapores ipsi decomponuntur, haud vero ita, vt particulae eorum ponderabiles chemice se cum illo filo coniungant, sed potius, vt hoc filum illis vaporibus ipsis partem suam imponderabilem, caloricum scilicet, rapere videatur, per quam deinceps incandescere incipit, et tam diu candet, quam illis vaporibus expositum est.

Interim quoque nobis cogitare possumus, quod in hoc phaenomeno accidat, quod multis aliis casibus fieri videmus, si duo quaedam corpora sibi miscentur, seu vtcunque in mutuum aliquem conflictum seu contactum veniunt, nimirum vt Summa eorum Capacitatum pro Calorico, in hoc conflictu minor euadat, quam ante hunc conflictum, adeoque pars quaedam Caloris, quae antea latebat, libertatem nanciscatur. Per eiusmodi igitur Calorem in filum transiens candescentia eius effici potest, dum vapores ipsi, quantitate quadam caloris sui specifici hoc modo orbati, et partim decompositi (vnde foetor ille quem spargunt) in medium ambiens euolant. Non necesse est, vt corpora in eiusmodi conflictum posita, reuera sibi inuicem chemice iungant, vt calor sensibilis nascatur, sicut neminem fore existimo, qui casu, quo mixtionem aliquam aquae cum acido sulphurico calefieri videmus, has binas substantias chemice sibi inuicem iunxisse putaret, velut contra id accidit quando e. gr. oxygenium aëris sese cum phosphoro iungit. Mixtio enim illa non nisi mechanica est; particulae aquae et acidi sese quidem attrahunt, sed haec attractio non tam valida est, vt in hac mixtione acidum sulphuris caractere suo aciditatis quasi orbetur. Verum per hanc illarum mutuam attractionem Capacitas mixti pro calore, minor euadit summa capacitatum aquae et acidi sulphuris pro calore, antequam miscebantur. Hinc origo caloris illius sensibilis, qui sese in mixto manifestat, atque ita similiter, quando filum platinae vaporibus dictis exponitur.

Simile quid nuper obseruauit *Cl. Döbereiner*, cum puluerem quendam admodum subtilem ex Platina confectum, nulla praecedente calefactione, torrenti cuidam satis viuido Gas hydrogenii sub accessu aëris atmosphaerici exposuisset. In hoc conflictu puluis ille sponte incipiebat excandescere et particulae ponderabiles gas hydrogenii cum oxygenio aëris atmosphaerici in aquam conuertebantur.

Vix mihi necessarium videtur, ad aliam huius phaenomeni explicationem confugere, quam ad illam simplicissimam modo expositam. Nam reuera Platinae puluis neque cum hydrogenio neque cum oxygenio gas illorum connubium chemicum facit, vt, sicut in combustionibus ordinariis, calor cum hisce materiis in statu eorum aeriformi coniunctus, liber euadat, atque sic pulueris illius candescentiam efficiat (Prorsus sicut in Galuanismo per solum contactum duorum metallorum, absque omni processu mutuo quodam chemico quo particulae quaedam horum metallorum sibi inuicem iungerent, fluidum electricum e statu latenti erumpere videmus). Nil aliud fieri videtur, nisi vt ille puluis in conflictu seu contactu suo cum illis fluidis aëreis eodem modo calefiat, quam supra id filum platinae. Saltim candescentia huius pulueris in initio conflictus dicti hoc modo videtur effici. Si vero ille puluis semel incanduit, per illum quoque vicissim temperatura gas hydrogenii porro aduehentis ita potest eleuari, vt dein hoc gas more quoque solito cum gas oxygenio atmosphaerico comburere, et aquam gignere possit, quo casu tunc calor illorum latens, libertatem nactus, tam puluerem illum ulterius candefacit, quam quoque in medium ambiens euolat. Si illud metallum in particulas admodum exiguas est diuisum, eo facilius quoque in eum gradum excandescere potest, vt dein illa decompositio gas dictorum more quoque sueto consequi possit.

## §. IX.

Hac aliaque multa phaenomena satis peruulgata haud dubie simplicissimam illam explicationem admittunt, si calorem ipsum nobis fingamus tanquam aliquid materiale, quod vario modo ab aliis materiis attractionem patiatur, atque sic modo in statu libero, modo in latenti existat, legibusque adfinitatis certo quodam respectu obediat.

Vix enim illa phaenomena compluraque alia comprehendimus, si calorem aliquid immateriale, seu quoque duntaxat motum aliquem peculiarem in particulis corporum esse statuamus, qui motus ceterum, quomodo in perpetuo harum particularum ad se inuicem attritu, ita se conseruare possit, ut corpora nos ambientia nunquam ad eum gradum frigoris absoluti, de quo supra (§. VIII.) dixi, adeoque iuxta hanc theoriam numquam ad eam quietem perfectam in particulis eorundem, qua eiusmodi frigus absolutum consisteret, peruenire possint, vix licet perspici, ni ad alias rursus fictiones auxiliares lubeat confugere.

## §. X.

Ad legem igitur compressionis fluidorum aëriformium Mariottianam penitius considerandam, mihi quoque licebit, hanc materialitatem caloris in subsidium vocare, et ex proprietatibus huius materiae, ab omnibus fere physicis nostrae aetatis ipsi attributis, ostendere, illam legem extra illos quoque terminos, quam intra quos hactenus experimenta institui licuit, valituram esse h. e. quam diu eiusmodi fluida per adhibitam compressionem forma sua aëriformi seu expansiua non destitui ponamus.

## §. XI.

Primum igitur accedo sententiae illorum, qui materialitati caloris favent, hanc materiam caloris, seu caloricum, vti plerumque vocari solet, pro fluido quodam subtilissimo esse habendum, ita vt particulas huius calorici fere vt puncta mathematica considerasse lubeat, velut simile quid de lumine statui solet, quando illud iuxta systema emanationis consideramus. Fuerunt physici, qui calorem ipsum non nisi pro modificatione quadam luminis habuerint.

Quaenam foret densitas huius calorici in statu eius prorsus libro, forsan in spatio mundano uniuersali, nequimus definire. Sed absque dubio in spatio quodam, vbi nullis viribus attractiuis ad alia corpora sollicitaretur, admodum exiguae densitatis nobis illud cogitare debemus.

Verum hoc subtile fluidum ob adfinitatem seu attractionem eius ad alias materias, vario modo sese cum hisce coniungere potest, ita, vt in illis corporibus a quibus fortius attrahitur, et in quibus maior datur copia interstitiorum, quae ipsi accessum concedunt, in maiori quantitate et densitate coarceruetur, quam in aliis, ad quae minorem quasi adfinitatem habet.

Ita iam diu inter physicos haec varia capacitas corporum pro recipiendo calorico inter res facti est relata, atque notissima sunt illa experimenta *Cranfordii* aliorumque, quibus adeo determinarint, in quanam proportione haec vel illa corpora, vel sub eodem volumine vel sub eadem massa, maiorem vel minorem quantitatem calorici contineant, quod caloricum cum eiusmodi corporibus per attractionem (seu si velimus adfinitatem) *coniunctum*, calorem quoque relatiuum, specificum seu latentem appellare solent.

## §. XII.

In hoc statu latenti caloricum semper adhuc aliquam vim in maius spatium sese expandendi, et rursus ad densitatem suam naturalem perueniendi exserit, ita vt per illam attractionem versus particulas corporum, duntaxat vis eius expansiua seu tensio vti dicitur, modificata esse videatur, quae tensio aequilibrium tenere debet cum calorico medii ambientis, nisi corpus aliquod reuera rursus aliqua parte calorici sui specifici seu latentis priuatum iri velimus.

Ita e. gr. scimus, aquam parte aliqua caloris sui specifici iterum orbari, et in corpus solidum seu glaciem abire, quando aëri satis frigido exponitur, h. e. aëri in quo tensio calorici non amplius aequilibrium tenet calori illi specifico aquae. In corporibus fluidis, in quibus caloricum maiori vi attractionis retinetur, maius duntaxat requiritur frigus externum, seu diminutio maior tensionis in calorico medii ambientis, vt in corpora solida transeant.

## §. XIII.

An caloricum in corporibus per attractionem ita possit figi, vt vi sua expansiua prorsus destitueretur, quo casu et in medio absolute frigido cum hisce corporibus coniunctum maneret, haud lieat determinari. Calorem eiusmodi proprio sensu fixum apellare liceret. Considerare eum tunc possemus tanquam partem constitutiuam ipsam eiusmodi corporum.

## §. XIV.

Porro iuxta experimenta Cl. *Pictet* aliorumque nullum fere dubium est, Caloricum, dum e corpore quodam emanat, sicut lumen sese mouere iuxta lineas rectas, h. e. pro fluido quodam radiante esse habendum, licet, sicut in lumine, causa proxima huius radiationis nobis prorsus sit incognita. Illa tanquam res facti est consideranda. Si de caloris vi expansiua loquimur, cui forte haec radiatio adscribenda esset, phaenomenon ipsum non multo clarius fit, nisi modum agendi vis dictae simul definiamus.

## §. XV.

Iuxta haec principia igitur quoduis punctum in superficie corporis cuiusdam nobis repraesentare possumus tanquam punctum radians Caloricum, velut in superficie corporis lucidi nobis puncta innumerabilia lucem radiantia cogitare solemus.

Ob subtilitatem materiae radiantis hosce radios sub imagine linearum rectarum nobis concipere licet.

Si non nisi unicum eiusmodi punctum radians consideremus, ab omnibus aliis quasi isolatum, caloricum hoc punctum ambiens, et per attractionem, quae similiter iuxta lineas rectas agit, ad illud allicitum, per innumerabiles rectas, ex hoc puncto quasi ex centro sphaerae exeuntes, repraesentare licet. Omne scilicet caloricum propter eius nisum seu vim radiandi h. e. iuxta dictas lineas rectas emanandi, hanc dispositionem iuxta eiusmodi lineas retinere debet, etsi et per attractionem versus illud punctum urgeatur, reueraque protinus iuxta eiusmodi rectas in medium ambiens euolaret, si per vim expansiuam seu tensionem caloris in hoc medio distributi, id fieri posse statuamus.

Hisce

## §. XVI.

Hisce iam positis claram habemus ideam, sub qua forma nobis particulam quandam aëris, seu similis fluidi aëriformis, repraesentare debemus.

Consideramus scilicet eiusmodi particulam tanquam punctum aliquod materiale, calorico ita circumdatum, vt particulae infinite paruae fluidi huius subtilissimi circa illud punctum aëreum iuxta lineas rectas ab hoc puncto exeuntes quasi sint dispositae, et duntaxat propter attractionem rectilinearem versus illud punctum, et propter tensionem calorici in medio ambiente in hoc statu radiationis, vt ita dicam, quietae, detinentur, protinus autem maiori vel minori celeritate iuxta has ipsas rectas, emanarent, quam primum illam attractionem et impedimenta a tensione caloris medii ambientis pendentia, sublata esse cogitemus-

## §. XVII.

Cogitare igitur nobis possumus totam sphaeram calorici, quae eiusmodi particulam aëris ponderabilem sub forma radiationis dictae et per causas memoratas duntaxat limitatae, circumdaret, habebimusque simul ideam calorici specifici seu latentis, quo eiusmodi particula aëris, seorsim quasi cogitata, foret praedita.

Fluidum illud subtilissimum, quale est caloricum, quod praeter vim suam expansiuam simul et nisum radiandi habet, reuera circa aliquod punctum materiale non prius in statu quietis et aequilibrii existere potest (atque in hoc statu nobis cogitare debemus calorem specificum eiusmodi puncti) quam casu, quo hoc caloricum ipsum iuxta lineas rectas in directione huius radiationis seu vis illius per quam efficitur, circa hoc punctum coaceruatum et dispositum sit.

Huic calorico specifico ipsa elasticitas seu vis expansiua est adscribenda, qua nunc eiusmodi particulam aëris praeditam esse dicimus.

Ubiuis scilicet intra hanc sphaeram dictum caloricum ipsum cuiuis vi sese opponit, quae formam, secundum quam intra hanc sphaeram iuxta lineas rectas distributum est, mutare vellet, h. e. in qualibet distantia ab illa particula aëris, caloricum vim expansiuam seu tensionem exerit, quae a densitate eius in illa distantia et a vi attractionis, qua ibi ad illam particulam aëris urgetur, pendebit.

Omne caloricum prorsus liberum, quod illi specifico seu latenti forsan adhuc interpositum esset posset, ad hanc tensionem calorici specifici nil confert, et duntaxat in considerationem venit, quando tota quaedam portio aëris spatio quodam inclusa est, ubi tunc hanc portionem sicut omnia corpora in maius spatium extendere nititur.

## §. XVIII.

Iuxta haec principia operam dedi hanc tensionem calorici circa particulam quandam aëris ponderabilem distributi, intra totam eius sphaeram actiuitatis h. e. in qualibet eius distantia a dicta aëris particula determinandi, atque inueni, hanc tensionem Calorici esse in ratione simplici inuersa illius distantiae, ex qua propositione dein lex ipsa *Mariotti* sponte deducitur, vti in sequenti problemate vlterius patebit.

## §. XIX.

*Problema.*

Sit M (Fig. 1.) particula quaedam ponderabilis aëris nostri atmosphaerici (seu similis fluidi elastici) seorsim considerata vt supra (XVI.), et circumdata calore suo specifico.

a b c d repraesentet superficiem sphaerae ex Centro ipsius M descriptae, intra quam totum illud caloricum contineatur, et iuxta radios huius sphaerae distributum sit (§. XVI etc.). In distantia $M\alpha$ cogitemus aliam superficiem sphaericam $\alpha\beta\gamma\delta$ priori parallelam, quaeritur tensio caloris in hac superficie.

*Solutio.* 1. Si omne caloricum circa particulam M in statu perfectae quietis et aequilibrii esse ponitur, vis expansiua seu tensio eius in superficie $\alpha\beta\gamma\delta$ pressioni calorici ambientis intra superficies $\alpha\beta\gamma\delta$ et abcd comprehensi, et per attractionem eius versus M, ad hoc punctum quasi grauitantis, aequilibrium tenere debet.

2. Sit haec pressio $= p$, et vis illa expansiua seu tensio calorici in hac superficie $\alpha\beta\gamma\delta = t$, habebimusque primum $t = p$.

3. Eadem vi $t = p$ haec superficies reactionem elasticam quoque contra quamcunque aliam vim comprimentem exsereret, quam loco illius pressionis p cogitare lubeat, seu potius, dum caloricum intra hanc superficiem $\alpha\beta\gamma\delta$ contentum sese expandere nititur, vi illi comprimenti sese opponit, et si haec vis seu quoque illa pressio p demta cogitetur, reuera sese expanderet. (XII).

4. Si vis illa maior esset illa t siue p, pars quaedam calorici ex sphaera $\alpha\beta\gamma\delta$ expelli deberet, usque dum vi illi comprimenti e. gr. in superficie sphaerae minori quodam radio descriptae, tensio calorici sese opponat, cum qua illa vis rursus aequilibrium teneret.

5. Ita ad tensionem calorici in superficie $\alpha\beta\gamma\delta$ eruendam, necesse est, vt illam pressionem p inuestigemus, cum qua aequilibrium teneret.

6. Cognita hac pressione p, pars quaedam aliquota superficiei $\alpha\beta\gamma\delta$, e. gr. pars $\frac{1}{m}$ eius, pressionem $\frac{1}{m}$ p sustinebit, et similiter reaget vi $\frac{1}{m}$ t, ita vt vbiuis in illa superficie pressio et reactio elastica sibi inuicem aequentur.

7. In quanam igitur ratione illa pressio p penderet a distantia $M\alpha$, in eadem ratione quoque tensio calorici vbiuis in superficie dicta ab illa distantia $M\alpha$ pendere est censenda.

8. Ad illam pressionem p eruendam sit $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ superficies

sphaerica priori $\alpha\beta\gamma\delta$ parallela et infinite parum ab illa distans, ita, vt ponendo distantiam $M\alpha = x$, spatiolum $\alpha\alpha'$ sit $= dx$.

9. Decrescente ita valore x suo differentiali $dx$, crescet pressio calorici super superficiem $\alpha\beta\gamma\delta$ siue valor ipsius p differentiali suo $dp$ h. e. pressio in superficiem $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ foret $= p + dp$.

10. Clarum est hocce $dp$ aequiualiturum esse ponderi quasi calorici, quod inter dictas superficies infinite sibi propinguas comprehensum esset, et quod caloricum, vti diximus, attractionem seu grauitationem versus M perpetitur, sine qua nulla eiusmodi accumulatio calorici circa punctum aliquod materiale M, quam calorem eius specificum appellauimus, dari posset.

11. Sit superficies $\alpha\beta\gamma\delta = s$, eritque volumen inter illas superficies (8. 10) contentum $= s\,dx$.

12. Quodsi igitur densitatem calorici circa M accumulati in distantia $M\alpha = x$ a centro ipsius M, h. e. densitatem calorici in superficie $\alpha\beta\gamma\delta$ vocemus $= \vartheta$, erit massa seu quantitas calorici in spatiolo seu volumine $s\,dx$ contenta $= \vartheta s\,dx$, ponendo densitatem calorici in distantia quadam pro vnitate assumta $= 1$.

13, Cum quaeuis attractio seu grauitas quae iuxta lineas rectas agit, decrescat in ratione inuersa quadrati distantiae, illa quantitas Calorici $\vartheta s\,dx$ versus M grauitabit seu pondus habebit $= \frac{\alpha\vartheta s\,dx}{x^2}$, ponendo attractionem seu grauitationem in distantia supra (12) pro vnitate assumta $= \alpha$.

14. Erit igitur, cum p crescat decrescente x, vt facile patet (9. 10)

$$dp = -\frac{\alpha\vartheta s\,dx}{x^2}$$

15. iam uero est superficies sphaerica s in ratione quadrati semidiametri eius x h. e- in ratione ipsius $x^2$, seu ponendo superficiem sphaericam in distantia pro vnitate assumta (12) $= S$ erit $s = S.x^2$.

16. Porro sit densitas Calorici in illa distantia pro unitate assumta $= D$; eritque, cum densitas calorici circa punctum M ob (XVI) decrescere debeat in ratione inuersa quadrati distantiae x (prorsus ut densitas luminis e puncto quodam iuxta lineas rectas emanantis)

$$\vartheta = \frac{D}{x^2}$$

17. Substituendo igitur hosce valores (15. 16) in aequationem (14) nanciscimur simpliciter

$$d\,p = -\frac{\alpha S.D}{x^2}\,dx$$

adeoque integrando

$$p = \frac{\alpha S.D}{x} + \text{Const.}$$

18. Cum in distantia admodum magna a Centro particulae M sine dubio nullum caloricum sit, quod versus M adhuc sensibiliter grauitet, casu quo distantia x esset admodum magna, si velimus infinita, debebit esse $p = o$. Vnde valor constantis C erit quoque $= o$, adeoque duntaxat

$$p = \frac{\alpha . S . D}{x}$$

h. e. pressio calorici in superficiem $\alpha\beta\gamma\delta$ (5) erit in ratione inversa distantiae x.

19. Adeoque et tensio calorici in distantia $M\alpha = x$ a Centro particulae M erit in ratione inuersa ipsius x. (6. 7)

20. Si igitur haec tensio in distantia pro vnitate assumta (12) esset $= T$, erit tensio in distantia x, seu

$$t = \frac{T}{x}$$

vbi igitur T est quantitas constans pro particulis vnius eiusdemque fluidi aëriformis, pro quibus omnibus et quantitates $\alpha$, S, D haud dubie eaedem sunt.

## §. XX.

*Corollarium.*

1. Sint iam in (Fig. 2) M, N duae eiusmodi particulae aëris, quae per pressionem aliquam externam vsque ad distantiam mutuam $MN = 2x$ sibi appropinquare sint coactae.

2. Hoc casu pars illa calorici, quo vltra distantias aequales $M\alpha = N\alpha = x = \frac{1}{2} MN$ circumdatae erant, per illam pressionem euasisse est cogitanda, ita vt quaeuis particula non nisi id caloricum retinuerit, quam quo per attractionem suam vsque ad hanc distantiam $M\alpha = N\alpha = x$ iam antea quasi erat saturata, dum omne caloricum, quod hunc statum saturationis excederet, illi pressioni obedire et aufugere debeat. In quouis igitur puncto distantiae $M\alpha$ seu $N\alpha$ caloricum eam habebit tensionem, quam ibi habebat, antequam illa pressio accedebat.

3. Ceteroquin in medio ipsius MN h. e. in puncto $\alpha$ (vbi caloricum inter binas particulas M, N aequalem habet tensionem, et vbi hae tensiones coniunctim quoque sese vi comprimenti opponunt) eam nobis cogitare debemus reactionem elasticam caloris, per quam vi illi comprimenti aequilibrium, tenetur. Nam si in $\alpha$ tensio caloris minor esset vi comprimente, per hanc vim illae particulae M, N adhuc magis sibi appropinquare cogerentur; et si maior esset, rursus a se inuicem recederent, seu potius nequidem vsque ad illam distantiam MN sese appropinquare potuissent. Quare etiam tensionem caloris in $\alpha$ cum vi quadam repulsiua comparare liceret, quae vi illi comprimenti sese opponeret, et per quam hae particulae M, N a se mutuo recedere nituntur.

4. Dum igitur hae particulae per vim illam prementem quasi sint in statu coacto, ita vt per elasticitatem seu tensionem calorici in distantiis $M\alpha = N\alpha$ illi vi resistant, et aequilibrium teneant, facile patet, vim prementem eo maiorem requiri, quo magis illae particulae M, N sibi inuicem appropinquare debeant, cum tensio

caloris apud $\alpha$ in medio distantiae MN, illi vi sese opponens, inventa sit esse in ratione inuersa distantiae $M\alpha = N\alpha' = x$.

Ex hisce iam deducitur

*Lex Mariotti.*

## §. XXI.

1. Sit scilicet e. gr. iam vas aliquod prismaticum ABEF (Fig. 3.) aëre repletum, qui per vim $= P$, in embolum CD agentem (cui vi et pressio Atmosphaerae est adnumeranda) in spatium ABCD sit compressus, atque nullum est dubium, intra hoc spatium ABCD densitatem aëris esse vniformem h. e. particulas aëris vbiuis in iisdem a se inuicem distantiis esse dispositas, quemadmodum id per punctula in hoc spatio designata circiter indigitauimus.

2. Sint iam $\gamma$, $\beta$ in recta mn ipsi CD perpendiculari duae quaedam eiusmodi particulae aëris, de quibus igitur id valebit quod supra (XX) de particulis M et N demonstrauimus, nimirum tensionem caloris inter illas, vi comprimenti sese opponentem, et cum illa aequilibrantem, esse in ratione inuersa dimidiae distantiae $\gamma\beta$, adeoque et in ratione huius distantiae $\gamma\beta$ ipsius.

3. Eadem tensio in duas quascunque alias particulas aëris valebit.

4. Quodsi igitur inter tota illa altitudine mn distantia illa $\gamma\beta = 2x$ contenta sit m vicibus, ita vt illa altitudo $mn = H$ sit $= m \cdot 2x$, habebimus $x = \frac{H}{2m}$, eritque tensio caloris inter quascunque binas particulas aëris $= \frac{T}{x} = \frac{2mT}{H}$. (§. XIX. 19. 20).

5. Adeoque illae parti totius vis comprimentis P, quae in particulas aëris in recta mn dispositas agit, aequilibrium tenetur per tensionem caloris $= \frac{2mT}{H}$, quae vbiuis inter duas eiusmodi particulas eadem est.

6. Quodsi igitur per totum spatium prismaticum ABCD dentur $\mu$ eiusmodi series particularum, vti mn vnam repraesentat, totae vi comprimenti P aequilibrium tenetur per tensionem $\frac{2\,m\,\mu\,T}{H}$, h. e. habebimus

$$P = \frac{2\,m\,\mu\,T}{H}$$

7. Facile patet, si distantia $\gamma\beta$ in tota altitudine mn siue H comprehensa sit m vicibus, hunc numerum m simul indicare, quot particulae aëris in recta mn sint contentae, si vnicam particulam apud CD vel AB haud in computum ducamus, quod absque errore sensibili fieri potest.

8. Productum $m\,\mu$ in formula (6) exprimet igitur summam omnium particularum aëris in spatio prismatico ABCD comprehensarum, adeoque totam massam ponderabilem aëris hoc spatium replentis.

9. Haec massa aërea est in ratione ponderis eiusdem, quod vocemus $= Q$; Eritque igitur $m.\mu$ in ratione ipsius Q

10. Ponere igitur possumus

$$P = \frac{2\,Q.T}{H}$$

11. Si iam alia vis $= \mathfrak{P}$ in embolum CD agens hanc massam aëris $= Q$ comprimat in spatium cuius altitudo esset $= \mathfrak{H}$, habebimus similiter

$$\mathfrak{P} = \frac{2\,Q\,.\,T}{\mathfrak{H}}$$

(Si scilicet sub compressione $\mathfrak{P}$ in altitudine $\mathfrak{H}$ iam contentae essent $m'$ particulae aëris, ob massam aëris $= Q$, necessario tot series eiusmodi particularum in Volumine aëreo altitudinis $\mathfrak{H}$ iam contentae esse debent, quot vnitates contineret quotiens $\mu' = \frac{Q}{m}$ vnde rursus $Q = m'\mu'$, vti supra $Q = m\mu$).

12.

12. Valor ipsius T pro particulis vnius eiusdemque fluidi aëriformis, vt supra (§. XIX. 20) monui, constans est.

13. Habemus igitur

$$P : \mathfrak{P} = \frac{Q}{H} : \frac{Q}{\mathfrak{H}}$$

14. Si in (9) massa aëris $= Q$ volumen prismaticum super basi AB occupat cuius altitudo est $= H$, in (11) vero eadem massa aëris $= Q$ super eadem basi AB, volumen prismaticum altitudinis $= \mathfrak{H}$ implet, hae altitudines $H$, $\mathfrak{H}$ sunt in ratione ipsorum dictorum voluminum, quae per litteras V et $\mathfrak{V}$ designemus.

Habebimus igitur

$$P : \mathfrak{P} = \frac{Q}{V} : \frac{Q}{\mathfrak{V}}$$

15. Verum pondus aëris $= Q$ diuisum per volumen V quod occupat, densitatem seu grauitatem specificam eius designat.

Quotiens $\frac{Q}{V}$ igitur exprimit densitatem aëris per vim P in volumen V compressi, similiterque $\frac{Q}{\mathfrak{V}}$ densitatem huius massae aëreae si per vim $\mathfrak{P}$ in volumen $\mathfrak{V}$ est compressa. Si igitur hasce densitates vocemus D et $\mathfrak{D}$, nanciscimur *legem Mariotti* nimirum

$$P : \mathfrak{P} = D : \mathfrak{D}$$

quae igitur pro quacunque pressione sub qua aëris particulae ponderabiles nondum ad ipsum mutuum contactum perueniunt (§. X.) vera esse debet.

## §. XXII.

In omnibus hisce conclusionibus unam eandemque temperaturam voluminibus aëris V, $\mathfrak{V}$ inesse, tacite supposuimus. Hae temperaturae non pendent a Calorico illo specifico, seu latenti, quem tanquam causam proximam elasticitatis aëris contemplati sumus.

Cum vero aër, praeter hunc calorem specificum et insignem quantitatem caloris liberi recipere possit, per cuius actionem particulae illius specifici magis a se inuicem remoueri videntur, necesse est, vt aëris quaedam portio per calorem liberum, velut omnia corpora, in maius spatium extendatur, adeoque et maior vis comprimens requiratur, vt in eodem spatio contineatur. Quare tunc aëri quoque maiorem elasticitatem specificam adscribere solemus, si temperaturae altiori, h. e. actioni caloris liberi magis intensi, expositus est. Lex igitur Mariotti non nisi sub aequali temperie aëris compressi valere potest.

Si temperaturae aëris, in Voluminibus V, $\mathfrak{V}$ contenti ponantur esse t et $\tau$ iuxta thermometrum Reaumurianum, vires P, $\mathfrak{P}$ non amplius a densitatibus D, $\mathfrak{D}$, sed quoque a functione quadam ipsarum t et $\tau$ pendebunt h. e. habebimus tunc

$$P : \mathfrak{P} = D \,.\, \varphi t : \mathfrak{D} \,.\, \varphi \tau$$

adeoque duntaxat pro $\varphi t = \varphi \tau$ seu pro $t = \tau$ esset

$$P : \mathfrak{P} = D : \mathfrak{D}$$

Quaenam sit forma functionis $\varphi t$ seu $\varphi \tau$, inprimis casu, quo aër Calori admodum intenso sit expositus, peculiarem disquisitionem postularet.

Interim experimenta docuerunt, pro vna eademque densitate h. e. ponendo $D = \mathfrak{D}$, pressiones P et $\mathfrak{P}$ (quas per columnas mercuriales seu eorum pondera plerumque mensurare solemus) esse proxime in ratione $1 + At : 1 + A\tau$, ita vt $1 + At$ et $1 + A\tau$ sint illae functiones, casu, quo illae temperaturae certos limites non excedunt.

Fieri igitur potest, vt extra hos limites functio $\varphi t$ forsan $= 1 + At + Bt^2 \ldots$ ponenda esset. Sed in temperiebus, non admodum ab illa aquae congelascentis distantibus, admodum prope est $\varphi t = 1 + At$, quemadmodum in libello meo (Ueber das Ausmessen der Wärme. Frankf. u. Leipzig 1786) iam ante quadraginta annos ostendi, ubi simul via experimentali pro valore coefficientis A fractionem $\frac{1}{213}$ reperi, si temperaturae t, $\tau$ iuxta thermometrum mercuriale Reaumurianum sumtae intelligantur, cum qua determinatione etiam experimenta recentiora exacte conueniunt

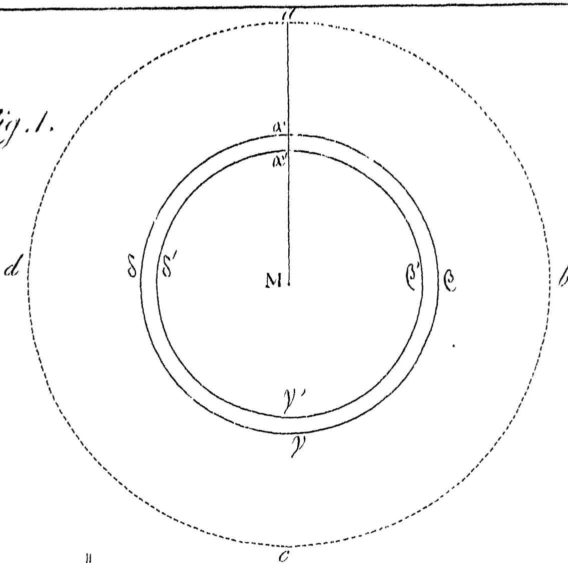
Erit igitur

$$P : \mathfrak{P} = D(1 + At) : \mathfrak{D}(1 + A\tau)$$

Ostendi simul in illo libro per argumenta theoretica hanc functionem

$\varphi t = 1 + A.t = 1 + \dfrac{t}{213}$ non modo pro aëre atmosphaerico, sed quoque pro omnibus fluidis aëriformibus intra dictos limites valituram esse, quod similiter patet ex experimentis recentioribus. In argumentis scilicet, quibus id pro aëre nostro atmosphaerico ostenderam, vbiuis duntaxat nomen alius cuiusdam fluidi aëriformis ponendum esset, sicut in hydrostatica, vbi de legibus aequilibrii fluidorum generaliter loquimur, plerumque duntaxat aquae nomine vti solemus, dum, quae pro hoc fluido liquido demonstrantur, similiter et aliis liquidis conuenire censemus.

Fig. 1.



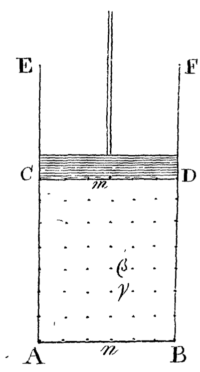




Fig. 3.

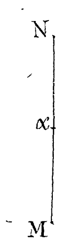



Fig. 2.

*Io. Tob. Mayer super legem Mariotti.*

# THEORIA RESIDUORUM BIQUADRATICORUM

AVCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

## COMMENTATIO PRIMA

SOCIETATI REGIAE TRADITA 1825, APR. 5.

### 1.

Theoria residuorum quadraticorum ad pauca theoremata fundamentalia reducitur, pulcherrimis Arithmeticae Sublimioris cimeliis adnumeranda, quae primo per inductionem facile detecta, ac dein multifariis modis ita demonstrata esse constat, vt nihil amplius desiderandum relictum sit.

Longe vero altioris indaginis est theoria residuorum cubicorum et biquadraticorum. Quam quum inde ab anno 1805 perscrutari coepissemus, praeter ea, quae quasi in limine sunt posita, nonnulla quidem theoremata specialia se obtulerunt, tum propter simplicitatem suam, tum propter demonstrationum difficultatem valde insignia: mox vero comperimus, principia Arithmeticae hactenus vsitata ad theoriam generalem stabiliendam neutiquam sufficere, quin potius hanc necessario postulare, vt campus Arithmeticae Sublimioris infinities quasi promoueatur, quod quomodo intelligendum sit, in continuatione harum disquisitionum clarissime elucebit. Quamprimum hunc campum nouum ingressi sumus, aditus ad cognitionem theorematum simplicissimorum totam theoriam exhaurientium per inductionem statim patuit: sed ipsorum demonstrationes tam profunde latuerunt, vt post multa demum tentamina irrita tandem in lucem protrahi potuerint.

Quum iam ad promulgationem harum lucubrationum accingamur, a theoria residuorum biquadraticorum initium faciemus, et quidem in hac prima commentatione disquisitiones eas explicabimus, quas iam cis campum Arithmeticae ampliatum absoluere licuit, quae illuc viam quasi sternunt, simulque theoriae diuisionis circuli quaedam noua incrementa adiungunt.

2.

Notionem residui biquadratici in *Disquisitionibus Arithmeticis* p. 113 introduximus: scilicet numerus integer $a$, positiuus seu negatiuus, integri $p$ residuum biquadraticum vocatur, si $a$ secundum modulum $p$ biquadrato congruus fieri potest, et perinde nonresiduum biquadraticum, si talis congruentia non exstat. In omnibus disquisitionibus sequentibus, vbi contrarium expressis verbis non monetur, modulum $p$ esse numerum primum (imparem positiuum) supponemus, atque $a$ per $p$ non diuisibilem, quum omnes casus reliqui ad hunc facillime reduci possint.

3.

Manifestum est, omne residuum biquadraticum numeri $p$ eiusdem quoque residuum quadraticum esse, et proin omne non-residuum quadraticum etiam non-residuum biquadraticum. Hanc propositionem etiam conuertere licet, quoties $p$ est numerus primus formae $4n+3$. Nam si in hoc casu $a$ est residuum quadraticum ipsius $p$, statuamus $a \equiv bb$ (mod. $p$), vbi $b$ vel residuum quadraticum ipsius $p$ erit vel non-residuum: in casu priori statuemus $b \equiv cc$, vnde $a \equiv c^4$, i. e. $a$ erit residuum biquadraticum ipsius $p$; in casu posteriori $-b$ fiet residuum quadraticum ipsius $p$ (quoniam $-1$ est non-residuum cuiusuis numeri primi formae $4n+3$), faciendoque $-b \equiv cc$, erit vt antea $a \equiv c^4$, atque $a$ residuum biquadraticum ipsius $p$. Simul facile perspicietur, alias solutiones congruentiae $x^4 \equiv a$ (mod. $p$), praeter has duas $x \equiv c$ et $x \equiv -c$ in hoc casu non dari. Quum hae propositiones obviae integram residuorum biquadraticorum theoriam pro modulis primis formae $4n+3$ exhauriant, tales modulos a disquisitione nostra omnino excludemus, siue hanc ad modulos primos formae $4n+1$ limitabimus.

## 4.

Existente itaque $p$ numero primo formae $4n+1$, propositionem art. praec. conuertere non licet: nempe exstare possunt residua quadratica, quae non sunt simul residua biquadratica, quod euenit, quoties residuum quadraticum congruum est quadrato non-residui quadratici. Statuendo enim $a \equiv bb$, existente $b$ non-residuo quadratico ipsius $p$, si congruentiae $x^4 \equiv a$ satisfieri posset, per valorem $x \equiv c$, foret $c^4 \equiv bb$, siue productum $(cc-b)(cc+b)$ per $p$ diuisibile, vnde $p$ vel factorem $cc-b$ vel alterum $cc+b$ metiri deberet, i.e. vel $+b$ vel $-b$ foret residuum quadraticum ipsius $p$, et proin vterque (quoniam $-1$ est residuum quadraticum), contra hyp:

Omnes itaque numeri integri per $p$ non diuisibiles in tres classes distribui possent, quarum prima contineat residua biquadratica, secunda non-residua biquadratica ea, quae simul sunt residua quadratica, tertia non-residua quadratica. Manifesto sufficit, tali classificationi solos numeros $1, 2, 3 \ldots p-1$ subiicere, quorum semissis ad classem tertiam reduceretur, dum altera semissis inter classem primam et secundam distribueretur.

## 5.

Sed praestabit, quatuor classes stabilire, quarum indoles ita se habeat.

Sit $A$ complexus omnium residuorum biquadraticorum ipsius $p$, inter 1 et $p-1$ (inclus.) sitorum, atque $e$ non-residuum quadraticum ipsius $p$ ad arbitrium electum. Sit porro $B$ complexus residuorum minimorum positiuorum e productis $eA$ secundum modulum $p$ oriundorum, et perinde $C$, $D$ resp. complexus residuorum minimorum positiuorum e productis $eeA$, $e^3A$ secundum modulum $p$ prodeuntium. His ita factis facile perspicitur, singulos numeros $B$ inter se diuersos fore, et perinde singulos $C$, nec non singulos $D$; cifram autem inter omnes hos numeros occurrere non posse. Porro patet, omnes numeros, in $A$ et $C$ contentos, esse residua quadratica ipsius $p$, omnes autem in $B$ et $D$ non-residua quadratica, ita vt certe complexus $A$, $C$ nullum numerum cum complexu $B$ vel $D$ communem habere possint. Sed etiam neque $A$ cum $C$, neque $B$ cum $D$ vllum numerum communem habere potest. Supponamus enim

I. numerum aliquem ex $A$, e.g. $a$ etiam in $C$ inueniri, vbi prodierit e producto $eea'$ ipsi congruo, existente $a'$ numero e complexu $A$. Statuatur $a \equiv \alpha^4$, $a' \equiv \alpha'^4$, accipiaturque integer $\Theta$ ita, vt fiat $\Theta\alpha' \equiv 1$. His ita factis erit

$$ee\alpha'^4 \equiv \alpha^4, \text{ adeoque multiplicando per } \Theta^4,$$

$$ee \equiv \alpha^4\,\Theta^4$$

i. e. $ee$ residuum biquadraticum, adeoque $e$ residuum quadraticum, contra hyp.

II. Perinde supponendo, aliquem numerum complexibus $B$, $D$ communem esse, atque e productis $ea$, $e^3a'$ prodiisse, existentibus $a$, $a'$ numeris e complexu $A$, e congruentia $ea \equiv e^3a'$ sequaeretur $a \equiv eed'$, adeoque haberetur numerus, qui e producto $eed'$ oriundus ad $C$ simulque ad $A$ pertineret, quod impossibile esse modo demonstrauimus.

Porro facile demonstratur, *omnia* residua quadratica ipsius $p$, inter 1 et $p-1$ incl. sita, necessario vel in $A$ vel in $C$, omniaque non-residua quadratica ipsius $p$ inter illos limites necessario vel in $B$ vel in $D$ occurrere debere. Nam

I. Omne tale residuum quadraticum, quod simul est residuum biquadraticum, per hyp. in $A$ inuenitur.

II. Residuum quadraticum $h$, (ipso $p$ minus), quod simul est non residuum biquadraticum, statuatur $\equiv gg$, vbi $g$ erit non-residuum quadraticum. Accipiatur integer $\gamma$ talis, vt fiat $e\gamma \equiv g$, eritque $\gamma$ residuum quadraticum ipsius $p$, quod statuemus $\equiv kk$. Hinc erit

$$h \equiv gg \equiv ee\gamma\gamma \equiv eek^4$$

Quare quum residuum minimum ipsius $k^4$ inueniatur in $A$, numerus $h$, quippe qui ex illius producto per $ee$ oritur, necessario in $C$ contentus erit.

III. Designante $h$ non-residuum quadraticum ipsius $p$ inter limites 1 et $p-1$, eruatur inter eosdem limites numerus integer $g$ talis, vt habeatur $eg \equiv h$. Erit itaque $g$ residuum quadraticum, et proin vel in $A$ vel in $C$ contentus: in casu priori $h$ manifesto inter numeros $B$, in posteriori autem inter numeros $D$ inuenietur.

Ex his omnibus colligitur, cunctos numeros $1, 2, 3 \ldots p-1$ inter quatuor series $A$, $B$, $C$, $D$ ita distribui, vt quiuis illorum in vna harum reperiatur, vnde singulae series $\frac{1}{4}(p-1)$ numeros continere debent. In hac classificatione classes $A$ et $C$ quidem numeros suos essentialiter possident, sed distinctio inter classes $B$ et $D$ eatenus arbitraria est, quatenus ab electione numeri $e$ pendet, qui ipse semper ad $B$ referendus est; quapropter si eius loco alius e classe $D$ adoptatur, classes $B$, $D$ inter se permutabuntur.

6.

Quum $-1$ sit residuum quadraticum ipsius $p$, statuamus, $-1 \equiv ff$ (mod. $p$), vnde quatuor radices congruentiae $x^4 \equiv 1$ erunt $1, f, -1, -f$. Quodsi itaque $a$ est residuum biquadraticum ipsius $p$, puta $\equiv \alpha^4$, quatuor radices congruentiae $x^4 \equiv a$ erunt $\alpha, f\alpha, -\alpha, -f\alpha$, quas inter se incongruas esse facile perspicitur. Hinc patet, si colligantur residua minima positiua biquadratorum $1, 16, 81, 256 \ldots (p-1)^4$, quaterna semper aequalia fore, ita vt $\frac{1}{4}(p-1)$ residua biquadratica diuersa habeantur complexum $A$ formantia. Si residua minima biquadratorum vsque ad $(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2})^4$ tantum colliguntur, singula bis aderunt.

7.

Productum duorum residuorum biquadraticorum manifesto est residuum biquadraticum, siue e multiplicatione duorum numerorum classis $A$ semper prodit productum, cuius residuum minimum positiuum ad eandem classem pertinet. Perinde producta numeri ex $B$ in numerum ex $D$, vel numeri ex $C$ in numerum ex $C$, habebunt residua sua minima in $A$.

In $B$ autem cadent residua productorum $A.B$ et $C.D$; in $C$ residua productorum $A.C$, $B.B$ et $D.D$; denique in $D$ residua productorum $A.D$ et $B.C$.

Demonstrationes tam obuiae sunt, vt sufficiat, vnam indicavisse. Sint e. g. $c$ et $d$ numeri ex $C$ et $D$, atque $c \equiv eea$, $d \equiv e^3 a'$, denotantibus $a$, $a'$ numeros ex $A$. Tunc $e^4 aa'$ erit residuum biquadraticum, i. e. ipsius residuum minimum ad $A$ referetur: quare quum productum $cd$ fiat $\equiv e.e^4 aa'$, illius residuum minimum in $B$ contentum erit.

Simul facile iam diiudicari potest, ad quamnam classem referendum sit productum e pluribus factoribus. Scilicet tribuendo classi $A$, $B$, $C$, $D$ resp. characterem $0, 1, 2, 3$, character producti vel aggregato characterum singulorum factorum aequalis erit, vel eius residuo minimo secundum modulum 4.

## 8.

Operae pretium visum est, hasce propositiones elementares absque adminiculo theoriae residuorum potestatum euoluere, qua in auxilium vocata omnia adhuc multo facilius demonstrare licet.

Sit $g$ radix primitiua pro modulo $p$, i. e. numerus talis, vt in serie potestatum $g$, $gg$, $g^3$ .... nulla ante hanc $g^{p-1}$ vnitati secundum modulum $p$ congrua euadat. Tunc residua minima positiua numerorum $1$, $g$, $gg$, $g^3$ .... $g^{p-2}$ praeter ordinem cum his $1, 2, 3 \ldots . p-1$ conuenient, et in quatuor classes sequenti modo distribuentur:

| ad | residua minima numerorum |
|---|---|
| $A$ | $1, g^4, g^8, g^{12} \ldots . g^{p-5}$ |
| $B$ | $g, g^5, g^9, g^{13} \ldots . g^{p-4}$ |
| $C$ | $gg, g^6, g^{10}, g^{14} \ldots . g^{p-3}$ |
| $D$ | $g^3, g^7, g^{11}, g^{15} \ldots . g^{p-2}$ |

Hinc omnes propositiones praecedentes sponte demanant.

Ceterum sicuti hic numeri $1, 2, 3 \ldots p-1$ in quatuor classes distributi sunt, quarum complexus per $A$, $B$, $C$, $D$ designamus, ita *quemuis* integrum per $p$ non diuisibilem, ad normam ipsius residui minimi secundum modulum $p$, alicui harum classium adnumerare licebit.

## 9.

Denotabimus per $f$ residuum minimum potestatis $g^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum modulum $p$, vnde quum fiat $ff \equiv g^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1$ (*Disquiss. Arithm.* p. 59), patet, characterem $f$ hic idem significare, quod in art. 6. Potestas $g^{\frac{1}{4}\lambda(p-1)}$ itaque, denotante $\lambda$ integrum positiuum, congrua erit secundum modulum $p$ numero $1, f, -1, -f$, prout $\lambda$ formae $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ resp., siue prout residuum minimum ipsius $g^\lambda$ in $A$, $B$, $C$, $D$ resp. reperitur. Hinc nanciscimur criterium persimplex ad diiudicandum, ad quam classem numerus datus $h$ per $p$ non diuisibilis referendus sit; pertinebit scilicet $h$ ad $A$, $B$, $C$ vel $D$, prout potestas $h^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum modulum $p$ numero $1$, $f$, $-1$ vel $-f$ congrua euadit.

Tamquam corollarium hinc sequitur, $-1$ semper ad classem $A$ referri, quoties $p$ sit formae $8n+1$, ad classem $C$ vero, quoties $p$ sit formae $8n+5$. Demonstratio huius theorematis a theoria residuorum potestatum independens ex iis, quae in *Disquisitionibus Arithmeticis* p. 114 docuimus, facile adornari potest.

## 10.

Quum *omnes* radices primitiuae pro modulo $p$ prodeant e residuis potestatum $g^\lambda$, accipiendo pro $\lambda$ omnes numeros ad $p-1$ primos, facile perspicitur, illas inter complexus $B$ et $D$ aequaliter dispertitas fore, basi $g$ semper in $B$ contenta. Quodsi loco numeri $g$ radix alia primitiua e complexu $B$ pro basi accipitur, classificatio eadem manebit; si vero radix primitiua e complexu $D$ tamquam basis adoptatur, classes $B$ et $D$ inter se permutabuntur.

Si classificatio criterio in art. praec. prolato superstruitur, discrimen inter classes $B$ et $D$ inde pendebit, vtram radicem congruentiae $xx \equiv -1$ (mod. $p$) pro numero characteristico $f$ adoptemus.

## 11.

Quo facilius disquisitiones subtiliores, quas iam aggressuri sumus, per exempla illustrari possint, constructionem classium pro omnibus modulis infra 100 hic apponimus. Radicem primitiuam pro singulis minimam adoptauimus.

$p = 5$

$g = 2,\ f = 2$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1 |
| $B$ | 2 |
| $C$ | 3 |
| $D$ | 4 |

$p = 13$

$g = 2,\ f = 8$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 3, 9 |
| $B$ | 2, 5, 6 |
| $C$ | 4, 10, 12 |
| $D$ | 7, 8, 11 |

$p = 17$

$g = 3,\ f = 13$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 4, 13, 16 |
| $B$ | 3, 5, 12, 14 |
| $C$ | 2, 8, 9, 15 |
| $D$ | 6, 7, 10, 11 |

$p = 29$

$g = 2,\ f = 12$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 7, 16, 20, 23, 24, 25 |
| $B$ | 2, 3, 11, 14, 17, 19, 21 |
| $C$ | 4, 5, 6, 9, 13, 22, 28 |
| $D$ | 8, 10, 12, 15, 18, 26, 27 |

$p = 37$

$g = 2,\ f = 31$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34 |
| $B$ | 2, 14, 15, 18, 20, 24, 29, 31, 32 |
| $C$ | 3, 4, 11, 21, 25, 27, 28, 30, 36 |
| $D$ | 5, 6, 8, 13, 17, 19, 22, 23, 35 |

$p = 41$

$g = 6,\ f = 32$

| | |
|---|---|
| A | 1, 4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40 |
| B | 6, 14, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 35 |
| C | 2, 5, 8, 9, 20, 21, 32, 33, 36, 39 |
| D | 3, 7, 11, 12, 13, 28, 29, 30, 34, 38 |

$p = 53$

$g = 2,\ f = 30$

| | |
|---|---|
| A | 1, 10, 13, 15, 16, 24, 28, 36, 42, 44, 46, 47, 49 |
| B | 2, 3, 19, 20, 26, 30, 31, 32, 35, 39, 41, 45, 48 |
| C | 4, 6, 7, 9, 11, 17, 25, 29, 37, 38, 40, 43, 52 |
| D | 5, 8, 12, 14, 18, 21, 22, 23, 27, 33, 34, 50, 51 |

$p = 61$

$g = 2,\ f = 11$

| | |
|---|---|
| A | 1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58 |
| B | 2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55 |
| C | 3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60 |
| D | 6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59 |

$p = 73$

$g = 5,\ f = 27$

| | |
|---|---|
| A | 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72 |
| B | 5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68 |
| C | 3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70 |
| D | 11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62 |

$p = 89$

$g = 3, \; f = 34$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 25, 32, 39, 44, 45, 50, 57, 64, 67, 73, 78, 81, 85, 87, 88 |
| $B$ | 3, 6, 7, 12, 14, 23, 24, 28, 33, 41, 43, 46, 48, 56, 61, 65, 66, 75, 77, 82, 83, 86 |
| $C$ | 5, 9, 10, 17, 18, 20, 21, 34, 36, 40, 42, 47, 49, 53, 55, 68, 69, 71, 72, 79, 80, 84 |
| $D$ | 13, 15, 19, 26, 27, 29, 30, 31, 35, 37, 38, 51, 52, 54, 58, 59, 60, 62, 63, 70, 74, 76 |

$p = 97$

$g = 5, \; f = 22$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 4, 6, 9, 16, 22, 24, 33, 35, 36, 43, 47, 50, 54, 61, 62, 64, 73, 75, 81, 88, 91, 93, 96 |
| $B$ | 5, 13, 14, 17, 19, 20, 21, 23, 29, 30, 41, 45, 52, 56, 67, 68, 74, 76, 77, 78, 80, 83, 84, 92 |
| $C$ | 2, 3, 8, 11, 12, 18, 25, 27, 31, 32, 44, 48, 49, 53, 65, 66, 70, 72, 79, 85, 86, 89, 94, 95 |
| $D$ | 7, 10, 15, 26, 28, 34, 37, 38, 39, 40, 42, 46, 51, 55, 57, 58, 59, 60, 63, 69, 71, 82, 87, 90 |

## 12.

Quum numerus 2 sit residuum quadraticum omnium numerorum primorum formae $8n+1$, non residuum vero omnium formae $8n+5$, pro modulis primis formae prioris 2 in classe $A$ vel $C$, pro modulis formae posterioris in classe $B$ vel $D$ inuenietur. Quum discrimen inter classes $B$ et $D$ non sit essentiale, quippe quod tantummodo ab electione numeri $f$ pendet, modulos formae $8n+5$ aliquantisper seponemus. Modulos formae $8n+1$ autem *inductioni* subiiciendo, inuenimus 2 pertinere ad $A$ pro $p = 73$, 89, 113, 233, 257, 281, 337, 353 etc.; contra 2 pertinere ad $C$ pro $p = 17$, 41, 97, 137, 193, 241, 313, 401, 409, 433, 449, 457 etc.

Ceterum quum pro modulo primo formae $8n+1$ numerus $-1$ sit residuum biquadraticum, patet, $-2$ semper cum $+2$ ad eandem classem referendum esse.

## 13.

Si exempla art. praec. inter se comparantur, primo saltem aspectu criterium nullum simplex se offerre videtur, per quod modulos priores a posterioribus dignoscere liceret. Nihilominus *duo* huiusmodi criteria dantur, elegantia et simplicitate perinsignia, ad quorum alterum considerationes sequentes viam sternent.

Modulus $p$, tamquam numerus primus formae $8n+1$, reduci poterit, et quidem vnico tantum modo, sub formam $aa+2bb$ (*Disquiss. Arithm.* p. 220); radices $a$, $b$ positiue accipi supponemus. Manifesto $a$ impar erit, $b$ vero par; statuemus autem $b = 2^\lambda c$, ita vt $c$ sit impar. Iam obseruamus

I. quum habeatur $p \equiv aa$ (mod. $c$) ipsum $p$ esse residuum quadraticum ipsius $c$, et proin etiam singulorum factorum primorum, in quos $c$ resoluitur: vicissim itaque, per theorema fundamentale, singuli hi factores primi erunt residua quadratica ipsius $p$, et proin etiam illorum productum $c$ erit residuum quadraticum ipsius $p$. Quod quum etiam de numero 2 valeat, patet, $b$ esse residuum quadraticum ipsius $p$, et proin $bb$, nec non $-bb$, residuum biquadraticum.

II. Hinc $-2bb$ ad eandem classem referri debet, in qua inuenitur numerus 2; quare quum $aa \equiv -2bb$, manifestum est, 2 vel in classe $A$, vel in classe $C$ inueniri, prout $a$ sit vel residuum quadraticum ipsius $p$, vel non-residuum qradraticum.

III. Iam supponamus, $a$ in factores suos primos resolutum esse, e quibus ii, qui sunt vel formae $8m+1$ vel $8m+7$, denotentur per $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc., ii vero, qui sunt vel formae $8m+3$ vel $8m+5$, per $\beta, \beta', \beta''$ etc.: posteriorum multitudo sit $= \mu$. Quoniam $p \equiv 2bb$ (mod. $a$), erit $p$ residuum quadraticum eorum factorum primorum ipsius $a$, quorum residuum quadraticum est 2, i. e. factorum $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc.; non-residuum quadraticum vero factorum eorum, quorum non-residuum quadraticum est 2, i. e. factorum $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ etc. Quocirca, vice versa, per theorema fundamentale, singuli $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc. erunt residua quadratica ipsius $p$, singuli $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ etc. autem non-residua quadratica. Ex his itaque concluditur, productum $a$ fore residuum quadraticum ipsius $p$, vel non-residuum, prout $\mu$ par sit vel impar.

IV. Sed facile confirmatur, productum omnium $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc. fieri formae $8m+1$ vel $8m+7$, idemque valere de producto omnium $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ etc., si horum multitudo fuerit par, ita vt in hoc casu etiam productum $a$ necessario fieri debeat formae $8m+1$ vel $8m+7$; contra productum omnium $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ etc., quoties ipsorum multitudo impar sit, fieri formae $8m+3$ vel $8m+5$, idemque adeo in hoc casu valere de producto $a$.

Ex his omnibus itaque colligitur theorema elegans:

*Quoties $a$ est formae $8m+1$ vel $8m+7$, numerus 2 in complexu $A$ contentus erit; quoties vero $a$ est formae $8m+3$ vel $8m+5$, numerus 2 in complexu $C$ inuenietur.*

Quod confirmatur per exempla in art. praec. enumerata; priores enim moduli ita discerpuntur: $73 = 1+2\cdot 36$, $89 = 81+2\cdot 4$, $113 = 81+2\cdot 16$, $233 = 225+2\cdot 4$, $257 = 225+2\cdot 16$, $281 = 81+2\cdot 100$, $337 = 49+2\cdot 144$, $353 = 225+2\cdot 64$; posteriores vero ita: $17 = 9+2\cdot 4$, $41 = 9+2\cdot 16$, $97 = 25+2\cdot 36$, $137 = 9+2\cdot 64$, $193 = 121+2\cdot 36$, $241 = 169+2\cdot 36$, $313 = 25+2\cdot 144$, $401 = 9+2\cdot 196$, $409 = 121+2\cdot 144$, $433 = 361+2\cdot 36$, $449 = 441+2\cdot 4$, $457 = 169+2\cdot 144$.

## 14.

Quum discerptio numeri $p$ in quadratum simplex et duplex nexum tam insignem cum classificatione numeri 2 prodiderit, operae pretium esse videtur tentare, num discerptio in duo quadrata, cui numerum $p$ aeque obnoxium esse constat, similem forte successum suppeditet. Ecce itaque discerptiones numerorum $p$, pro quibus 2 pertinet ad classem

| $A$ | $C$ |
|---|---|
| $9+64$ | $1+16$ |
| $25+64$ | $25+16$ |
| $49+64$ | $81+16$ |
| $169+64$ | $121+16$ |
| $1+256$ | $49+144$ |
| $25+256$ | $225+16$ |
| $81+256$ | $169+144$ |
| $289+64$ | $1+400$ |
| | $9+400$ |
| | $289+144$ |
| | $49+400$ |
| | $441+16$ |

Ante omnia obseruamus, duorum quadratorum, in quae $p$ discerpitur, alterum impar esse debere, quod statuemus $= aa$, alterum par, quod statuemus $= bb$. Quoniam $aa$ fit formae $8n+1$, patet, valoribus impariter paribus ipsius $b$ respondere valores ipsius $p$ formae $8n+5$, ab inductione nostra hic exclusos, quippe qui numerum 2 in classe $B$ vel $D$ haberent. Pro valoribus autem ipsius $p$, qui sunt formae $8n+1$, $b$ esse debet pariter par, et si inductioni, quam schema allatum ob oculos sistit, fidem habere licet, numerus 2 ad classem $A$ referendus erit pro omnibus modulis, pro quibus $b$ est formae $8n$, ad classem $C$ vero pro omnibus modulis, pro quibus $b$ est formae $8n+4$. Sed hoc theorema longe altioris indaginis est, quam id, quod in art. praec. eruimus, demonstrationique plures disquisitiones praeliminares sunt praemittendae, ordinem, quo numeri complexuum $A$, $B$, $C$, $D$ se inuicem sequuntur, spectantes.

15.

Designemus multitudinem numerorum e complexu $A$, quos immediate sequitur numerus e complexu $A$, $B$, $C$, $D$ resp., per (00), (01), (02), (03); perinde multitudinem numerorum e complexu $B$, quos sequitur numerus e complexu $A$, $B$, $C$, $D$ resp. per (10), (11), (12), (13); similiterque sint in complexu $C$ resp. (20), (21), (22), (23) numeri, in complexu $D$ vero (30), (31), (32), (33) numeri, quos sequitur numerus e complexu $A, B, C, D$. Proponimus nobis, has sedecim multitudines a priori determinare. Quo commodius lectores ratiocinia generalia cum exemplis comparare possint, valores numericos terminorum schematis ($S$)

(00), (01), (02), (03)
(10), (11), (12), (13)
(20), (21), (22), (23)
(30), (31), (32), (33)

pro singulis modulis, pro quibus classificationes in art. 11 tradidimus, hic adscribere visum est.

| | | |
|---|---|---|
| $p = 5$ | $p = 37$ | $p = 73$ |
| 0, 1, 0, 0 | 2, 1, 2, 4 | 5, 6, 4, 2 |
| 0, 0, 0, 1 | 2, 2, 4, 1 | 6, 2, 5, 5 |
| 0, 0, 0, 0 | 2, 2, 2, 2 | 4, 5, 4, 5 |
| 0, 0, 1, 0 | 2, 4, 1, 2 | 2, 5, 5, 6 |
| $p = 13$ | $p = 41$ | $p = 89$ |
| 0, 1, 2, 0 | 0, 4, 3, 2 | 3, 8, 6, 4 |
| 1, 1, 0, 1 | 4, 2, 2, 2 | 8, 4, 5, 5 |
| 0, 1, 0, 1 | 3, 2, 3, 2 | 6, 5, 6, 5 |
| 1, 0, 1, 1 | 2, 2, 2, 4 | 4, 5, 5, 8 |
| $p = 17$ | $p = 53$ | $p = 97$ |
| 0, 2, 1, 0 | 2, 3, 6, 2 | 2, 6, 7, 8 |
| 2, 0, 1, 1 | 4, 4, 2, 3 | 6, 8, 5, 5 |
| 1, 1, 1, 1 | 2, 4, 2, 4 | 7, 5, 7, 5 |
| 0, 1, 1, 2 | 4, 2, 3, 4 | 8, 5, 5, 6 |
| $p = 29$ | $p = 61$ | |
| 2, 3, 0, 2 | 4, 3, 2, 6 | |
| 1, 1, 2, 3 | 3, 3, 6, 3 | |
| 2, 1, 2, 1 | 4, 3, 4, 3 | |
| 1, 2, 3, 1 | 3, 6, 3, 3 | |

Quum moduli formae $8n+1$ et $8n+5$ diuerso modo se habeant, vtrosque scorsim tractare oportet: a prioribus initium faciemus.

## 16.

Character (00) indicat, quot modis diuersis aequationi $\alpha+1=\alpha'$ satisfieri possit, denotantibus $\alpha$, $\alpha'$ indefinite numeros e complexu $A$. Quum pro modulo formae $8n+1$, qualem hic subintelligimus, $\alpha'$ et $p-\alpha'$ ad eundem complexum pertineant, concinnius dicemus, (00) exprimere multitudinem modorum diuersorum, aequationi $1+\alpha+\alpha'=p$, satisfaciendi: manifesto huius aequationis vice etiam congruentia $1+\alpha+\alpha'\equiv 0$ (mod. $p$) fungi potest.

Perinde (01) indicat multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$ (mod. $p$); (02) multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\gamma\equiv 0$; (03) multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\delta\equiv 0$; (11) multitudinem solutionum congruentiae $1+\beta+\beta'\equiv 0$ etc., exprimendo indefinite per $\beta$ et $\beta'$ numeros e complexu $B$, per $\gamma$ numeros e complexu $C$, per $\delta$ numeros e complexu $D$. Hinc statim colligimus sex aequationes sequentes:

(01) = (10), (02) = (20), (03) = (30), (12) = (21), (13) = (31), (23) = (32).

E quauis solutione data congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$ demanat solutio congruentiae $1+\delta+\delta'\equiv 0$, accipiendo pro $\delta$ numerum inter limites $1 \ldots . p-1$ eum qui reddit $\beta\delta\equiv 1$ (qui manifesto erit e complexu $D$), et pro $\delta'$ residuum minimum positivum producti $\alpha\delta$ (quod itidem erit e complexu $D$); perinde patet regressus a solutione data congruentiae $1+\delta+\delta'\equiv 0$ ad solutionem congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$, si $\beta$ accipitur ita, vt fiat $\beta\delta\equiv 1$, simulque statuitur $\alpha\equiv\beta\delta'$. Hinc concludimus, vtramque congruentiam aequali solutionum multitudine gaudere, siue esse (01) = (33).

Simili modo e congruentia $1+\alpha+\gamma\equiv 0$ deducimus $\gamma'+\gamma''+1\equiv 0$, si $\gamma'$ accipitur e complexu $C$ ita vt fiat $\gamma\gamma'\equiv 1$, atque $\gamma''$ ex eodem complexu congruus producto $\alpha\gamma'$. Vnde facile colligimus, has duas congruentias aequalem solutionum multitudinem admittere, siue esse $(02)=(22)$.

Perinde e congruentia $1+\alpha+\delta\equiv 0$ deducimus $\beta+\beta'+1\equiv 0$, accipiendo $\beta$, $\beta'$ ita vt fiat $\beta\delta\equiv 1$, $\beta\alpha\equiv\beta'$, eritque adeo $(03)=(11)$.

Denique e congruentia $1+\beta+\gamma\equiv 0$ simili modo tum congruentiam $\delta+1+\beta'\equiv 0$, tum hanc $\gamma'+\delta'+1\equiv 0$ deriuamus, atque hinc concludimus $(12)=(13)=(23)$.

Nacti sumus itaque, inter sedecim incognitas nostras, vndecim aequationes, ita vt illae ad quinque reducantur, schemaque $S$ ita exhiberi possit:

$$\begin{matrix} h, & i, & k, & l \\ i, & l, & m, & m \\ k, & m, & k, & m \\ l, & m, & m, & i \end{matrix}$$

Facile vero tres nouae aequationes conditionales adiiciuntur. Quum enim quemuis numerum complexus $A$, excepto vltimo $p-1$, sequi debeat numerus ex aliquo complexuum $A$, $B$, $C$ vel $D$, habebimus

$$(00)+(01)+(02)+(03)=2n-1$$

et perinde

$$(10)+(11)+(12)+(13)=2n$$
$$(20)+(21)+(22)+(23)=2n$$
$$(30)+(31)+(32)+(33)=2n$$

In signis modo introductis tres primae aequationes suppeditant:

$$h+i+k+l=2n-1$$
$$i+l+2m=2n$$
$$k+m=n$$

Quarta cum secunda fit identica. Adiumento harum aequationum tres incognitarum eliminare licet, quo pacto omnes sedecim iam ad duas reductae sunt.

## 17.

Vt vero determinationem completam nanciscamur, inuestigare conueniet multitudinem solutionum congruentiae

$$1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

disignantibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ indefinite numeros e complexibus $A$, $B$, $C$. Manifesto valor $\alpha = p - 1$ non est admissibilis, quum fieri nequeat $\beta + \gamma \equiv 0$: substituendo itaque pro $\alpha$ deinceps valores reliquos, prodibunt $h$, $i$, $k$, $l$ valores ipsius $1 + \alpha$ ad $A$, $B$, $C$, $D$ resp. pertinentes. Pro quouis autem valore *dato* ipsius $1 + \alpha$ ad $A$ pertinente, puta pro $1 + \alpha = \alpha^\circ$, congruentia $\alpha^\circ + \beta + \gamma \equiv 0$ totidem solutiones admittet, quot congruentia $1 + \beta' + \gamma' \equiv 0$ (statuendo scilicet $\beta \equiv \alpha^\circ \beta'$, $\gamma \equiv \alpha^\circ \gamma'$), i. e. solutiones $(12) = m$. Perinde pro quouis valore dato ipsius $1 + \alpha$ ad $B$ pertinente, puta pro $1 + \alpha = \beta^\circ$, congruentia $\beta^\circ + \beta + \gamma \equiv 0$ totidem solutiones habebit, quot haec $1 + \alpha' + \beta' \equiv 0$ (scilicet statuendo $\beta \equiv \beta^\circ \alpha'$, $\gamma \equiv \beta^\circ \beta'$), i. e. solutiones $(01) = i$. Similiter pro quolibet valore dato ipsius $1 + \alpha$ ad $C$ pertinente, puta pro $1 + \alpha = \gamma^\circ$, congruentia $\gamma^\circ + \beta + \gamma \equiv 0$ totidem modis diuersis solui poterit, quot haec $1 + \delta + \alpha' \equiv 0$ (nempe statuendo $\beta \equiv \gamma^\circ \delta$, $\gamma \equiv \gamma^\circ \alpha'$), i. e. solutionum multitudo erit $(03) = l$. Denique pro quouis valore dato ipsius $1 + \alpha$ ad $D$ pertinente, puta pro $1 + \alpha = \delta^\circ$, congruentia $\delta^\circ + \beta + \gamma \equiv 0$ totidem solutiones habebit, quot haec $1 + \gamma' + \delta' \equiv 0$ (statuendo $\beta \equiv \delta^\circ \gamma'$, $\gamma \equiv \delta^\circ \delta'$), i. e. $(23) = m$ solutiones. Omnibus itaque collectis, patet, congruentiam $1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0$ admittere

$$hm + ii + kl + lm$$

solutiones diuersas.

Prorsus vero simili modo eruimus, si pro $\beta$ singuli deinceps numeri complexus $B$ substituantur, summam $1+\beta$ obtinere resp. (10), (11), (12), (13) siue $i$, $l$, $m$, $m$ valores ad $A$, $B$, $C$, $D$ pertinentes, et pro quouis valore *dato* ipsius $1+\beta$ ad hos complexus pertinente, congruentiam $1+\beta+\alpha+\gamma\equiv 0$ resp. (02), (31), (20), (13) siue $k$, $m$, $k$, $m$ solutiones diuersas admittere, ita vt multitudo omnium solutionum fiat

$$= ik + lm + km + mm$$

Ad eundem valorem perducimur, si euolutionem considerationi valorum summae $1+\gamma$ superstruimus.

## 18.

Ex hac duplici eiusdem multitudinis expressione nanciscimur aequationem:

$$0 = hm + ii + kl - ik - km - mm$$

atque hinc, eliminando $h$ adiumento aequationis $h = 2m - k - 1$,

$$0 = (k-m)^2 + ii + kl - ik - kk - m$$

Sed duae aequationes vltimae art. 16 suppeditant $k = \frac{1}{2}(l+i)$, quo valore substituto $ii + kl - ik - kk$ transit in $\frac{1}{4}(l-i)^2$, adeoque aequatio praecedens, per 4 multiplicata, in hanc

$$0 = 4(k-m)^2 + (l-i)^2 - 4m$$

Hinc, quoniam $4m = 2(k+m) - 2(k-m) = 2n - 2(k-m)$, sequitur

$$2n = 4(k-m)^2 + 2(k-m) + (l-i)^2$$

siue

$$8n+1 = (4(k-m)+1)^2 + 4(l-i)^2$$

Statuendo itaque

$$4(k-m) + 1 = a,\ 2l - 2i = b$$

habebimus

$$p = aa + bb$$

Sed constat, $p$ vnico tantum modo in duo quadrata discerpi posse, quorum alterum impar accipi debet pro $aa$, alterum par pro $bb$, ita vt $aa$, $bb$ sint numeri ex asse determinati. Sed etiam $a$ ipse erit numerus prorsus determinatus; radix enim quadrati positiue accipi debet, vel negatiue, prout radix positiua est formae $4M+1$ vel $4M+3$. De determinatione signi ipsius $b$ mox loquemur.

Iam combinatis his nouis aequationibus cum tribus vltimis art. 16, quinque numeri $h$, $i$, $k$, $l$, $m$ per $a$, $b$ et $n$ penitus determinantur sequenti modo:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - 3a - 5 \\ 8i &= 4n + a - 2b - 1 \\ 8k &= 4n + a - 1 \\ 8l &= 4n + a + 2b - 1 \\ 8m &= 4n - a + 1 \end{aligned}$$

Si loco ipsius $n$ modulum $p$ introducere malumus, schema $S$, singulis terminis ad euitandas fractiones per 16 multiplicatis, ita se habet:

$$\begin{array}{l|l|l|l} p-6a-11 & p+2a-4b-3 & p+2a-3 & p+2a+4b-3 \\ p+2a-4b-3 & p+2a+4b-3 & p-2a+1 & p-2a+1 \\ p+2a-3 & p-2a+1 & p+2a-3 & p-2a+1 \\ p+2a+4b-3 & p-2a+1 & p-2a+1 & p+2a-4b-3 \end{array}$$

## 19.

Superest, vt signum ipsi $b$ tribuendum assignare doceamus. Iam supra, art. 10, monuimus, distinctionem inter complexus $B$ et $D$, per se non essentialem, ab electione numeri $f$ pendere, pro quo alterutra radix congruentiae $xx \equiv -1$ accipi debet, illasque inter se permutari, si loco alterius radicis altera adoptetur. Iam quum inspectio schematis modo allati doceat, similem permutationem cum mutatione signi ipsius $b$ cohaerere, praeuidere licet, nexum inter signum ipsius $b$ atque numerum $f$ exstare debere. Quem vt cognoscamus, ante omnia obseruamus, si, denotante $\mu$ integrum non negatiuum, pro $z$ accipiantur omnes numeri $1, 2, 3 \ldots p-1$, fieri secundum modulum $p$, vel $\sum z^\mu \equiv 0$, vel

$\Sigma z^\mu \equiv -1$, prout $\mu$ vel non-diuisibilis sit per $p-1$, vel diuisibilis. Pars posterior theorematis inde patet, quod pro valore ipsius $\mu$ per $p-1$ diuisibili, habetur $z^\mu \equiv 1$: partem priorem vero ita demonstramus. Denotante $g$ radicem primitiuam, omnes $z$ conuenient cum residuis minimis omnium $g^y$, accipiendo pro $y$ omnes numeros $0, 1, 2, 3 \ldots p-2$, eritque adeo $\Sigma z^\mu \equiv \Sigma g^{\mu y}$. Sed fit

$$\Sigma g^{\mu y} = \frac{g^{\mu(p-1)}-1}{g^\mu - 1}, \text{ adeoque}$$

$$(g^\mu - 1)\,\Sigma z^\mu \equiv g^{\mu(p-1)} - 1 \equiv 0.$$

Hinc vero sequitur, quoniam pro valore ipsius $\mu$ per $p-1$ non-diuisibili $g^\mu$ ipsi 1 congruus siue $g^\mu - 1$ per $p$ diuisibilis esse nequit, $\Sigma z^\mu \equiv 0$. *Q. E. D.*

Iam si potestas $(z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum theorema binomiale euoluitur, per lemma praec. fiet

$$\Sigma (z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -2 \text{ (mod. } p)$$

Sed residua minima omnium $z^4$ exhibent omnes numeros $A$, quovis quater occurrente; habebimus itaque inter residua minima ipsius $z^4+1$

$4(00)$ ad $A$
$4(01)$ ad $B$
$4(02)$ ad $C$
$4(03)$ ad $D$

pertinentia, quatuorque erunt $=0$ (puta pro $z^4 \equiv p-1$). Hinc, considerando criteria complexuum $A$, $B$, $C$, $D$, deducimus

$$\Sigma(z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv 4(00)+4f(01)-4(02)-4f(03)$$

adeoque

$$-2 \equiv 4(00)+4f(01)-4(02)-4f(03)$$

siue substitutis pro (00), (01) etc. valoribus in art. praec. inuentis,

$$-2 \equiv -2a-2-2bf$$

Hinc itaque colligimus, semper fieri debere $a+bf \equiv 0$, siue, multiplicando per $f$,

$$b \equiv af$$

quae congruentia determinationi signi ipsius $b$, si numerus $f$ iam electus est, vel determinationi numeri $f$, si signum ipsius $b$ aliunde praescribitur, inseruit.

## 20.

Postquam problema nostrum pro modulis formae $8n+1$ complete soluimus, progredimur ad casum alterum, vbi $p$ est formae $8n+5$: quem eo breuius absoluere licebit, quod omnia ratiocinia parum a praecedentibus differunt.

Quum pro tali modulo $-1$ ad classem $C$ pertineat, complementa numerorum complexuum $A$, $B$, $C$, $D$ ad summam $p$, in classibus $C$, $D$, $A$, $B$ resp. contenta erunt. Hinc facile colligitur

| signum | denotare multitudinem solutionum congruentiae |
|---|---|
| (00) | $1+\alpha+\gamma\equiv 0$ |
| (01) | $1+\alpha+\delta\equiv 0$ |
| (02) | $1+\alpha+\alpha'\equiv 0$ |
| (03) | $1+\alpha+\beta\equiv 0$ |
| (10) | $1+\beta+\gamma\equiv 0$ |
| (11) | $1+\beta+\delta\equiv 0$ |
| (12) | $1+\beta+\alpha\equiv 0$ |
| (13) | $1+\beta+\beta'\equiv 0$ |
| (20) | $1+\gamma+\gamma'\equiv 0$ |
| (21) | $1+\gamma+\delta\equiv 0$ |
| (22) | $1+\gamma+\alpha\equiv 0$ |
| (23) | $1+\gamma+\beta\equiv 0$ |
| (30) | $1+\delta+\gamma\equiv 0$ |
| (31) | $1+\delta+\delta'\equiv 0$ |
| (32) | $1+\delta+\alpha\equiv 0$ |
| (33) | $1+\delta+\beta\equiv 0$ |

vnde

vnde statim habentur sex aequationes:

$(00) = (22)$, $(01) = (32)$, $(03) = (12)$, $(10) = (23)$, $(11) = (33)$, $(21) = (30)$.

Multiplicando congruentiam $1 + \alpha + \gamma \equiv 0$ per numerum $\gamma'$ e complexu $C$ ita electum, vt fiat $\gamma\gamma' \equiv 1$, accipiendoque pro $\gamma''$ residuum minimum producti $\alpha\gamma'$, quod manifesto quoque complexui $C$ adnumerandum erit, prodit $\gamma' + \gamma'' + 1 \equiv 0$, vnde colligimus $(00) = (20)$.

Prorsus simili modo habentur aequationes $(01) = (13)$, $(03) = (31)$, $(10) = (11) = (21)$.

Adiumento harum vndecim aequationum sedecim incognitas nostras ad quinque reducere, schemaque $S$ ita exhibere possumus:

$$\begin{array}{cccc} h, & i, & k, & l \\ m, & m, & l, & i \\ h, & m, & h, & m \\ m, & l, & i, & m \end{array}$$

Porro habemus aequationes

$$\begin{aligned} (00) + (01) + (02) + (03) &= 2n+1 \\ (10) + (11) + (12) + (13) &= 2n+1 \\ (20) + (21) + (22) + (23) &= 2n \\ (30) + (31) + (32) + (33) &= 2n+1 \end{aligned}$$

siue, adhibendo signa modo introducta, has tres (I):

$$\begin{aligned} h + i + k + l &= 2n+1 \\ 2m + i + l &= 2n+1 \\ h + m &= n \end{aligned}$$

quarum itaque adiumento incognitas nostras iam ad duas reducere licet.

Aequationes reliquas e consideratione multitudinis solutionum congruentiae $1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0$ deriuabimus (per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etiam hic indefinite numeros e complexibus $A$, $B$, $C$ resp. denotantes). Scilicet perpendendo *primo*, $1+\alpha$ praebere $h$, $i$, $k$, $l$ numeros resp. ad $A$, $B$, $C$, $D$ pertinentes, et pro quouis valore dato ipsius $\alpha$ in his quatuor casibus resp. haberi solutiones $m$, $l$, $i$, $m$, multitudo omnium solutionum erit

$$= hm + il + ik + lm$$

*Secundo* quum $1+\beta$ exhibeat $m$, $m$, $l$, $i$ numeros ad $A$, $B$, $C$, $D$ pertinentes, et pro quouis valore *dato* ipsius $\beta$ in his quatuor casibus exstent solutiones $h$, $m$, $h$, $m$, multitudo omnium solutionum erit

$$= hm + mm + hl + im$$

vnde deriuamus aequationem

$$0 = mm + hl + im - il - ik - lm$$

quae adiumento aequationis $k = 2m - h$, ex (I) petitae, transit in hanc:

$$0 = mm + hl + hi - il - im - lm$$

Iam ex aequationibus I habemus etiam $l + i = 1 + 2h$, vnde

$$2i = 1 + 2h + (i - l)$$
$$2l = 1 + 2h - (i - l)$$

Quibus valoribus in aequatione praecedente substitutis, prodit:

$$0 = 4mm - 4m - 1 - 8hm + 4hh + (i - l)^2$$

Quodsi tandem pro $4m$ hic substituimus $2(h+m) - 2(h-m)$ siue, propter aequationem vltimam in I, $2n - 2(h - m)$, obtinemus:

$$0 = 4(h-m)^2 - 2n + 2(h-m) - 1 + (i-l)^2$$

adeoque

$$8n + 5 = (4(h-m)+1)^2 + 4(i-l)^2$$

Statuendo itaque

$$4(h - m) + 1 = a,\ 2i - 2l = b$$

fiet

$$p = aa + bb.$$

Iam quum in hoc quoque casu $p$ vnico tantum modo in duo quadrata, par alterum, alterum impar, discerpi possit, $aa$ et $bb$ erunt numeri prorsus determinati; manifesto enim $aa$ quadrato impari, $bb$ pari aequalis statui debet. Praeterea *signum* ipsius $a$ ita erit stabiliendum, vt fiat $a \equiv 1$ (mod. 4), signumque ipsius $b$ ita, vt habeatur $b \equiv af$ (mod. $p$), vti per ratiocinia iis quibus in art. praec. vsi sumus prorsus similia facile demonstratur.

His praemissis quinque numeri $h$, $i$, $k$, $l$, $m$ per $a$, $b$ et $n$ ita determinantur:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n + a - 1 \\ 8i &= 4n + a + 2b + 3 \\ 8k &= 4n - 3a + 3 \\ 8l &= 4n + a - 2b + 3 \\ 8m &= 4n - a + 1 \end{aligned}$$

aut si expressiones per $p$ praeferimus, termini schematis $S$ per 16 multiplicati ita se habebunt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p+2a-7$ | $p+2a+4b+1$ | $p-6a+1$ | $p+2a-4b+1$ |
| $p-2a-3$ | $p-2a-3$ | $p+2a-4b+1$ | $p+2a+4b+1$ |
| $p+2a-7$ | $p-2a-3$ | $p+2a-7$ | $p-2a-3$ |
| $p-2a-3$ | $p+2a-4b+1$ | $p+2a+4b+1$ | $p-2a-3$ |

## 21.

Postquam problema nostrum soluimus, ad disquisitionem principalem reuertimur, determinationem completam complexus, ad quem numerus 2 pertinet, iam aggressuri.

I. Quoties $p$ est formae $8n+1$, iam constat, numerum 2 ve in complexu $A$ vel in complexu $C$ inueniri. In casu priori facil perspicitur, etiam numeros $\frac{1}{2}(p-1)$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $A$ pertinere, in posteriori vero ad $C$. Iam perpendamus, si $\alpha$ et $\alpha+1$ sint numeri contigui complexus $A$, etiam $p-\alpha-1$, $p-\alpha$ tales numeros esse, siue, quod idem est, numeros complexus $A$ tales, quos sequatur numerus ex eodem complexu, binos semper associatos esse, ($\alpha$ et $p-1-\alpha$). Talium itaque numerorum multitudo, (00), semper erit par, nisi quis exstat sibi ipse associatus, i.e. nisi $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $A$ pertinet, in quo casu multitudo illa impar erit. Hinc colligimus, (00) imparem esse, quoties 2 ad complexum $A$, parem vero, quoties 2 ad $C$ pertineat. Sed habemus

$$16(00) = aa + bb - 6a - 11$$

siue statuendo $a = 4q + 1$, $b = 4r$ (v. art. 14),

$$(00) = qq - q + rr - 1$$

Quoniam igitur $qq - q$ manifesto semper par est, (00) impar erit vel par, prout $r$ par est vel impar, adeoque 2 vel ad $A$ vel ad $C$ pertinebit, prout $b$ est vel formae $8m$ vel formae $8m+4$. Quod est ipsum theorema, in art. 14 per inductionem inuentum.

II. Sed etiam casum alterum, vbi $p$ est formae $8n+5$, aeque complete absoluere licet. Numerus 2 hic vel ad $B$, vel ad $D$ pertinet, perspiciturque facile, in casu priori $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $B$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $D$, in casu posteriori autem $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $D$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $B$ pertinere. Iam perpendamus, si $\beta$ sit numerus ex $B$ talis, quem sequatur numerus ex $D$, fore etiam numerum $p-\beta-1$ ex $B$ atque $p-\beta$ ex $D$, i. e. numeros illius proprietatis binos associatos semper adesse. Erit itaque illorum multitudo, (13), par, excepto casu, in quo vnus eorum sibi ipse associatus est, i. e. vbi $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $B$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $D$ pertinet; tunc scilicet (13) impar erit. Hinc colligimus, (13) parem esse, quoties 2 ad $D$, imparem vero, quoties 2 ad $B$ pertineat. Sed habemus

$$16(13) = aa + bb + 2a + 4b + 1$$

siue statuendo $a = 4q + 1$, $b = 4r + 2$,

$$(13) = qq + q + rr + 2r + 1$$

Erit itaque (13) impar, quoties $r$ par est; contra (13) par erit, quoties $r$ est impar: vnde colligimus, 2 pertinere ad $B$, quoties $b$ sit formae $8m + 2$, ad $D$ vero, quoties $b$ sit formae $8m + 6$.

Summa harum inuestigationum ita enunciari potest:

Numerus 2 pertinet ad complexum $A$, $B$, $C$ vel $D$, prout numerus $\frac{1}{2}b$ est formae $4m$, $4m + 1$, $4m + 2$ vel $4m + 3$.

## 22.

In Disquisitionibus Arithmeticis theoriam generalem diuisionis circuli, atque solutionis aequationis $x^p - 1 = 0$ explicauimus, interque alia docuimus, si $\mu$ sit diuisor numeri $p - 1$, functionem $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ in $\mu$ factores ordinis $\frac{p - 1}{\mu}$ resolui posse adiumento aequationis auxiliaris ordinis $\mu$. Praeter theoriam generalem huius resolutionis simul casus speciales, vbi $\mu = 2$ vel $\mu = 3$, in illo opere p. 356-358 seorsim considerauimus, aequationemque auxiliarem a priori assignare docuimus, i. e. absque euolutione schematis residuorum minimorum potestatum alicuius radicis primitiuae pro modulo $p$. Iam vel nobis non monentibus lectores attenti facile percipient nexum arctissimum casus proximi istius theoriae, puta pro $\mu = 4$, cum inuestigationibus hic in artt. 15-20 explicatis, quarum adiumento ille quoque sine difficultate complete absolui poterit. Sed hanc tractationem ad aliam occasionem nobis reseruamus, ideoque etiam in commentatione praesente disquisitionem in forma pure arithmetica perficere maluimus, theoria aequationis $x^p - 1 = 0$ nullo modo immixta. Contra coronidis loco adhuc quaedam alia theoremata noua pure arithmetica, cum argumento hactenus pertractato arctissime coniuncta, adiiciemus.

23.

Si potestas $(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$ secundum theorema binomiale euoluitur, tres termini aderunt, in quibus exponens ipsius $x$ per $p-1$ diuisibilis est, puta

$$x^{2(p-1)}, \quad Px^{(p-1)} \text{ atque } 1$$

denotando per $P$ coëfficientem medium

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{1}{2}(p-3)\cdot\frac{1}{2}(p-5)\ldots\ldots\frac{1}{4}(p+3)}{1\quad\cdot\quad 2\quad\cdot\quad 3\quad\ldots\ldots\frac{1}{4}(p-1)}$$

Substituendo itaque pro $x$ deinceps numeros $1, 2, 3 \ldots p-1$, obtinebimus per lemma art. 19

$$\Sigma\,(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -2-P.$$

At perpendendo ea quae in art. 19 exposuimus, insuperque, quod numeri complexuum $A$, $B$, $C$, $D$, ad potestatem exponentis $\frac{1}{2}(p-1)$ euecti congrui sunt, secundum modulum $p$, numeris $+1$, $-1$, $+1$, $-1$ resp., facile intelligitur fieri

$$\Sigma\,(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 4(00)-4(01)+4(02)-4(03)$$

adeoque per schemata in fine artt. 17, 19 tradita

$$\Sigma\,(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -2a-2$$

Comparatio horum duorum valorum suppeditat elegantissimum theorema: scilicet habemus

$$P \equiv 2a \pmod{p}.$$

Denotando quatuor producta

$$1, 2, 3 \ldots\ldots \tfrac{1}{4}(p-1)$$
$$\tfrac{1}{4}(p+3)\cdot\tfrac{1}{4}(p+7)\cdot\tfrac{1}{4}(p+11)\ldots\ldots\tfrac{1}{2}(p-1)$$
$$\tfrac{1}{2}(p+1)\cdot\tfrac{1}{2}(p+3)\cdot\tfrac{1}{2}(p+5)\ldots\ldots\tfrac{3}{4}(p-1)$$
$$\tfrac{1}{4}(3p+1)\cdot\tfrac{1}{4}(3p+5)\cdot\tfrac{1}{4}(3p+9)\ldots\ldots(p-1)$$

resp. per $q$, $r$, $s$, $t$, theorema praecedens ita exhibetur:

$$2a \equiv \frac{r}{q} \pmod{p}$$

Quum quilibet factorum ipsius $q$ complementum suum ad $p$ habeat in $t$, erit $q \equiv t \pmod{p}$, quoties multitudo factorum par est, i. e. quoties $p$ est formae $8n + 1$, contra $q \equiv -t$, quoties multitudo factorum impar est, siue $p$ formae $8n + 5$. Perinde in casu priori erit $r \equiv s$, in posteriori $r \equiv -s$. In vtroque casu erit $qr \equiv st$, et quum constet, haberi $qrst \equiv -1$, erit $qqrr \equiv -1$, adeoque $qr \equiv \pm f \pmod{p}$. Combinando hanc congruentiam cum theoremate modo inuento obtinemus $rr \equiv \pm 2af$, et proin, per artt. 19. 20

$$2b \equiv \pm rr \pmod{p}.$$

Valde memorabile est, discerptionem numeri $p$ in duo quadrata per operationes prorsus directas inueniri posse; scilicet radix quadrati imparis erit residuum absolute minimum ipsius $\frac{r}{2q}$, radix quadrati paris vero residuum absolute minimum ipsius $\frac{1}{2}rr$ secundum modulum $p$. Expressionem $\frac{r}{2q}$, cuius valor pro $p = 5$ fit $= 1$, pro valoribus maioribus ipsius $p$, ita quoque exhibere licet:

$$\frac{6.\ 10.\ 14.\ 18\ .\ .\ .\ .\ .\ (p-3)}{2.\ 3.\ 4\ \ 5.\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{1}{4}(p-1)}$$

Sed quum insuper nouerimus, quonam signo affecta prodeat ex hac formula radix quadrati imparis, eo scilicet, vt semper fiat formae $4m + 1$, attentione perdignum est, quod simile criterium generale respectu signi radicis quadrati paris hactenus inueniri non potuerit. Quale si quis inueniat, et nobiscum communicet, magnam de nobis gratiam feret. Interim hic adiungere visum est valores numerorum $a$, $b$, $f$, quales pro valoribus ipsius $p$ infra 200 e residuis minimis expressionum $\frac{r}{2q}$, $\frac{1}{2}rr$, $qr$ prodeunt.

| $p$ | $a$ | $b$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 5 | + 1 | + 2 | 2 |
| 13 | − 3 | − 2 | 5 |
| 17 | + 1 | − 4 | 13 |
| 29 | + 5 | + 2 | 12 |
| 37 | + 1 | − 6 | 31 |
| 41 | + 5 | + 4 | 9 |
| 53 | − 7 | − 2 | 23 |
| 61 | + 5 | − 6 | 11 |
| 73 | − 3 | − 8 | 27 |
| 89 | + 5 | − 8 | 34 |
| 97 | + 9 | + 4 | 22 |
| 101 | + 1 | − 10 | 91 |
| 109 | − 3 | + 10 | 33 |
| 113 | − 7 | + 8 | 15 |
| 137 | − 11 | + 4 | 37 |
| 149 | − 7 | − 10 | 44 |
| 157 | − 11 | − 6 | 129 |
| 173 | + 13 | + 2 | 80 |
| 181 | + 9 | + 10 | 162 |
| 193 | − 7 | + 12 | 81 |
| 197 | + 1 | − 14 | 183 |

# SUPPLEMENTUM THEORIAE COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

## ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE,

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

SOCIETATI REGIAE EXHIBITUM 1826, SEPT. 16.

### 1.

In tractatione theoriae combinationis obseruationum Volumini V Commentationum Recentiorum inserta supposuimus, quantitates eas, quarum valores per obseruationes praecisione absoluta non gaudentes propositi sunt, a certis elementis incognitis ita pendere, vt in forma functionum datarum horum elementorum exhibitae sint, reique cardinem in eo verti, vt haec elementa quam exactissime ex obseruationibus deriuentur.

In plerisque quidem casibus suppositio ista immediate locum habet. In aliis vero casibus problematis conditio paullo aliter se offert, ita vt primo aspectu dubium videatur, quonam pacto ad formam requisitam reduci possit. Haud raro scilicet accidit, vt quantitates eae, ad quas referuntur obseruationes, nondum exhibitae sint in forma functionum certorum elementorum, neque etiam ad talem formam reducibiles videantur, saltem non commode vel sine ambagibus: dum, ex altera parte, rei indoles quasdam conditiones suppeditat, quibus valores veri quantitatum obseruatarum exacte et necessario satisfacere debent.

Attamen, re propius considerata, facile perspicitur, hunc casum ab altero reuera essentialiter haud differre, sed ad eundem reduci posse. Designando scilicet multitudinem quantitatum obseruatarum per $\pi$, multitudinem aequationum conditionalium autem per $\sigma$, eligendoque e prioribus $\pi - \sigma$ ad lubitum, nihil impedit, quominus has ipsas pro elementis accipiamus, reliquasque, quarum multitudo erit $\sigma$, adiumento aequationum conditionalium tamquam functiones illarum consideremus, quo pacto res ad suppositionem nostram reducta erit.

Verum enim vero etiamsi haec via in permultis casibus satis commode ad finem propositum perducat, tamen negari non potest, eam minus genuinam, operaeque adeo pretium esse, problema in ista altera forma seorsim tractare, tantoque magis, quod solutionem perelegantem admittit. Quin adeo, quum haec solutio noua ad calculos expeditiores perducat, quam solutio problematis in statu priori, quoties $\sigma$ est minor quam $\frac{1}{2}\pi$, siue quod idem est, quoties multitudo elementorum in commentatione priori per $\rho$ denotata maior est quam $\frac{1}{2}\pi$, solutionem nouam, quam in commentatione praesente explicabimus, in tali casu praeferre conueniet priori, siquidem aequationes conditionales e problematis indole absque ambagibus depromere licet.

## 2.

Designemus per $v$, $v'$, $v''$ etc. quantitates, multitudine $\pi$, quarum valores per obseruationem innotescunt, pendeatque quantitas incognita ab illis tali modo, vt per functionem datam illarum, puta

$u$, exhibeatur: sint porro $l$, $l'$, $l''$ etc. valores quotientium differentialium

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v},\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v'},\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v''}\ \text{etc.}$$

valoribus veris quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc. respondentes. Quemadmodum igitur per substitutionem horum valorum verorum in functione $u$ huius valor verus prodit, ita, si pro $v$, $v'$, $v''$ etc. valores erroribus $e$, $e'$, $e''$ etc. resp. a veris discrepantes substituuntur, obtinebitur valor erroneus incognitae, cuius error statui potest

$$= le + l'e' + l''e'' + etc.$$

siquidem, quod semper supponemus, errores $e$, $e'$, $e''$ etc. tam exigui sunt, vt (pro functione $u$ non lineari) quadrata et producta negligere liceat. Et quamquam magnitudo errorum $e$, $e'$, $e''$ etc. incerta maneat, tamen incertitudinem tali incognitae determinationi inhaerentem generaliter aestimare licet, et quidem per errorem medium in tali determinatione metuendum, qui per principia commentationis prioris fit

$$= \sqrt{(llmm + l'l'm'm' + l''l''m''m'' + \text{etc.})}$$

denotantibus $m$, $m'$, $m''$ etc. errores medios obseruationum, aut si singulae obseruationes aequali incertitudini obnoxiae sunt,

$$= m\sqrt{(ll + l'l' + l''l'' + \text{etc.})}$$

Manifesto in hoc calculo pro $l$, $l'$, $l''$ etc. aequali iure etiam eos valores quotientium differentialium adoptare licebit, qui valoribus obseruatis quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc. respondent.

## 3.

Quoties quantitates $v$, $v'$, $v''$ etc. penitus inter se sunt independentes, incognita vnico tantum modo per illas determinari poterit: quamobrem tunc illam incertitudinem nullo modo nec euitare neque diminuere licet, et circa valorem incognitae ex obseruationibus deducendum nihil arbitrio relinquitur.

At longe secus se habet res, quoties inter quantitates $v$, $v'$, $v''$ etc. mutua dependentia intercedit, quam per $\sigma$ aequationes conditionales

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \text{ etc.}$$

exprimi supponemus, denotantibus $X$, $Y$, $Z$ etc. functiones datas indeterminatarum $v$, $v'$, $v''$ etc. In hoc casu incognitam nostram infinitis modis diuersis per combinationes quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc. determinare licet, quum manifesto loco functionis $u$ adoptari possit quaecunque alia $U$ ita comparata, vt $U - u$ indefinite euanescat, statuendo $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc.

In applicatione ad casum determinatum nulla quidem hinc prodiret differentia respectu valoris incognitae, si obseruationes absoluta praecisione gauderent: sed quatenus hae erroribus obnoxiae manent, manifesto in genere alia combinatio alium valorem incognitae afferet. Puta, loco erroris

$$le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

quem functio $u$ commiserat, iam habebimus

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{etc.}$$

si functionem $U$ adoptamus, atque valores quotientium differentialium $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v}$, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v'}$, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v''}$ etc. resp. per $L$, $L'$, $L''$ etc. denotamus. Et quamquam errores ipsos assignare nequeamus, tamen errores medios in diuersis obseruationum combinationibus metuendos inter se comparare licebit: optimaque combinatio ea erit, in qua hic error medius quam minimus euadit. Qui quum fiat

$$= \sqrt{(LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.})}$$

in id erit incumbendum, vt aggregatum $LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.}$ nanciscatur valorem minimum.

## 4.

Quum varietas infinita functionum $U$, quae secundum conditionem in art. praec. enunciatam ipsius $u$ vice fungi possunt, eatenus tantum hic consideranda veniat, quatenus diuersa systemata valorum coëfficientium $L$, $L'$, $L''$ etc. inde sequuntur, indagare oportebit ante omnia nexum, qui inter cuncta systemata admissibilia locum habere debet. Designemus valores determinatos quotientium differentialium partialium

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v}, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v'}, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v''} \text{ etc.}$$
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v}, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v'}, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v''} \text{ etc.}$$
$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v}, \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v'}, \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v''} \text{ etc. etc.}$$

quos obtinent, si ipsis $v$, $v'$, $v''$ etc. valores veri tribuuntur, resp. per

$$a,\ a',\ a'' \text{ etc.}$$
$$b,\ b',\ b'' \text{ etc.}$$
$$c,\ c',\ c'' \text{ etc. etc.}$$

patetque, si ipsis $v$, $v'$, $v''$ etc. accedere concipiantur talia incrementa $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}v'$, $\mathrm{d}v''$ etc. per quae $X$, $Y$, $Z$ etc. non mutentur, adeoque singulae maneant $= 0$, i. e. satisfacientia aequationibus

$$0 = a\mathrm{d}v + a'\mathrm{d}v' + a''\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$0 = b\mathrm{d}v + b'\mathrm{d}v' + b''\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$0 = c\mathrm{d}v + c'\mathrm{d}v' + c''\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
etc.

etiam $u - U$ non mutari debere, adeoque fieri

$$0 = (l-L)\mathrm{d}v + (l'-L')\mathrm{d}v' + (l''-L'')\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$

Hinc facile concluditur, coëfficientes $L$, $L'$, $L''$ etc. contentos esse debere sub formulis talibus

$$L = l + ax + by + cz + \text{etc.}$$
$$L' = l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.}$$
$$L'' = l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc.}$$

etc., denotantibus $x$, $y$, $z$ etc. multiplicatores determinatos. Vice versa patet, si systema multiplicatorum determinatorum $x$, $y$, $z$ etc.

ad lubitum assumatur, semper assignari posse functionem $U$ talem, cui valores ipsorum $L$, $L'$, $L''$ etc. his aequationibus conformes respondeant, et quae pro conditione in art. praec. enunciata ipsius $u$ vice fungi possit: quin adeo hoc infinitis modis diuersis effici posse. Modus simplicissimus erit statuere $U = u + xX + yY + zZ +$ etc.; generalius statuere licet $U = u + xX + yY + zZ +$ etc. $+ u'$, denotante $u'$ talem functionem indeterminatarum $v$, $v'$, $v''$ etc., quae semper euanescit pro $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., et cuius valor in casu determinato de quo agitur fit maximus vel minimus. Sed ad institutum nostrum nulla hinc oritur differentia.

## 5.

Facile iam erit, multiplicatoribus $x$, $y$, $z$ etc. valores tales tribuere, vt aggregatum

$$LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.}$$

assequatur valorem minimum. Manifesto ad hunc finem haud opus est cognitione errorum mediorum $m$, $m'$, $m''$ etc. absoluta, sed sufficit ratio, quam inter se tenent. Introducemus itaque ipsorum loco pondera obseruationum $p$, $p'$, $p''$ etc., i. e. numeros quadratis $mm$, $m'm'$, $m''m''$ etc. reciproce proportionales, pondere alicuius obseruationis ad lubitum pro vnitate accepto. Quantitates $x$, $y$, $z$ etc. itaque sic determinari debebunt, vt polynomium indefinitum

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.} + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l')^2}{p'} + \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'')^2}{p''} + \text{etc.}$$

nanciscatur valorem minimum, quod fieri supponemus per valores *determinatos* $x^\circ$, $y^\circ$, $z^\circ$ etc.

Introducendo denotationes sequentes

$$\frac{aa}{p} + \frac{a'a'}{p'} + \frac{a''a''}{p''} + \text{etc.} = [aa]$$

$$\frac{ab}{p} + \frac{a'b'}{p'} + \frac{a''b''}{p''} + \text{etc.} = [ab]$$
$$\frac{ac}{p} + \frac{a'c'}{p'} + \frac{a''c''}{p''} + \text{etc.} = [ac]$$
$$\frac{bb}{p} + \frac{b'b'}{p'} + \frac{b''b''}{p''} + \text{etc.} = [bb]$$
$$\frac{bc}{p} + \frac{b'c'}{p'} + \frac{b''c''}{p''} + \text{etc.} = [bc]$$
$$\frac{cc}{p} + \frac{c'c'}{p'} + \frac{c''c''}{p''} + \text{etc.} = [cc]$$

etc. nec non

$$\frac{al}{p} + \frac{a'l'}{p'} + \frac{a''l''}{p''} + \text{etc.} = [al]$$
$$\frac{bl}{p} + \frac{b'l'}{p'} + \frac{b''l''}{p''} + \text{etc.} = [bl]$$
$$\frac{cl}{p} + \frac{c'l'}{p'} + \frac{c''l''}{p''} + \text{etc.} = [cl]$$

etc.

manifesto conditio minimi requirit vt fiat

$$\left.\begin{array}{l} 0 = [aa]x^\circ + [ab]y^\circ + [ac]z^\circ + \text{etc.} + [al] \\ 0 = [ab]x^\circ + [bb]y^\circ + [bc]z^\circ + \text{etc.} + [bl] \\ 0 = [ac]x^\circ + [bc]y^\circ + [cc]z^\circ + \text{etc.} + [cl] \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Postquam quantitates $x^\circ$, $y^\circ$, $z^\circ$ etc. per eliminationem hinc deriuatae sunt, statuetur

$$\left.\begin{array}{l} a x^\circ + b y^\circ + c z^\circ + \text{etc.} + l = L \\ a' x^\circ + b' y^\circ + c' z^\circ + \text{etc.} + l' = L' \\ a'' x^\circ + b'' y + c'' z^\circ + \text{etc.} + l'' = L'' \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

His ita factis, functio quantitatum $v$, $v'$ $v''$ etc. ea ad determinationem incognitae nostrae maxime idonea minimaeque incertitudini obnoxia erit, cuius quotientes differentiales partiales in casu determinato de quo agitur habent valores $L$, $L'$, $L''$ etc. resp., pondusque huius determinationis, quod per $P$ denotabimus, erit

$$= \frac{1}{\frac{LL}{p} + \frac{L'L'}{p'} + \frac{L''L''}{p''} + \text{etc.}} \qquad (3)$$

siue $\frac{1}{P}$ erit valor polynomii supra allati pro eo systemate valorum quantitatum $x$, $y$, $z$ etc., per quod aequationibus (1) satisfit.

## 6.

In art. praec. eam functionem $U$ dignoscere docuimus, quae determinationi maxime idoneae incognitae nostrae inseruit: videamus iam, quemnam *valorem* incognita hoc modo assequatur. Designetur hic valor per $K$, qui itaque oritur, si in $U$ valores obseruati quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc. substituuntur; per eandem substitutionem obtineat functio $u$ valorem $k$; denique sit $\varkappa$ valor verus incognitae, qui proin e valoribus veris quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc. prodituros esset, si hos vel in $U$ vel in $u$ substituere possemus. Hinc itaque erit

$$k = \varkappa + le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$
$$K = \varkappa + Le + L'e' + L''l'' + \text{etc.}$$

adeoque

$$K = k + (L-l)e + (L'-l')e' + (L''-l'')e'' + \text{etc.}$$

Substituendo in hac aequatione pro $L-l$, $L'-l'$, $L''-l''$ etc. valores ex (2), statuendoque

$$\left.\begin{array}{l} ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{C} \end{array}\right\} (4)$$

etc., habebimus

$$K = k + \mathfrak{A}x^\circ + \mathfrak{B}y^\circ + \mathfrak{C}z^\circ \text{ etc.} \qquad (5)$$

Valores quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. per formulas (4) quidem calculare non possumus, quum errores $e$, $e'$, $e''$ etc. maneant incogniti; at sponte manifestum est, illos nihil aliud esse, nisi valores functionum $X$, $Y$, $Z$ etc., qui prodeunt, si pro $v$, $v'$, $v''$ etc. valores obseruati substituuntur. Hoc modo systema aequationum (1), (3), (5) completam problematis nostri solutionem exhibet, quum ea, quae in fine art. 2. de computo quantitatum $l$, $l'$, $l''$ etc., valoribus obseruatis quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc. superstruendo monuimus, manifesto aequali iure ad computum quantitatum $a$, $a'$, $a''$ etc. $b$, $b'$, $b''$ etc. etc. extendere liceat.

## 7.

Loco formulae (3), pondus determinationis maxime plausibilis exprimentis, plures aliae exhiberi possunt, quas euoluere operae pretium erit.

Primo obseruamus, si aequationes (2) resp. per $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. multiplicentur et addantur, prodire

$$[aa]x^\circ + [ab]y^\circ + [ac]z^\circ + \text{etc.} = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \text{etc.}$$

Pars ad laeuam fit $= 0$, partem ad dextram iuxta analogiam per $[aL]$ denotamus: habemus itaque

$$[aL] = 0, \text{ et prorsus simili modo } [bL] = 0, [cL] = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando porro aequationes (2) deinceps per $\frac{L}{p}$, $\frac{L'}{p'}$, $\frac{L''}{p''}$ etc., et addendo, inuenimus

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.} = \frac{LL}{p} + \frac{L'L'}{p'} + \frac{L''L''}{p''} + \text{etc.}$$

vnde obtinemus expressionem *secundam* pro pondere,

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.}}$$

Denique multiplicando aequationes (2) deinceps per $\frac{l}{p}$, $\frac{l'}{p'}$, $\frac{l''}{p''}$, etc. et addendo, peruenimus ad expressionem *tertiam* ponderis

$$P = \frac{1}{[al]x^\circ + [bl]y^\circ + [cl]z + \text{etc.} + [ll]}$$

si ad instar reliquarum denotationum statuimus

$$\frac{ll}{p} + \frac{l'l'}{p'} + \frac{l''l''}{p''} + \text{etc.} = [ll]$$

Hinc adiumento aequationum (1) facile fit transitus ad *expressionem quartam*, quam ita exhibemus:

$$\frac{1}{P} = [ll] - [aa]x^\circ x^\circ - [bb]y^\circ y^\circ - [cc]z^\circ z^\circ - \text{etc.}$$
$$- 2[ab]x^\circ y^\circ - 2[ac]x^\circ z^\circ - 2[bc]y^\circ z^\circ - \text{etc.}$$

## 8.

Solutio generalis, quam hactenus explicauimus, ei potissimum casui adaptata est, vbi *vna* incognita a quantitatibus obseruatis pendens determinanda est. Quoties vero plures incognitae ab iisdem obseruationibus pendentes valores maxime plausibiles exspectant, vel quoties adhuc incertum est, quasnam potissimum incognitas ex obseruationibus deriuare oporteat, has alia ratione praeparare conueniet, cuius euolutionem iam aggredimur.

Considerabimus quantitates $x$, $y$, $z$ etc. tamquam indeterminatas, statuemus

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \text{etc.} &= \xi \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \text{etc.} &= \eta \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

etc., supponemusque, per eliminationem hinc sequi

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.} &= x \\ [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{etc.} &= y \\ [\gamma\alpha]\xi + [\beta\gamma]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{etc.} &= z \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

etc.

Ante omnia hic obseruare oportet, coëfficientes symmetrice positos necessario aequales fieri, puta

$$[\beta\alpha] = [\alpha\beta]$$
$$[\gamma\alpha] = [\alpha\gamma]$$
$$[\gamma\beta] = [\beta\gamma] \quad \text{etc.}$$

quod quidem e theoria generali eliminationis in aequationibus linearibus sponte sequitur, sed etiam infra, absque illa, directe demonstrabitur.

Habebimus itaque

$$\left.\begin{aligned} x^\circ &= -[\alpha\alpha].[al] - [\alpha\beta].[bl] - [\alpha\gamma].[cl] - \text{etc.} \\ y^\circ &= -[\alpha\beta].[al] - [\beta\beta].[bl] - [\beta\gamma].[cl] - \text{etc.} \\ z^\circ &= -[\alpha\gamma].[al] - [\beta\gamma].[bl] - [\gamma\gamma].[cl] - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

etc.

vnde, si statuimus

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha]\mathfrak{A} + [\alpha\beta]\mathfrak{B} + [\alpha\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= A \\ [\alpha\beta]\mathfrak{A} + [\beta\beta]\mathfrak{B} + [\beta\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= B \\ [\alpha\gamma]\mathfrak{A} + [\beta\gamma]\mathfrak{B} + [\gamma\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= C \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

etc., obtinemus

$$K = k - A[al] - B[bl] - C[cl] - \text{etc.}$$

vel si insuper statuimus

$$\left.\begin{aligned} aA + bB + cC + \text{etc.} &= p\varepsilon \\ a'A + b'B + c'C + \text{etc.} &= p'\varepsilon' \\ a''A + b''B + c''C + \text{etc.} &= p''\varepsilon'' \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

etc., erit

$$K = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \text{etc.} \quad (11)$$

## 9.

Comparatio aequationum (7), (9) docet, quantitates auxiliares $A$, $B$, $C$ etc. esse valores indeterminatarum $x$, $y$, $z$ etc. respondentes valoribus indeterminatarum $\xi$, $\eta$, $\zeta$ etc. his $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc., vnde patet haberi

$$\left.\begin{array}{l}[aa]A + [ab]B + [ac]C + \text{etc.} = \mathfrak{A}\\ [ab]A + [bb]B + [bc]C + \text{etc.} = \mathfrak{B}\\ [ac]A + [bc]B + [cc]C + \text{etc.} = \mathfrak{C}\end{array}\right\} \quad (12)$$

etc. Multiplicando itaque aequationes (10) resp. per $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. et addendo, obtinemus

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A} = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}\\ \text{et prorsus simili modo}\\ \mathfrak{B} = b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}\\ \mathfrak{C} = c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}\end{array}\right\} \quad (13)$$

etc. Iam quum $\mathfrak{A}$ sit valor functionis $X$, si pro $v$, $v'$, $v''$ etc. valores obseruati substituuntur, facile perspicietur, si his applicentur correctiones $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. resp., functionem $X$ hinc adepturam esse valorem 0, et perinde functiones $Y$, $Z$ etc. hinc ad valorem euanescentem reductum iri. Simili ratione ex aequatione (11) colligitur, $K$ esse valorem functionis $u$ ex eadem substitutione emergentem.

Applicationem correctionum $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. ad obseruationes, vocabimus *obseruationum compensationem*, manifestoque deducti sumus ad conclusionem grauissimam, puta, obseruationes eo quem docuimus modo compensatas omnibus aequationibus conditionalibus exacte satisfacere, atque cuilibet quantitati ab obseruationibus quomodocunque pendenti eum ipsum valorem conciliare, qui ex obseruationum non mutatarum combinatione maxime idonea emergeret. Quum itaque impossibile sit, errores ipsos $e$, $e'$, $e''$ etc. ex aequationibus conditionalibus eruere, quippe quarum multitudo haud sufficit, saltem *errores maxime plausibiles* nacti sumus, qua denominatione quantitates $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ etc. designare licebit.

## 10.

Quum multitudo obseruationum maior esse supponatur multitudine aequationum conditionalium, praeter systema correctionum maxime plausibilium $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. infinite multa alia inueniri possunt, quae aequationibus conditionalibus satisfaciant, operaeque pretium est indagare, quomodo haec ad illud se habeant. Constituant itaque $-E$, $-E'$, $-E''$ etc. tale systema a maxime plausibili diuersum, habebimusque

$$aE + a'E' + a''E'' + \text{etc.} = \mathfrak{A}$$
$$bE + b'E' + b''E'' + \text{etc.} = \mathfrak{B}$$
$$cE + c'E' + c''E'' + \text{etc.} = \mathfrak{C}$$

etc. Multiplicando has aequationes resp. per $A$, $B$, $C$ etc. et addendo, obtinemus adiumento aequationum (10)

$$p\varepsilon E + p'\varepsilon' E' + p''\varepsilon'' E'' + \text{etc.} = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

Prorsus vero simili modo aequationes (13) suppeditant

$$p\varepsilon\varepsilon + p'\varepsilon'\varepsilon' + p''\varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.} = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \text{etc.} \quad (14)$$

E combinatione harum duarum aequationum facile deducitur

$$pEE + p'E'E' + p''E''E'' + \text{etc.} = p\varepsilon\varepsilon + p'\varepsilon'\varepsilon' + p''\varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$+ p(E-\varepsilon)^2 + p'(E'-\varepsilon')^2 + p''(E''-\varepsilon'')^2 + \text{etc.}$$

Aggregatum $pEE + p'E'E' + p''E''E'' +$ etc. itaque necessario *maius* erit aggregato $p\varepsilon\varepsilon + p'\varepsilon'\varepsilon' + p''\varepsilon''\varepsilon'' +$ etc., quod enunciari potest tamquam

THEOREMA. Aggregatum quadratorum correctionum, per quas obseruationes cum aequationibus conditionalibus conciliare licet, per pondera obseruationum resp. multiplicatorum, fit minimum, si correctiones maxime plausibiles adoptantur.

Hoc est ipsum principium quadratorum minimorum, ex quo etiam aequationes (12), (10) facile immediate deriuari possunt. Ceterum pro hoc aggregato minimo, quod in sequentibus per $S$ denotabimus, aequatio (14) nobis suppeditat expressionem $\mathfrak{A}A + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} +$ etc.

## 11.

Determinatio errorum maxime plausibilium, quum a coëfficientibus $l$, $l'$, $l''$ etc. independens sit, manifesto praeparationem commodissimam sistit, ad quemuis vsum, in quem obseruationes vertere placuerit. Praeterea perspicuum est, ad illud negotium haud opus esse eliminatione *indefinita* seu cognitione coëfficientium $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc., nihilque aliud requiri, nisi vt quantitates auxiliares $A$, $B$, $C$ etc., quas in sequentibus *correlata* aequationum conditionalium $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. vocabimus, ex aequationibus (12) per eliminationem definitam eliciantur atque in formulis (10) substituantur.

Quamquam vero haec methodus nihil desiderandum linquat, quoties quantitatum ab obseruationibus pendentium valores maxime plausibiles tantummodo requiruntur, tamen res secus se habere videtur, quoties insuper pondus alicuius determinationis in votis est, quum ad hunc finem, prout hoc vel illa quatuor expressionum supra traditarum vti placuerit, cognitio quantitatum $L$, $L'$, $L''$ etc., vel saltem cognitio harum $x^\circ$, $y^\circ$, $z^\circ$ etc. necessaria videatur. Hac ratione vtile erit, negotium eliminationis accuratius perscrutari, vnde via facilior ad pondera quoque inuenienda se nobis aperiet.

## 12.

Nexus quantitatum in hac disquisitione occurrentium haud parum illustratur per introductionem functionis indefinitae secundi ordinis

$$[aa]xx + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \text{etc.} + [bb]yy + 2[bc]yz + \text{etc.} + [cc]zz + \text{etc.}$$

quam per $T$ denotabimus. Primo statim obuium est, hanc functionem fieri

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.})^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.})^2}{p'} + \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.})^2}{p''} + \text{etc.} \quad (15)$$

Porro patet esse

$$T = x\xi + y\eta + z\zeta + \text{etc.} \quad (16)$$

et si hic denuo $x$, $y$, $z$ etc. adiumento aequationum (7) per $\xi$, $\eta$, $\zeta$ etc. exprimuntur,

$$T = [\alpha\alpha]\xi\xi + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + \text{etc.} + [\beta\beta]\eta\eta$$
$$+ 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + [\gamma\gamma]\zeta\zeta + \text{etc.}$$

Theoria supra euoluta bina systemata valorum determinatorum quantitatum $x$, $y$, $z$ etc., atque $\xi$, $\eta$, $\zeta$ etc. continet; priori, in quo $x = x^\circ$, $y = y^\circ$, $z = z^\circ$ etc. $\xi = -[al]$, $\eta = -[bl]$, $\zeta = -[cl]$ etc., respondebit valor ipsius $T$ hic

$$T = [ll] - \frac{1}{P}$$

quod vel per expressionem tertiam ponderis $P$ cum aequatione (16) comparatam, vel per quartam sponte elucet; posteriori, in quo $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc., atque $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc., respondet valor $T = S$, vti vel e formulis (10) et (15), vel ex his (14) et (16) manifestum est.

## 13.

Iam negotium principale consistit in transformatione functionis $T$ ei simili, quam in Theoria Motus Corporum Coelestium art. 182 atque fusius in Disquisitione de elementis ellipticis Palladis exposuimus. Scilicet statuemus (17)

$$[bb, 1] = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}$$

$$[bc, 1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

$$[bd, 1] = [bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}$$

etc.

$$[cc, 2] = [cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]}$$

$$[cd, 2] = [cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]} - \frac{[bc, 1]\,[bd, 1]}{[bb, 1]}$$

etc.

$$[dd, 3] = [dd] - \frac{[ad]^2}{[aa]} - \frac{[bd, 1]^2}{[bb, 1]} - \frac{[cd, 2]^2}{[cc, 2]}$$

etc. etc. Dein statuendo *)

$$\begin{aligned} [bb,1]y + [bc, 1]z + [bd, 1]w + \text{etc.} &= \eta' \\ [cc, 2]z + [cd, 2]w + \text{etc.} &= \zeta'' \\ [dd, 3]w + \text{etc.} &= \varphi''' \\ \text{etc., erit} \end{aligned}$$

$$T = \frac{\xi\xi}{[aa]} + \frac{\eta'\eta'}{[bb, 1]} + \frac{\zeta''\zeta''}{[cc, 2]} + \frac{\varphi'''\varphi'''}{[dd, 3]} + \text{etc.}$$

quantitatesque $\eta'$, $\zeta''$, $\varphi'''$ etc. a $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\varphi$ etc. pendebunt per aequationes sequentes:

$$\eta' = \eta - \frac{[ab]}{[aa]}\xi$$

$$\zeta'' = \zeta - \frac{[ac]}{[aa]}\xi - \frac{[bc, 1]}{[bb, 1]}\eta'$$

$$\varphi''' = \varphi - \frac{[ad]}{[aa]}\xi - \frac{[bd, 1]}{[bb, 1]}\eta' - \frac{[cd, 2]}{[cc, 2]}\zeta''$$

etc.

Facile iam omnes formulae ad propositum nostrum necessariae hinc desumuntur. Scilicet ad determinationem correlatorum $A$, $B$, $C$ etc. statuemus (18)



*) In praecedentibus sufficere poterant ternae literae pro variis systematibus quantitatum ad tres primas aequationes conditionales referendae: hoc vero loco, vt algorithmi lex clarius eluceat, quartam adiungere visum est; et quum in serie naturali literas $a$, $b$, $c$; $A$, $B$, $C$; 𝔄, 𝔅, ℭ sponte sequantur $d$, $D$, 𝔇, in serie $x$, $y$, $z$, deficiente alphabeto, apposuimus $w$, nec non in hac $\xi$, $\eta$, $\zeta$ hanc $\varphi$.

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \frac{[ab]}{[aa]}\,\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{C}'' = \mathfrak{C} - \frac{[ac]}{[aa]}\,\mathfrak{A} - \frac{[bc,1]}{[bb,1]}\,\mathfrak{B}'$$

$$\mathfrak{D}''' = \mathfrak{D} - \frac{[ad]}{[aa]}\,\mathfrak{A} - \frac{[bd,1]}{[bb,1]}\,\mathfrak{B}' - \frac{[cd,2]}{[cc,2]}\,\mathfrak{C}''$$

etc., ac dein $A$, $B$, $C$, $D$ etc. eruentur per formulas sequentes, et quidem ordine inuerso, incipiendo ab vltima,

$$\left.\begin{array}{r} [aa]A + [ab]B + [ac]C + [ad]D + \text{etc.} = \mathfrak{A} \\ [bb,1]B + [bc,1]C + [bd,1]D + \text{etc.} = \mathfrak{B}' \\ [cc,2]C + [cd,2]D + \text{etc.} = \mathfrak{C}'' \\ [dd,3]D + \text{etc.} = \mathfrak{D}''' \\ \text{etc.} \end{array}\right\}(19)$$

Pro aggregato $S$ autem habemus formulam nouam (20)

$$S = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{[aa]} + \frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'}{[bb,1]} + \frac{\mathfrak{C}''\mathfrak{C}''}{[cc,2]} + \frac{\mathfrak{D}'''\mathfrak{D}'''}{[dd,3]}\ \text{etc.}$$

Denique si pondus $P$, quod determinationi maxime plausibili quantitatis per functionem $u$ expressae tribuendum est, desideratur, faciemus (21)

$$[bl,1] = [bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]}$$

$$[cl,2] = [cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]} - \frac{[bc,1]\,[bl,1]}{[bb,1]}$$

$$[dl,3] = [dl] - \frac{[ad]\,[al]}{[aa]} - \frac{[bd,1]\,[bl,1]}{[bb,1]} - \frac{[cd,2]\,[cl,2]}{[cc,2]}$$

etc., quo facto erit (22)

$$\frac{1}{P} = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl,1]^2}{[bb,1]} - \frac{[cl,2]^2}{[cc,2]} - \frac{[dl,3]^2}{[dd,3]} - \text{etc.}$$

Formulae (17) .... (22), quarum simplicitas nihil desiderandum relinquere videtur, solutionem problematis nostri ab omni parte completam exhibent.

14.

Postquam problemata primaria absoluimus, adhuc quasdam quaestiones secundarias attingemus, quae huic argumento maiorem lucem affundent.

Primo inquirendum est, num eliminatio, per quam $x$, $y$, $z$ etc. ex $\xi$, $\eta$, $\zeta$ etc. deriuare oportet, vmquam impossibilis fieri possit. Manifesto hoc eueniret, si functiones $\xi$, $\eta$, $\zeta$ etc. inter se haud independentes essent. Supponamus itaque aliquantisper, vnam earum per reliquas iam determinari, ita vt habeatur aequatio identica

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} = 0$$

denotantibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. numeros determinatos. Erit itaque

$$\alpha[aa] + \beta[ab] + \gamma[ac] + \text{etc.} = 0$$
$$\alpha[ab] + \beta[bb] + \gamma[bc] + \text{etc.} = 0$$
$$\alpha[ac] + \beta[bc] + \gamma[cc] + \text{etc.} = 0$$

etc., vnde, si statuimus

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \text{etc.} = p\,\Theta$$
$$\alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \text{etc.} = p'\,\Theta'$$
$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} = p''\,\Theta''$$

etc., sponte sequitur

$$a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., nec non

$$p\Theta\Theta + p'\Theta'\Theta' + p''\Theta''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$

quae aequatio, quum omnes $p$, $p'$, $p''$ etc. natura sua sint quantitates positiuae, manifesto consistere nequit, nisi fuerit $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc.

Iam consideremus valores differentialium completorum $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}Y$, $\mathrm{d}Z$ etc., respondentes valoribus iis quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc, ad quos referuntur obseruationes. Haec differentialia, puta

$$a\,\mathrm{d}v + a'\,\mathrm{d}v' + a''\,\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$b\,\mathrm{d}v + b'\,\mathrm{d}v' + b''\,\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$
$$c\,\mathrm{d}v + c'\,\mathrm{d}v' + c''\,\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$

etc., per conclusionem, ad quam modo delati sumus, inter se ita dependentia erunt, vt per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. resp. multiplicata aggregatum identice euanescens producant, siue quod idem est, quoduis ex ipsis (cui quidem respondet multiplicator $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. non euanescens) sponte euanescet, simulac omnia reliqua euanescere supponuntur. Quamobrem ex aequationibus conditionalibus $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., vna (ad minimum) pro *superflua* habenda est, quippe cui sponte satisfit, simulac reliquis satisfactum est.

Ceterum si res profundius inspicitur, apparet, hanc conclusionem per se tantum pro ambitu infinite paruo variabilitatis indeterminatarum valere. Scilicet proprie duo casus distinguendi erunt, alter, vbi vna aequationum conditionalium $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. absolute et generaliter iamiam in reliquis contenta est, quod facile in quouis casu auerti poterit; alter, vbi, quasi fortuito, pro iis valoribus concretis quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc., ad quos obseruationes referuntur, vna functionum $X$, $Y$, $Z$ etc. e. g. prima $X$, valorem maximum vel minimum (vel generalius, stationarium) nanciscitur respectu mutationum omnium, quas quantitatibus $v$, $v'$, $v''$ etc., saluis aequationibus $Y = 0$, $Z = 0$ etc., applicare possemus. Attamen quum in disquisitione nostra variabilitas quantitatum tantummodo intra limites tam arctos consideretur, vt ad instar infinite paruae tractari possit, hic casus secundus (qui in praxi vix vmquam occurret) eundem effectum habebit, quem primus, puta vna aequationum conditionalium tamquam superflua reiicienda erit, certique esse possumus, si omnes aequationes conditionales retentae eo sensu quem hic intelligimus ab inuicem independentes sint, eliminationem necessario fore possibilem. Ceterum disquisitionem vberiorem, qua hoc argumentum, propter theoreticam subtilitatem potius quam practicam vtilitatem haud indignum est, ad aliam occasionem nobis reseruare debemus.

## 15.

In commentatione priori art. 37 sqq. methodum docuimus, obseruationum praecisionem a posteriori quam proxime eruendi. Scilicet si valores approximati $\pi$ quantitatum per obseruationes aequali praecisione gaudentes innotuerunt, et cum valoribus iis comparantur, qui e valoribus maxime plausibilibus $\varrho$ elementorum, a quibus illae pendent, per calculum prodeunt: differentiarum quadrata addere, aggregatumque per $\pi - \varrho$ diuidere oportet, quo facto quotiens considerari poterit tamquam valor approximatus quadrati erroris medii tali obseruationum generi inhaerentis. Quoties obseruationes inaequali praecisione gaudent, haec praecepta eatenus tantum mutanda sunt, vt quadrata ante additionem per obseruationum pondera multiplicari debeant, errorque medius hoc modo prodiens ad obseruationes referatur, quarum pondus pro vnitate acceptum est.

Iam in tractatione praesente illud aggregatum manifesto quadrat cum aggregato $S$, differentiaque $\pi - \varrho$ cum multitudine aequationum conditionalium $\sigma$, quamobrem pro errore medio obseruationum, quarum pondus $= 1$, habebimus expressionem $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$, quae determinatio eo maiori fide digna erit, quo maior fuerit numerus $\sigma$.

Sed operae pretium erit, hoc etiam independenter a disquisitione priori stabilire. Ad hunc finem quasdam nouas denotationes introducere conueniet. Scilicet respondeant valoribus indeterminatarum $\xi$, $\eta$, $\zeta$ etc. his

$$\xi = a,\ \eta = b,\ \zeta = c \text{ etc.}$$

valores ipsarum $x$, $y$, $z$ etc. hi

$$x = \alpha,\ y = \beta,\ z = \gamma \text{ etc.}$$

ita vt habeatur

$$\alpha = a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.}$$
$$\beta = a[\alpha\beta] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \text{etc.}$$
$$\gamma = a[\alpha\gamma] + b[\beta\gamma] + c[\gamma\gamma] + \text{etc.}$$

etc. Perinde valoribus

$$\xi = a',\ \eta = b',\ \zeta = c' \text{ etc.}$$

respondere supponemus hos

$$x = \alpha',\ y = \beta',\ z = \gamma' \text{ etc.}$$

nec non his

$$\xi = a'',\ \eta = b'',\ \zeta = c'' \text{ etc.}$$

sequentes

$$x = \alpha'',\ y = \beta'',\ z = \gamma'' \text{ etc.}$$

et sic porro.

His positis combinatio aequationum (4), (9) suppeditat

$$A = \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.}$$
$$B = \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.}$$
$$C = \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}$$

etc. Quare quum habeatur $S = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.}$, patet fieri

$$\begin{aligned} S = &(ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.})(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.}) \\ &+ (be + b'e' + b''e'' + \text{etc.})(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.}) \\ &+ (ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.})(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

## 16.

Institutionem obseruationum, per quas valores quantitatum $v$, $v'$, $v''$ etc. erroribus fortuitis $e$, $e'$, $e''$ etc. affectos obtinemus, considerare possumus tamquam experimentum, quod quidem singulorum errorum commissorum magnitudinem docere non valet, attamen, praeceptis quae supra explicauimus adhibitis, valorem quantitatis $S$ subministrat, qui per formulam modo inuentam est functio data illorum errorum. In tali experimento errores fortuiti vtique alii maiores alii minores prodire possunt; sed quo plures errores concurrunt, eo maior spes aderit, valorem quantitatis $S$ in experimento singulari a valore suo medio parum deuiaturum esse. Rei cardo itaque in eo vertitur, vt valorem medium quantitatis $S$ stabiliamus. Per principia in commentatione priori exposita, quae hic repetere superfluum esset, inuenimus hunc valorem medium

$$= (a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\,mm + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})\,m'm' + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})\,m''m'' + \text{etc.}$$

Denotando errorem medium obseruationum talium, quarum pondus $= 1$, per $\mu$, ita vt sit $\mu\mu = pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc., expressio modo inuenta ita exhiberi potest:

$$\left(\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''}\ \text{etc.}\right)\mu\mu + \left(\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu\mu + \left(\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu\mu + \text{etc.}$$

Sed aggregatum $\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}$ inuenitur

$$= [aa]\cdot[\alpha\alpha] + [ab]\cdot[\alpha\beta] + [ac]\cdot[\alpha\gamma] + \text{etc.}$$

adeoque $= 1$, vti e nexu aequationum (6), (7) facile intelligitur. Perinde fit

$$\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.} = 1$$

$$\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.} = 1$$

et sic porro.

Hinc tandem valor medius ipsius $S$ fit $= \sigma\mu\mu$, quatenusque igitur valorem fortuitum ipsius $S$ pro medio adoptare licet, erit $\mu = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$.

## 17.

Quanta fides huic determinationi habenda sit, diiudicare oportet per errorem medium vel in ipsa vel in ipsius quadrato metuendum: posterior erit radix quadrata valoris medii expressionis

$$\left(\frac{S}{\sigma} - \mu\mu\right)^2,$$

cuius euolutio absoluetur per ratiocinia similia iis, quae in commentatione priori artt. 39 sqq. exposita sunt. Quibus breuitatis caussa hic suppressis, formulam ipsam tantum hic apponimus. Scilicet error medius in determinatione quadrati $\mu\mu$ metuendus exprimitur per

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu^4}{\sigma} + \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\sigma\sigma} . N\right)}$$

denotante $\nu^4$ valorem medium biquadratorum errorum, quorum pondus $= 1$, atque $N$ aggregatum

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})^2 \text{ etc.}$$

Hoc aggregatum in genere ad formam simpliciorem reduci nequit, sed simili modo vt in art. 40. prioris commentationis ostendi potest, eius valorem semper contineri intra limites $\pi$ et $\frac{\sigma\sigma}{\pi}$. In hypothesi ea, cui theoria quadratorum minimorum ab initio superstructa erat, terminus hoc aggregatum continens, propter $\nu^4 = 3\mu^4$, omnino excidit, praecisioque, quae errori medio, per formulam $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ determinato, tribuenda est, eadem erit, ac si ex $\sigma$ erroribus exacte cognitis secundum artt. 15, 16 prioris commentationis erutus fuisset.

## 18.

Ad compensationem obseruationum duo, vt supra vidimus, requiruntur: primum, vt aequationum conditionalium correlata, i. e. numeri $A$, $B$, $C$ etc. aequationibus (12) satisfacientes eruantur, secundum, vt hi numeri in aequationibus (10) substituantur. Compensatio hoc modo prodiens dici poterit *perfecta* seu *completa*, vt distinguatur a compensatione *imperfecta* seu *manca*: hac scilicet denominatione designabimus, quae resultant ex iisdem quidem aequationibus (10), sed substratis valoribus quantitatum $A$, $B$, $C$ etc., qui non satisfaciunt aequationibus (12), i. e. qui vel parti tantum satisfaciunt vel nullis. Quod vero attinet ad tales obseruationum mutationes, quae sub formulis (10) comprehendi nequeunt, a disquisitione praesente, nec non a denominatione compensationum exclusae sunto. Quum, quatenus aequationes (10) locum habent, aequationes (13) ipsis (12) omnino sint aequiualentes, illud discrimen ita quoque enunciari potest: Obseruationes complete compensatae omnibus aequationibus conditionalibus $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. satisfaciunt, incomplete compensatae vero vel nullis vel saltem non omnibus; compensatio itaque, per quam omnibus aequationibus conditionalibus satisfit, necessario est ipsa completa.

## 19.

Iam quum ex ipsa notione compensationis sponte sequatur, aggregata duarum compensationum iterum constituere compensationem, facile perspicitur, nihil interesse, vtrum praecepta, per quae compensatio perfecta eruenda est, immediate ad obseruationes primitiuas applicentur, an ad obseruationes incomplete iam compensatas.

Reuera constituant $-\Theta$, $-\Theta'$, $-\Theta''$ etc. systema compensationis incompletae, quod prodierit e formulis (I)

$$\Theta p = A^\circ a + B^\circ b + C^\circ c + \text{etc.}$$
$$\Theta' p' = A^\circ a' + B^\circ b' + C^\circ c' + \text{etc.}$$
$$\Theta'' p'' = A^\circ a'' + B^\circ b'' + C^\circ c'' + \text{etc.}$$

etc.

Quum obseruationes his compensationibus mutatae omnibus aequationibus conditionalibus non satisfacere supponantur, sint $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc.

etc. valores, quos $X$, $Y$, $Z$ etc. ex illarum substitutione nanciscuntur. Quaerendi sunt numeri $A^*$, $B^*$, $C^*$ etc. aequationibus (II) satisfacientes

$$\mathfrak{A}^* = A^*[aa] + B^*[ab] + C^*[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}^* = A^*[ab] + B^*[bb] + C^*[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}^* = A^*[ac] + B^*[bc] + C^*[cc] + \text{etc.}$$

etc., quo facto compensatio completa obseruationum isto modo mutatarum efficitur per mutationes nouas $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc., vbi $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. computandae sunt per formulas (III)

$$\varkappa p = A^* a + B^* b + C^* c + \text{etc.}$$
$$\varkappa' p' = A^* a' + B^* b' + C^* c' + \text{etc.}$$
$$\varkappa'' p'' = A^* a'' + B^* b'' + C^* c'' + \text{etc.}$$

etc. Iam inquiramus, quomodo hae correctiones cum compensatione completa obseruationum primitiuarum cohaereant. Primo manifestum est haberi

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \text{etc.}$$

etc. Substituendo in his aequationibus pro $\Theta$, $\Theta'$, $\Theta''$ etc. valores ex (I), nec non pro $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. valores ex II, inuenimus

$$\mathfrak{A} = (A^\circ + A^*)[aa] + (B^\circ + B^*)[ab] + (C^\circ + C^*)[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^\circ + A^*)[ab] + (B^\circ + B^*)[bb] + (C^\circ + C^*)[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^\circ + A^*)[ac] + (B^\circ + B^*)[bc] + (C^\circ + C^*)[cc] + \text{etc.}$$

etc., vnde patet, correlata aequationum conditionalium aequationibus (12) satisfacientia esse

$$A = A^\circ + A^*,\ B = B^\circ + B^*,\ C = C^\circ + C^* \text{ etc.}$$

Hinc vero aequationes (10), I et III docent, esse

$$\varepsilon = \Theta + \varkappa,\ \varepsilon' = \Theta' + \varkappa',\ \varepsilon'' = \Theta'' + \varkappa'' \text{ etc.}$$

i. e. compensatio obseruationum perfecta eadem prodit, siue immediate computetur, siue mediate proficiscendo a compensatione manca.

## 20.

Quoties multitudo aequationum conditionalium permagna est, determinatio correlatorum $A$, $B$, $C$ etc. per eliminationem directam tam prolixa euadere potest, vt calculatoris patientia ei impar sit: tunc saepenumero commodum esse poterit, compensationem completam per approximationes successiuas adiumento theorematis art. praec. eruere. Distribuantur aequationes conditionales in duas pluresue classes, inuestigeturque primo compensatio, per quam aequationibus primae classis satisfit, neglectis reliquis. Dein tractentur obseruationes per hanc compensationem mutatae ita, vt solarum aequationum secundae classis ratio habeatur. Generaliter loquendo applicatio secundi compensationum systematis consensum cum aequationibus primae classis turbabit; quare, si duae tantummodo classes factae sunt, ad aequationes primae classis reuertemur, tertiumque systema quod huic satisfaciat eruemus; dein obseruationes ter correctas compensationi quartae subiiciemus, vbi solae aequationes secundae classis respiciuntur. Ita alternis vicibus, modo priorem classem modo posteriorem respicientes, compensationes continuo decrescentes obtinebimus, et si distributio scite adornata fuerat, post paucas iterationes ad numeros stabiles perueniemus. Si plures quam duae classes factae sunt, res simili modo se habebit: classes singulae deinceps in computum venient, post vltimam iterum prima et sic porro. Sed sufficiat hoc loco, hunc modum addigitauisse, cuius efficacia multum vtique a scita applicatione pendebit.

## 21.

Restat, vt suppleamus demonstrationem lemmatis in art. 8 suppositi, vbi tamen perspicuitatis caussa alias denotationes huic negotio magis adaptatas adhibebimus.

Sint itaque $x^0$, $x'$, $x''$, $x'''$ etc. indeterminatae, supponamusque, ex aequationibus

$$n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.} = X^0$$
$$n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.} = X'$$
$$n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.} = X''$$
$$n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.} = X'''$$
etc.

sequi per eliminationem has

$$N^{00}X^0 + N^{01}X' + N^{02}X'' + N^{03}X''' + \text{etc.} = x^0$$
$$N^{10}X^0 + N^{11}X' + N^{12}X'' + N^{13}X''' + \text{etc.} = x'$$
$$N^{20}X^0 + N^{21}X' + N^{22}X'' + N^{23}X''' + \text{etc.} = x''$$
$$N^{30}X^0 + N^{31}X' + N^{32}X'' + N^{33}X''' + \text{etc.} = x'''$$
etc.

Substitutis itaque in aequatione prima et secunda secundi systematis valoribus quantitatum $X$, $X'$, $X''$, $X'''$ etc. e primo systemate, obtinemus

$$\begin{aligned} x^0 = {} & N^{00}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{01}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{02}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{03}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) \end{aligned}$$

etc., nec non

$$\begin{aligned} x' = {} & N^{10}(n^{00}x + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{11}(n^{10}x + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{12}(n^{20}x + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{13}(n^{30}x + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) \end{aligned}$$
etc.

Quum vtraque aequatio manifesto esse debeat aequatio identica, tum in priori tum in posteriori pro $x^0$, $x'$, $x''$, $x'''$ etc. valores quoslibet determinatos substituere licebit. Substituamus in priori

$$x^0 = N^{10},\ x' = N^{11},\ x'' = N^{12},\ x''' = N^{13} \text{ etc.}$$

in posteriori vero

$$x^0 = N^{00},\ x' = N^{01},\ x'' = N^{02},\ x''' = N^{03} \text{ etc.}$$

His ita factis subtractio producit

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} = & (N^{00} N^{11} - N^{10} N^{01})(n^{01} - n^{10}) \\ & + (N^{00} N^{12} - N^{10} N^{02})(n^{02} - n^{20}) \\ & + (N^{00} N^{13} - N^{10} N^{03})(n^{03} - n^{30}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{01} N^{12} - N^{11} N^{02})(n^{12} - n^{21}) \\ & + (N^{01} N^{13} - N^{11} N^{03})(n^{13} - n^{31}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{02} N^{13} - N^{12} N^{03})(n^{23} - n^{32}) \\ & + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

quae aequatio ita quoque exhiberi potest

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma\, (N^{0\alpha} N^{1\beta} - N^{1\alpha} N^{0\beta})\,(n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha})$$

denotantibus $\alpha\ \beta$ omnes combinationes indicum inaequalium.

Hinc colligitur, si fuerit $n^{01} = n^{10}$, $n^{02} = n^{20}$, $n^{03} = n^{30}$, $n^{12} = n^{21}$, $n^{13} = {}^{31}$, $n^{23} = n^{32}$, etc., siue generaliter $n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$, fore etiam

$$N^{10} = N^{01}$$

Et quum ordo indeterminatarum in aequationibus propositis sit arbitrarius, manifesto, in illa suppositione erit generaliter

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}$$

## 22.

Quum methodus in hac commentatione exposita applicationem imprimis frequentem et commodam inueniat in calculis ad geodaesiam sublimiorem pertinentibus, lectoribus gratam fore speramus illustrationem praeceptorum per nonnulla exempla hinc desumta.

Aequationes conditionales inter angulos systematis triangulorum e triplici potissimum fonte sunt petendae.

I. Aggregatum angulorum horizontalium, qui circa eundem verticem gyrum integrum horizontis complent, aequare debet quatuor rectos.

II. Summa trium angulorum in quouis triangulo quantitati datae aequalis est, quum, quoties triangulum est in superficie curua, excessum illius summae supra duos rectos tam accurate computare liceat, vt pro absolute exacto haberi possit.

III. Fons tertius est ratio laterum in triangulis catenam clausam formantibus. Scilicet si series triangulorum ita nexa est, vt secundum triangulum habeat latus vnum $a$ commune cum triangulo primo, aliud $b$ cum tertio; perinde quartum triangulum cum tertio habeat latus commune $c$, cum quinto latus commune $d$, et sic porro vsque ad vltimum triangulum, cui cum praecedente latus commune sit $k$, et cum triangulo primo rursus latus $l$, valores quotientium $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{c}$ .... $\frac{l}{k}$, innotescent resp. e binis angulis triangulorum successiuorum, lateribus communibus oppositis, per methodos notas, vnde quum productum illarum fractionum fieri debeat $= 1$, prodibit aequatio conditionalis inter sinus illorum angulorum, (parte tertia excessus sphaerici vel sphaeroidici, si triangula sunt in superficie curua, resp. diminutorum).

Ceterum in systematibus triangulorum complicatioribus saepissime accidit, vt aequationes conditionales tum secundi tum tertii generis plures se offerant, quam retinere fas est, quoniam pars earum in reliquis iam contenta est. Contra rarior erit casus, vbi aequationibus conditionalibus secundi generis adiungere oportet aequationes similes ad figuras plurium laterum spectantes, puta tunc tantum, vbi polygona formantur, in triangula per mensurationes non diuisa. Sed de his rebus ab instituto praesente nimis alienis, alia occasione fusius agemus. Silentio tamen praeterire non possumus monitum, quod theoria nostra, si applicatio pura atque rigorosa in votis est, supponit, quantitates per $v$, $v'$, $v''$ etc. designatas reuera vel immediate obseruatas esse, vel ex obseruationibus ita deriuatas, vt inter se independentes maneant, vel saltem tales censeri possint. In praxi vulgari obseruantur anguli triangulorum ipsi, qui proin pro $v$, $v'$, $v''$ etc. accipi possunt; sed memores esse debemus, si forte systema insuper contineat triangula talia, quorum anguli non sint immediate obseruati, sed prodeant tamquam summae vel differentiae angulorum reuera obseruatorum, illos non inter obseruatorum numerum referendos, sed in forma compositionis suae in calculis retinendos esse. Aliter vero res se habebit in modo obseruandi ei simili, quem sequutus est clar. Struve (Astronomische Nachrichten II, p. 431), vbi directiones singulorum laterum ab eodem vertice proficiscentium obtinentur per comparationem cum vna eademque directione arbitraria. Tunc scilicet hi ipsi anguli pro $v$, $v'$, $v''$ etc. accipiendi sunt, quo pacto omnes anguli triangulorum in forma differentiarum se offerent, aequationesque conditionales primi generis, quibus per rei naturam sponte satisfit, tamquam superfluae cessabunt. Modus obseruationis, quem ipse sequutus sum in dimensione triangulorum annis praecedentibus perfecta, differt quidem tum a priori tam a posteriori modo, attamen respectu effectus posteriori aequiparari potest, ita vt in singulis stationibus directiones laterum inde proficiscentium ab initio quasi arbitrario numeratas pro quantitatibus $v$, $v'$, $v''$ etc. accipere oporteat. Duo iam exempla elaborabimus, alterum ad modum priorem, alterum ad posteriorem pertinens.

## 23.

Exemplum primum nobis suppeditabit opus clar. de Krayenhof, *Précis historique des operations trigonometriques faites en Hollande*, et quidem compensationi subiiciemus partem eam systematis triangulorum, quae inter nouem puncta Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde, Gröningen continentur. Formantur inter haec puncta nouem triangula in opera illo per numeros 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 denotata, quorum anguli (a nobis indicibus praescriptis distincta) secundum tabulam p. 77–81 ita sunt obseruati:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Triangulum 121. | | | |
| 0. | Harlingen . . . . . | 50° | 58′ | 15″238 |
| 1. | Leeuwarden . . . . | 82 | 47 | 15,351 |
| 2. | Ballum . . . . . . . | 46 | 14 | 27,202 |
| | Triangulum 122. | | | |
| 3. | Harlingen . . . . . | 51 | 5 | 39,717 |
| 4. | Sneek . . . . . . . | 70 | 48 | 33,445 |
| 5. | Leeuwarden . . . . | 58 | 5 | 48,707 |
| | Triangulum 123. | | | |
| 6. | Sneek . . . . . . . | 49 | 30 | 40,051 |
| 7. | Drachten . . . . . | 42 | 52 | 59,382 |
| 8. | Leeuwarden . . . . | 87 | 36 | 21,057 |
| | Triangulum 124. | | | |
| 9. | Sneek . . . . . . . | 45 | 36 | 7,492 |
| 10. | Oldeholtpade . . . . | 67 | 52 | 0,048 |
| 11. | Drachten , . . . . | 66 | 31 | 56,513 |
| | Triangulum 125. | | | |
| 12. | Drachten . . . . . . | 53 | 55 | 24,745 |
| 13 | Oldeholtpade . . . | 47 | 48 | 52,580 |
| 14. | Oosterwolde . . . . | 78 | 15 | 42,347 |
| | Triangulum 127. | | | |
| 15. | Leeuwarden . . . . | 59 | 24 | 0,645 |
| 16. | Dockum . . . . . . | 76 | 34 | 9,021 |
| 17. | Ballum . . . . . . . | 44 | 1 | 51,040 |
| | Triangulum 128. | | | |
| 18. | Leeuwarden . . . . | 72 | 6 | 32,043 |
| 19. | Drachten . . . . . | 46 | 53 | 27,163 |
| 20. | Dockum . . . . . . | 61 | 0 | 4,494 |

Triangulum 131.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21. | Dockum . . . . . . | 57° | 1′ | 55″292 |
| 22. | Drachten . . , . . | 83 | 33 | 14,515 |
| 23. | Gröningen . . . . | 39 | 24 | 52,397 |

Triangulum 132

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | Oosterwolde . . . | 81 | 54 | 17,447 |
| 25. | Gröningen . . . . | 31 | 52 | 46,094 |
| 26. | Drachten . . . . | 66 | 12 | 57,246 |

Consideratio nexus inter haec triangula monstrat, inter 27 angulos, quorum valores approximati per obseruationem innotuerunt, 13 aequationes conditionales haberi, puta duas primi generis, nouem secundi, duas tertii. Sed haud opus erit, has aequationes omnes in forma sua finita hic adscribere, quum ad calculos tantummodo requirantur quantitates in theoria generali per $\mathfrak{A}$, $a$, $a'$, $a''$ etc., $\mathfrak{B}$, $b$, $b'$, $b''$ etc. etc. denotatae: quare illarum loco statim adscribimus aequationes supra per (13) denotatas, quae illas quantitates ob oculos ponunt: loco signorum $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ etc. simpliciter hic scribemus (0), (1), (2) etc.

Hoc modo duabus aequationibus conditionalibus primi generis respondent sequentes:

$$(1) + (5) + (8) + (15) + (18) = -\,2''197$$
$$(7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) = -\,0''436$$

Excessus sphaeroidicos nouem triangulorum inuenimus deinceps: 1″749; 1″147; 1″243; 1″698; 0″873; 1″167; 1″104; 2″161; 1″403. Oritur itaque aequatio conditionalis secundi generis prima haec *): $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180°\,0'\,1''749 = 0$, et perinde reliquae: hinc habemus nouem aequationes sequentes:

*) Indices in hoc exemplo per figuras arabicas exprimere praefeorimus.

$$
\begin{aligned}
(0) + (1) + (2) &= -\ 3''958\\
(3) + (4) + (5) &= +\ 0,722\\
(6) + (7) + (8) &= -\ 0,753\\
(9) + (10) + (11) &= +\ 2,355\\
(12) + (13) + (14) &= -\ 1,201\\
(15) + (16) + (17) &= -\ 0,461\\
(18) + (19) + (20) &= +\ 2,596\\
(21) + (22) + (23) &= +\ 0,043\\
(24) + (25) + (26) &= -\ 0,616
\end{aligned}
$$

Aequationes conditionales tertii generis commodius in forma logarithmica exhibentur: ita prior est

$$
\begin{aligned}
&\log\sin(\nu^{(0)} - 0''583) - \log\sin(\nu^{(2)} - 0''583) - \log\sin(\nu^{(3)} - 0''382)\\
&+ \log\sin(\nu^{(4)} - 0''382) - \log\sin(\nu^{(6)} - 0''414) + \log\sin(\nu^{(7)} - 0''414)\\
&- \log\sin(\nu^{(16)} - 0''389) + \log\sin(\nu^{(17)} - 0''389) - \log\sin(\nu^{(19)} - 0''368)\\
&+ \log\sin(\nu^{(20)} - 0''368) = 0
\end{aligned}
$$

Superfluum videtur, alteram in forma finita adscribere. His duabus aequationibus respondent sequentes, vbi singuli coëfficientes referuntur ad figuram septimam logarithmorum briggicorum:

$$
\begin{aligned}
17,068(0) &- 20,174(2) - 16,993(3) + 7,328(4) - 17,976(6)\\
&+ 22,672(7) - 5,028(16) + 21,780(17) - 19,710(19)\\
&+ 11,671(20) = -\ 371
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
17,976(6) &- 0,880(8) - 20,617(9) + 8,564(10) - 19,082(13)\\
&+ 4,375(14) + 6,798(18) - 11,671(20) + 13,657(21)\\
&- 25,620(23) - 2,995(24) + 33,854(25) = +\ 370
\end{aligned}
$$

Quum nulla ratio indicata sit, cur obseruationibus pondera inaequalia tribuamus, statuemus $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)}$ etc. $= 1$. Denotatis itaque correlatis aequationum conditionalium eo ordine, quo aequationes ipsis respondentes exhibuimus, per $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N$, prodeunt ad illorum determinationem aequationes sequentes:

$$-2''197 = 5A + C + D + E + H + I + 5,917\,N$$
$$-0,436 = 6B + E + F + G + I + K + L + 2,962\,M$$
$$-3,958 = A + 3C - 3,106\,M$$
$$+0,722 = A + 3D - 9,665\,M$$
$$-0,753 = A + B + 3E + 4,696\,M + 17,096\,N$$
$$+2,355 = B + 3F - 12,053\,N$$
$$-1,201 = B + 3G - 14,707\,N$$
$$-0,461 = A + 3H + 16,752\,M$$
$$+2,596 = A + B + 3I - 8,039\,M - 4,874\,N$$
$$+0,043 = B + 3K - 11,963\,N$$
$$-0,616 = B + 3L + 30,859\,N$$
$$-371 = +2,962\,B - 3,106\,C - 9,665\,D + 4,696\,E + 16,752\,H - 8,039\,I + 2902,27\,M - 459,33\,N$$
$$+370 = +5,917\,A + 17,096\,E - 12,053\,F - 14,707\,G - 4,874\,I - 11,963\,K + 30,859\,L - 459,33\,M + 3385,96\,N$$

Hinc eruimus per eliminationem:

| | |
|---|---|
| $A = -0,598$ | $H = +0,659$ |
| $B = -0,255$ | $I = +1,050$ |
| $C = -1,234$ | $K = +0,577$ |
| $D = +0,086$ | $L = -1,351$ |
| $E = -0,447$ | $M = -0,109792$ |
| $F = +1,351$ | $N = +0,119681$ |
| $G = +0,271$ | |

Denique errores maxime plausibiles prodeunt per formulas

$$(0) = C + 17,068\,M$$
$$(1) = A + C$$
$$(2) = C - 20,174\,M$$
$$(3) = D - 16,993\,M$$

etc., vnde obtinemus valores numericos sequentes; in gratiam comparationis apponimus (mutatis signis) correctiones a clar. de Krayenhof obseruationibus applicatas:

| | de Kr. | | de Kr. |
|---|---|---|---|
| (0) = − 3″108 | − 2″090 | (14) = + 0″795 | + 2″400 |
| (1) = − 1,832 | + 0,116 | (15) = + 0,061 | + 1,273 |
| (2) = + 0,981 | − 1,982 | (16) = + 1,211 | + 5,945 |
| (3) = + 1,952 | + 1,722 | (17) = − 1,732 | − 7,674 |
| (4) = − 0,719 | + 2,848 | (18) = + 1,265 | + 1,876 |
| (5) = − 0,512 | − 3,848 | (19) = + 2,959 | + 6,251 |
| (6) = + 3,648 | − 0,137 | (20) = − 1,628 | − 5,530 |
| (7) = − 3,221 | + 1,000 | (21) = + 2,211 | + 3,486 |
| (8) = − 1,180 | − 1,614 | (22) = + 0,322 | − 3,454 |
| (9) = − 1,116 | 0 | (23) = − 2,489 | 0 |
| (10) = + 2,376 | + 5,928 | (24) = − 1,709 | + 0,400 |
| (11) = + 1,096 | − 3,570 | (25) = + 2,701 | + 2,054 |
| (12) = + 0,016 | + 2,414 | (26) = − 1,606 | − 3,077 |
| (13) = − 2,013 | − 6,014 | | |

Aggregatum quadratorum nostrarum compensationum inuenitur = 97,8845. Hinc error medius, quatenus ex 27 angulis obseruatis colligi potest,

$$= \sqrt{\frac{97,8845}{13}} = 2''7440$$

Aggregatum quadratorum mutationum, quas clar. de Krayenhof ipse angulis obseruatis applicauit, inuenitur = 341,4201.

## 24.

Exemplum alterum suppeditabunt triangula inter quinque puncta triangulationis Hannoveranae, Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode, Wilsede. Obseruatae sunt directiones *):

*) Initia, ad quae singulae directiones referuntur, hic tamquam arbitraria considerantur, quamquam reuera cum lineis meridianis stationum coincidant. Obseruationes in posterum complete publici iuris

In statione Falkenberg

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0. | Wilsede | 187° | 47′ | 30″311 |
| 1. | Wulfsode | 225 | 9 | 39,676 |
| 2. | Hauselberg | 266 | 13 | 56,239 |
| 3. | Breithorn | 274 | 14 | 43,634 |

In statione Breithorn

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4. | Falkenberg | 94 | 33 | 40,755 |
| 5. | Hauselberg | 122 | 51 | 23,054 |
| 6. | Wilsede | 150 | 18 | 35,100 |

In statione Hauselberg

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7. | Falkenberg | 86 | 29 | 6,872 |
| 8. | Wilsede | 154 | 37 | 9,624 |
| 9. | Wulfsode | 189 | 2 | 56,376 |
| 10. | Breithorn | 302 | 47 | 37,732 |

In statione Wulfsode

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11. | Hauselberg | 9 | 5 | 36,593 |
| 12. | Falkenberg | 45 | 27 | 33,556 |
| 13. | Wilsede | 118 | 44 | 13,159 |

In statione Wilsede

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14. | Falkenberg | 7 | 51 | 1,027 |
| 15. | Wulfsode | 298 | 29 | 49,519 |
| 16. | Breithorn | 330 | 3 | 7,392 |
| 17. | Hauselberg | 334 | 25 | 26,746 |

Ex his obseruationibus septem triangula formare licet.

Triangulum I.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Falkenberg | 8° | 0′ | 47″395 |
| Breithorn | 28 | 17 | 42,299 |
| Hauselberg | 143 | 41 | 29,140 |

---

fient; interim figura inuenitur in Astronomische Nachrichten Vol. I. p. 441.

Triangulum II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Falkenberg ........ | 86° | 27′ | 13″323 |
| Breithorn .......... | 55 | 44 | 54,345 |
| Wilsede ........... | 37 | 47 | 53,635 |

Triangulum III.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Falkenberg ........ | 41 | 4 | 16,563 |
| Hauselberg ........ | 102 | 33 | 49,504 |
| Wulfsode .......... | 36 | 21 | 56,963 |

Triangulum IV.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Falkenberg ........ | 78 | 26 | 25,928 |
| Hauselberg ........ | 68 | 8 | 2,752 |
| Wilsede .......... | 35 | 25 | 34,281 |

Triangulum V.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Falkenberg ......... | 37 | 22 | 9,365 |
| Wulfsode .......... | 73 | 16 | 39,603 |
| Wilsede .......... | 69 | 21 | 11,508 |

Triangulum VI.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Breithorn .......... | 27 | 27 | 12,046 |
| Hauselberg ....... | 148 | 10 | 28,108 |
| Wilsede .......... | 4 | 22 | 19,354 |

Triangulum VII.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Hauselberg ......... | 34 | 25 | 46,752 |
| Wulfsode ......... | 109 | 38 | 36,566 |
| Wilsede .......... | 35 | 55 | 37,227 |

Aderunt itaque septem aequationes conditionales secundi generis (aequationes primi generis manifesto cessant), quas vt eruamus, computandi sunt ante omnia excessus sphaeroidici septem triangulorum. Ad hunc finem requiritur cognitio magnitudinis absolutae saltem vnius lateris: latus inter puncta Wilsede et Wulfsode est 22877,94 metrorum. Hinc prodeunt excessus sphaeroidici triangulorum I . . . 0″202; II . . . 2″442; III . . . 1″257; IV . . . . 1″919; V . . . . 1″957; VI . . . . 0″321; VII . . . . 1″295.

Iam si directionis eo ordine, quo supra allatae indicibusque distinctae sunt, per $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, $\nu^{(3)}$ etc. designantur, trianguli I anguli fiunt $\nu^{(3)} - \nu^{(2)}$, $\nu^{(5)} - \nu^{(4)}$, $360^\circ + \nu^{(7)} - \nu^{(10)}$, adeoque aequatio conditionalis prima

$$-\nu^{(2)} + \nu^{(3)} - \nu^{(4)} + \nu^{(5)} + \nu^{(7)} - \nu^{(10)} + 179^\circ\,59'\,59''798 = 0$$

Perinde triangula reliqua sex alias suppeditant; sed leuis attentio docebit, has septem aequationes non esse independentes, sed secundam identicam cum summa primae, quartae et sextae; nec non summam tertiae et quintae identicam cum summa quartae et septimae: quapropter secundam et quintam negligemus. Loco remanentium aequationum conditionalium in forma finita, adscribimus aequationes correspondentes e complexu (13), dum pro characteribus $\varepsilon$, $\varepsilon'$ etc. his (0), (1), (2) etc. vtimur:

$$\begin{aligned}
-\,1''368 &= -(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10)\\
+\,1{,}773 &= -(1)+(2)-(7)+(9)-(11)+(12)\\
+\,1{,}042 &= -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17)\\
-\,0{,}813 &= -(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17)\\
-\,0{,}750 &= -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)
\end{aligned}$$

Aequationes conditionales tertii generis *octo* e triangulorum systemate peti possent, quum tum terna quatuor triangulorum I, II, IV, VI, tum terna ex his III, IV, V, VII ad hunc finem combinare liceat; attamen leuis attentio docet, *duas* sufficere, alteram ex illis, alteram ex his, quum reliquae in his atque prioribus aequationibus conditionalibus iam contentae esse debeant. Aequatio itaque conditionalis sexta nobis erit

$$\log\sin(\nu^{(3)} - \nu^{(2)} - 0''067) - \log\sin(\nu^{(5)} - \nu^{(4)} - 0''067)$$
$$+ \log\sin(\nu^{(14)} - \nu^{(17)} - 0''640) - \log\sin(\nu^{(2)} - \nu^{(0)} - 0''640)$$
$$+ \log\sin(\nu^{(6)} - \nu^{(5)} - 0''107) - \log\sin(\nu^{(17)} - \nu^{(16)} - 0''107) = 0$$

atque septima

$$\begin{aligned}\log\sin\,(\nu^{(2)}-\nu^{(1)}-0''419)-\log\sin\,(\nu^{(12)}-\nu^{(11)}-0''419)\\+\log\sin\,(\nu^{(14)}-\nu^{(17)}-0''640)-\log\sin\,(\nu^{(2)}-\nu^{(0)}-0''640)\\+\log\sin\,(\nu^{(13)}-\nu^{(11)}-0''432)-\log\sin\,(\nu^{(17)}-\nu^{(15)}-0''432)\\=0\end{aligned}$$

quibus respondent aequationes complexus (13)

$$\begin{aligned}+25=+4{,}31(0)-153{,}88(2)+149{,}57(3)+39{,}11(4)-79{,}64(5)\\+40{,}53(6)+31{,}90(14)+275{,}39(16)-307{,}29(17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3=+4{,}31(0)-24{,}16(1)+19{,}85(2)+36{,}11(11)-28{,}59(12)\\-7{,}52(13)+31{,}90(14)+29{,}06(15)-60{,}96(17)\end{aligned}$$

Quodsi iam singulis directionibus eandem certitudinem tribuimus, statuendo $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$, correlataque septem aequationum conditionalium, eo ordine, quem hic sequuti sumus, per $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ denotamus, horum determinatio petenda erit ex aequationibus sequentibus:

$$\begin{aligned}-1{,}368&=+6A-2B-2C-2D+184{,}72F-19{,}85G\\+1{,}773&=-2A+6B+2C+2E-153{,}88F-20{,}69G\\+1{,}042&=-2A+2B+6C-2D-2E+181{,}00F+108{,}40G\\-0{,}813&=-2A-2C+6D+2E-462{,}51F-60{,}96G\\-0{,}750&=+2B-2C+2D+6E-307{,}29F-133{,}65G\\+25&=+184{,}72A-153{,}88B+181{,}00C-462{,}51D\\&\qquad-307{,}29E+224868F+16694{,}1G\\-3&=-19{,}85A-20{,}69B+108{,}40C-60{,}96D\\&\qquad-133{,}65E+16694{,}1F+8752{,}39G\end{aligned}$$

Hinc deducimus per eliminationem

$$\begin{aligned}A&=-0{,}225\\B&=+0{,}344\\C&=-0{,}088\\D&=-0{,}171\end{aligned}$$

$E = -\ 0{,}323$

$F = +\ 0{,}000215915$

$G = -\ 0{,}00547462$

Iam errores maxime plausibiles habentur per formulas:

$(0) = -\ C + 4{,}31\,F + 4{,}31\,G$

$(1) = -\ B - 24{,}16\,G$

$(2) = -\ A + B + C - 153{,}88\,F + 19{,}85\,G$

etc., vnde prodeunt valores numerici

| | |
|---|---|
| $(0) = +\ 0''065$ | $(9) = +\ 0''021$ |
| $(1) = -\ 0{,}212$ | $(10) = +\ 0{,}054$ |
| $(2) = +\ 0{,}339$ | $(11) = -\ 0{,}219$ |
| $(3) = -\ 0{,}193$ | $(12) = +\ 0{,}501$ |
| $(4) = +\ 0{,}233$ | $(13) = -\ 0{,}282$ |
| $(5) = -\ 0{,}071$ | $(14) = -\ 0{,}256$ |
| $(6) = -\ 0{,}162$ | $(15) = +\ 0{,}164$ |
| $(7) = -\ 0{,}481$ | $(16) = +\ 0{,}230$ |
| $(8) = +\ 0{,}406$ | $(17) = -\ 0{,}139$ |

Summa quadratorum horum errorum inuenitur $= 1{,}2288$; hinc error medius vnius directionis, quatenus e 18 directionibus obseruatis erui potest,

$$= \sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = 0''4190$$

## 25.

Vt etiam pars altera theoriae nostrae exemplo illustretur, indagamus praecisionem, qua latus Falkenberg-Breithorn e latere Wilsede-Wulfsode adiumento obseruationum compensatarum determinatur. Functio $u$, per quam illud in hoc casu exprimitur, est

$$u = 22877^{\mathrm{m}}94 \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0''652) \cdot \sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0''814)}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0''652) \cdot \sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0''814)}$$

Huius valor, e valoribus correctis directionum $\rho^{(0)}$, $\rho^{(1)}$ etc. inuenitur

$$= 26766^m\,68$$

Differentiatio autem illius expressionis suppeditat, si differentialia $d\rho^{(0)}$, $d\rho^{(1)}$ etc. minutis secundis expressa concipiuntur,

$$du = 0^m\,16991\,(d\rho^{(0)} - d\rho^{(1)}) + 0^m\,08836\,(d\rho^{(4)} - d\rho^{(6)})$$
$$- 0^m\,03899\,(d\rho^{(12)} - d\rho^{(13)}) + 0^m\,16731\,(d\rho^{(14)} - d\rho^{(16)})$$

Hinc porro inuenitur

$$\begin{aligned}
[al] &= -\ 0{,}08836\\
[bl] &= +\ 0{,}13092\\
[cl] &= -\ 0{,}00260\\
[dl] &= +\ 0{,}07895\\
[el] &= +\ 0{,}03899\\
[fl] &= -\ 40{,}1315\\
[gl] &= +\ 10{,}9957\\
[ll] &= +\ 0{,}13238
\end{aligned}$$

Hinc denique per methodos supra traditas inuenitur, quatenus metrum pro vnitate dimensionum linearium accipimus,

$$\frac{1}{P} = 0{,}08329, \text{ siue } P = 12{,}006$$

vnde error medius in valore lateris Falkenberg-Breithorn metuendus $= 0{,}2886\,m$ metris, (vbi $m$ error medius in directionibus obseruatis metuendus, et quidem in minutis secundis expressus), adeoque, si valorem ipsius $m$ supra erutum adoptamus,

$$= 0^m\,1209$$

Ceterum inspectio systematis triangulorum sponte docet, punctum Hauselberg omnino ex illo elidi potuisse, incolumi manente nexu inter latera Wilsede-Wulfsode atque Falkenberg-Breithorn. Sed a bona methodo abhorreret, *supprimere* idcirco obseruationes, quae ad punctum Hauselberg referuntur *), quum certe ad praecisionem augendam conferre valeant. Vt clarius appareret, quantum praecisionis augmentum inde redundet, calculum denuo fecimus excludendo omnia, quae ad punctum Hauselberg referuntur, quo pacto e 18 directionibus supra traditis octo excidunt, atque reliquarum errores maxime plausibilis ita inueniuntur:

| | |
|---|---|
| $(0) = +\ 0''327$ | $(12) = +\ 0''206$ |
| $(1) = -\ 0,206$ | $(13) = -\ 0,206$ |
| $(3) = -\ 0,121$ | $(14) = +\ 0,327$ |
| $(4) = +\ 0,121$ | $(15) = +\ 0,206$ |
| $(6) = -\ 0,121$ | $(16) = +\ 0,121$ |

Valor lateris Falkenberg-Breithorn tunc prodit $= 26766^m 63$, parum quidem a valore supra eruto discrepans, sed calculus ponderis producit

$$\frac{1}{P} = 0,13082 \text{ siue } P = 7,644$$

adeoque error medius metuendus $= 0,36169\, m$ metris $= 0^m 1515$. Patet itaque, per accessionem obseruationum, quae ad punctum Hauselberg referuntur, pondus determinationis lateris Falkenberg-Breithorn auctum esse in ratione numeri $7,644$ ad $12,006$, siue vnitatis ad $1,571$.

---

*) Maior pars harum obseruationum iam facta erat, antequam punctum Breithorn repertum, atque in systema receptum esset.

# DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA

# SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. 8. OCTOB. 1827.

## 1.

Disquisitiones, in quibus de directionibus variarum rectarum in spatio agitur, plerumque ad maius perspicuitatis et simplicitatis fastigium euehuntur, in auxilium vocando superficiem sphaericam radio $= 1$ circa centrum arbitrarium descriptam, cuius singula puncta repraesentare censebuntur directiones rectarum radiis ad illa terminatis parallelarum. Dum situs omnium punctorum in spatio per tres coordinatas determinatur, puta per distantias a tribus planis fixis inter se normalibus, ante omnia considerandae veniunt directiones axium his planis normalium: puncta superficiei sphaericae, quae has directiones repraesentant, per (1), (2), (3) denotabimus; mutua igitur horum distantia erit quadrans. Ceterum axium directiones versus eas partes acceptas supponemus, versus quas coordinatae respondentes crescunt.

2.

Haud inutile erit, quasdam propositiones, quae in huiusmodi quaestionibus vsum frequentem offerunt, hic in conspectum producere.

I. Angulus inter duas rectas se secantes mensuratur per arcum inter puncta, quae in superficie sphaerica illarum directionibus respondent.

II. Situs cuiuslibet plani repraesentari potest per circulum maximum in superficie sphaerica, cuius planum illi est parallelum.

III. Angulus inter duo plana aequalis est angulo sphaerico inter circulos maximos illa repraesentantes, et proin etiam per arcum inter horum circulorum maximorum polos interceptum mensuratur. Et perinde inclinatio rectae ad planum mensuratur per arcum, a puncto, quod respondet directioni rectae, ad circulum maximum, qui plani situm repraesentat, normaliter ductum.

IV. Denotantibus $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$ coordinatas duorum punctorum, $r$ eorundem distantiam, atque $L$ punctum, quod in superficie sphaerica repraesentat directionem rectae a puncto priori ad posterius ductae, erit

$$x' = x + r \cos (1) L$$
$$y' = y + r \cos (2) L$$
$$z' = z + r \cos (3) L$$

V. Hinc facile sequitur, haberi generaliter

$$\cos(1)L^2 + \cos(2)L^2 + \cos(3)L^2 = 1$$

nec non, denotante $L'$ quodcunque aliud punctum superficiei sphaericae, esse

$$\cos(1)L . \cos(1)L' + \cos(2)L . \cos(2)L' + \cos(3)L . \cos(3)L' = \cos LL'.$$

VI. Theorema. *Denotantibus $L$, $L'$, $L''$, $L'''$ quatuor puncta in superficie sphaerae, atque $A$ angulum, quem arcus $LL'$, $L''L'''$ in puncto concursus sui formant, erit*

$$\cos LL'' . \cos L'L''' - \cos LL''' . \cos L'L'' = \sin LL' . \sin L''L''' . \cos A$$

*Demonstratio.* Denotet litera $A$ insuper punctum concursus ipsum, statuaturque

$$AL = t,\ AL' = t',\ AL'' = t'',\ AL''' = t'''$$

Habemus itaque:

$$\cos LL'' = \cos t . \cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A$$
$$\cos L'L''' = \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A$$
$$\cos L L''' = \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A$$
$$\cos L' L'' = \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A$$

et proin

$$\cos L L''. \cos L'L''' - \cos L L'''. \cos L'L'' = \cos A (\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''')$$
$$= \cos A\ (\cos t \sin t' - \sin t \cos t')\ (\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \sin t''')$$
$$= \cos A . \sin (t' - t)\ .\ \sin (t''' - t'')$$
$$= \cos A . \sin L L'\ .\ \sin L'' L'''$$

Ceterum quum inde a puncto $A$ bini rami vtriusque circuli maximi proficiscantur, duo quidem ibi anguli formantur, quorum alter alterius complementum ad 180°: sed analysis nostra monstrat, eos ramos adoptandos esse, quorum directiones cum sensu progressionis a puncto $L$ ad $L'$, et a puncto $L''$ ad $L'''$ consentiunt: quibus intellectis simul patet, quum circuli maximi duobus punctis concurrant, arbitrarium esse, vtrum eligatur. Loco anguli $A$ etiam arcus inter polos circulorum maximorum, quorum partes sunt arcus $LL'$, $L''L'''$, adhiberi potest: manifesto autem polos tales accipere oportet, qui respectu horum arcuum similiter iacent, puta vel vterque polus ad dextram iacens, dum a $L$ versus $L'$ atque ab $L''$ versus $L'''$ procedimus, vel vterque ad laeuam.

VII. Sint $L$, $L'$, $L''$ tria puncta in superficie sphaerica, statuamusque breuitatis caussa

$$\cos(1)L = x,\ \cos(2)L = y,\ \cos(3)L = z$$
$$\cos(1)L' = x',\ \cos(2)L' = y',\ \cos(3)L' = z'$$
$$\cos(1)L'' = x'',\ \cos(2)L'' = y'',\ \cos(3)L'' = z''$$

nec non

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta$$

Designet $\lambda$ polum circuli maximi, cuius pars est arcus $LL'$, et quidem eum, qui respectu huius arcus similiter iacet, ac punctum (1) respectu arcus (2) (3). Tunc erit, ex theoremate praecedente, $yz' - y'z = \cos(1)\lambda . \sin(2)(3) . \sin LL'$, siue, propter $(2)(3) = 90°$,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda . \sin LL', \text{ et perinde}$$
$$zx' - z'x = \cos(2)\lambda . \sin LL'$$
$$xy' - x'y = \cos(3)\lambda . \sin LL'$$

Multiplicando has aequationes resp. per $x''$, $y''$, $z''$ et addendo, obtinemus adiumento theorematis secundi in V prolati

$$\Delta = \cos\lambda L'' . \sin LL'$$

Iam tres casus sunt distinguendi. *Primo*, quoties $L''$ iacet in eodem circulo maximo cuius pars est arcus $LL'$, erit $\lambda L'' = 90°$, adeoque $\Delta = 0$. Quoties vero $L''$ iacet extra circulum illum maximum, aderit casus *secundus*, si est ab eadem parte, a qua est $\lambda$, *tertius*, si ab opposita: in his casibus puncta $L$, $L'$, $L''$ formabunt triangulum sphaericum, et quidem iacebunt in casu secundo eodem ordine quo puncta (1), (2), (3), in casu tertio vero ordine opposito. Denotando angulos illius trianguli simpliciter per $L$, $L'$, $L''$, atque perpendiculum in superficie sphaerica a puncto $L''$ ad latus $LL'$ ductum per $p$, erit $\sin p = \sin L . \sin LL'' = \sin L' . \sin L'L''$, atque $\lambda L'' = 90° \mp p$, valente signo superiori pro casu secundo, inferiori pro tertio. Hinc itaque colligimus

$$\pm\Delta = \sin L . \sin LL' . \sin LL'' = \sin L' . \sin LL' . \sin L'L''$$
$$= \sin L'' . \sin LL'' . \sin L'L''$$

Ceterum manifesto casus primus in secundo vel tertio comprehendi censeri potest, nulloque negotio perspicitur, $\pm\Delta$ exhibere sextuplum soliditatis pyramidis inter puncta $L$, $L'$, $L''$ atque centrum sphaerae formatae. Denique hinc facillime colligitur, eandem expressionem $\pm\frac{1}{6}\Delta$ generaliter exprimere soliditatem cuiusuis pyramidis inter initium coordinatarum atque puncta quorum coordinatae sunt $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$; $x''$, $y''$, $z''$, contentae.

3.

Superficies curua apud punctum $A$ in ipsa situm curuatura continua gaudere dicitur, si directiones omnium rectarum ab $A$ ad omnia puncta superficiei ab $A$ infinite parum distantia ductarum infinite parum ab vno eodemque plano per $A$ transiente deflectuntur: hoc planum superficiem curuam in puncto $A$ *tangere* dicitur. Quodsi huic conditioni in aliquo puncto satisfieri nequit, continuitas curuaturae hic interrumpitur, vti e. g. euenit in cuspide coni. Disquisitiones praesentes ad tales superficies curuas, vel ad tales superficiei partes, restringentur, in quibus continuitas curuaturae nullibi interrumpitur. Hic tantummodo obseruamus, methodos, quae positioni plani tangentis determinandae inseruiunt, pro punctis singularibus, in quibus continuitas curuaturae interrumpitur, vim suam perdere, et ad indeterminata perducere debere.

4.

Situs plani tangentis commodissime e situ rectae ipsi in puncto $A$ normalis cognoscitur, quae etiam ipsi superficiei curuae normalis dicitur. Directionem huius normalis per punctum $L$ in superficie sphaerae auxiliaris repraesentabimus, atque statuemus

$$\cos(1)L = X, \ \cos(2)L = Y, \ \cos(3)L = Z;$$

coordinatas puncti $A$ per $x$, $y$, $z$ denotamus. Sint porro $x + \mathrm{d}x$, $y + \mathrm{d}y$, $z + \mathrm{d}z$ coordinatae alius puncti in superficie curua $A'$; $\mathrm{d}s$ ipsius distantia infinite parua ab $A$; denique $\lambda$ punctum superficiei sphaericae repraesentans directionem elementi $AA'$. Erit itaque

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s.\cos(1)\lambda, \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}s.\cos(2)\lambda, \ \mathrm{d}z = \mathrm{d}s.\cos(3)\lambda$$

et, quum esse debeat $\lambda L = 90°$,

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0$$

E combinatione harum aequationum deriuamus

$$X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = 0.$$

Duae habentur methodi generales ad exhibendam indolem superficiei curuae. Methodus *prima* vtitur aequatione inter coordinatas $x$, $y$, $z$, quam reductam esse supponemus ad formam $W = 0$, vbi $W$ erit functio indeterminatarum $x$, $y$, $z$. Sit differentiale completum functionis $W$

$$\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

eritque in superficie curua

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$$

et proin

$$P\cos(1)\lambda + Q\cos(2)\lambda + R\cos(3)\lambda = 0$$

Quum haec aequatio, perinde vt ea quam supra stabiliuimus, valere debeat pro directionibus omnium elementorum $\mathrm{d}s$ in superficie curua, facile perspiciemus, $X$, $Y$, $Z$ proportionales esse debere ipsis $P$, $Q$, $R$, et proin, quum fiat $XX + YY + ZZ = 1$, erit vel

$$X = \frac{P}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},\quad Y = \frac{Q}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},$$
$$Z = \frac{R}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}$$

vel

$$X = \frac{-P}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},\quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}},$$
$$Z = \frac{-R}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}$$

Methodus *secunda* sistit coordinatas in forma functionum duarum variabilium $p$, $q$. Supponamus per differentiationem harum functionum prodire

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}p + c'\,\mathrm{d}q$$

quibus valoribus in formula supra data substitutis, obtinemus

$$(aX + bY + cZ)\,\mathrm{d}p + (a'X + b'Y + c'Z)\,\mathrm{d}q = 0$$

Quum haec aequatio locum habere debeat independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, manifesto esse debebit

$$aX + bY + cZ = 0,\ a'X + b'Y + c'Z = 0$$

vnde colligimus, $X$, $Y$, $Z$ proportionales esse debere quantitatibus

$$bc' - cb',\ ca' - ac',\ ab' - ba'$$

Statuendo itaque breuitatis caussa

$$\sqrt{((bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2)} = \Delta$$

erit vel

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta},\ Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta},\ Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta}$$

vel

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta},\ Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta},\ Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}$$

His duabus methodis generalibus accedit *tertia*, vbi vna coordinatarum, e. g. $z$ exhibetur in forma functionis reliquarum $x$, $y$: haec methodus manifesto nihil aliud est, nisi casus specialis vel methodi primae, vel secundae. Quodsi hic statuitur

$$\mathrm{d}z = t\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

erit vel

$$X = \frac{-t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Y = \frac{-u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Z = \frac{1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

vel

$$X = \frac{t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Y = \frac{u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Z = \frac{-1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

## 5.

Duae solutiones in art. praec. inuentae manifesto ad puncta superficiei sphaericae opposita, siue ad directiones oppositas referuntur, quod cum rei natura quadrat, quum normalem ad vtramuis plagam superficiei curuae ducere liceat. Quodsi duas plagas, superficiei contiguas, inter se distinguere, alteramque exteriorem alteram interiorem vocare placet, etiam vtrique normali suam solutionem rite tribuere licebit adiumento theorematis in art. 2 (VII) euoluti, simulatque criterium stabilitum est ad plagam alteram ab altera distinguendam.

In methodo prima tale criterium petendum erit a signo valoris quantitatis $W$. Scilicet generaliter loquendo superficies curua eas spatii partes, in quibus $W$ valorem positiuum obtinet, ab iis dirimet, in quibus valor ipsius $W$ fit negatiuus. E theoremate illo vero facile colligitur, si $W$ valorem positiuum obtineat versus plagam exteriorem, normalisque extrorsum ducta concipiatur, solutionem priorem adoptandam esse. Ceterum in quouis casu facile diiudicabitur, vtrum per superficiem integram eadem regula respectu signi ipsius $W$ valeat, an pro diuersis partibus diuersae: quamdiu coëfficientes $P$, $Q$, $R$ valores finitos habent, nec simul omnes tres euanescunt, lex continuitatis vicissitudinem vetabit.

Si methodum secundam sequimur, in superficie curua duo systemata linearum curuarum concipere possumus, alterum, pro quo $p$ est variabilis, $q$ constans; alterum, pro quo $q$ variabilis, $p$ constans: situs mutuus harum linearum respectu plagae exterioris decidere debet, vtram salutionem adoptare oporteat. Scilicet quoties tres lineae, puta ramus lineae prioris systematis a puncto $A$ proficiscens crescente $p$, ramus posterioris systematis a puncto $A$ egrediens crescente $q$, atque normalis versus plagam exteriorem ducta *similiter* iacent, vt, inde ab origine abscissarum, axes ipsarum $x$, $y$, $z$ resp. (e. g. si tum e tribus lineis illis, tum e tribus his, prima sinistrorsum, secunda dextrorsum, tertia sursum directa concipi potest), solutio prima adoptari debet; quoties autem situs mutuus trium linearum priorum oppositus est situi mutuo axium ipsarum $x$, $y$, $z$, solutio secunda valebit.

In methodo tertia dispiciendum est, vtrum, dum $z$ incrementum positiuum accipit, manentibus $x$ et $y$ inuariatis, transitus fiat versus plagam exteriorem an interiorem. In casu priori, pro normali extrorsum directa, solutio prima valet, in posteriori secunda.

## 6.

Sicuti, per translatam directionem normalis in superficiem curuam ad superficiem sphaerae, cuiuis puncto determinato prioris superficiei respondet punctum determinatum in posteriori, ita etiam quaeuis linea, vel quaeuis figura in illa repraesentabitur per lineam vel figuram correspondentem in hac. In comparatione duarum figurarum hoc modo sibi mutuo correspondentium, quarum altera quasi imago alterius erit, duo momenta sunt respicienda, alterum, quatenus sola quantitas consideratur, alterum, quatenus abstrahendo a relationibus quantitatiuis solum situm contemplamur.

Momentum primum basis erit quarundam notionum, quas in doctrinam de superficiebus curuis recipere vtile videtur. Scilicet cuilibet parti superficiei curuae limitibus determinatis cinctae *curvaturam totalem* seu *integram* adscribimus, quae per aream figurae illi in superficie sphaerica respondentem exprimetur. Ab hac curuatura integra probe distinguenda est curuatura quasi specifica, quam nos *mensuram curuaturae* vocabimus: haec posterior ad *punctum* superficiei refertur, et denotabit quotientem qui oritur, dum curuatura integra elementi superficialis puncto adiacentis per aream ipsius elementi diuiditur, et proin indicat rationem arearum infinite paruarum in superficie curua et in superficie sphaerica sibi mutuo respondentium. Vtilitas harum innouationum per ea, quae in posterum a nobis explicabuntur, abunde, vt speramus, sancietur. Quod vero attinet ad terminologiam, imprimis prospiciendum esse duximus, vt omnis ambiguitas arceatur, quapropter haud congruum putauimus, analogiam terminologiae in doctrina de lineis curuis planis vulgo receptam (etsi non omnibus probatam) stricte sequi, secundum quam mensura curuaturae simpliciter audire debuisset curuatura, curuatura integra autem amplitudo. Sed quidni in verbis faciles esse liceret, dummodo res non sint inanes, neque dictio interpretationi erroneae obnoxia?

Situs figurae in superficie sphaerica vel similis esse potest situi figurae respondentis in superficie curua, vel oppositus (inuersus); casus prior locum habet, vbi binae lineae in superficie curua ab eodem puncto directionibus inaequalibus sed non oppositis proficiscentes repraesentantur in superficie sphaerica per lineas similiter iacentes, puta vbi imago lineae ad dextram iacentis ipsa est ad dextram; casus posterior, vbi contrarium valet. Hos duos casus per *signum* mensurae curuaturae vel positiuum vel negatiuum distinguemus. Sed manifesto haec distinctio eatenus tantum locum habere potest, quatenus in vtraque superficie plagam determinatam eligimus, in qua figura concipi debet. In sphaera auxiliari semper plagam exteriorem, a centro auersam, adhibebimus: in superficie curva etiam plaga exterior siue quae tamquam exterior consideratur, adoptari potest, vel potius plaga eadem, a qua normalis erecta concipitur; manifesto enim respectu similitudinis figurarum nihil mutatur, si in superficie curua tum figura ad plagam oppositam transfertur, tum normalis, dummodo ipsius imago semper in eadem plaga superficiei sphaericae depingatur.

Signum positiuum vel negatiuum, quod pro situ figurae infinite paruae *mensurae* curuaturae adscribimus, etiam ad curuaturam integram figurae finitae in superficie curua extendimus. Attamen si argumentum omni generalitate amplecti suscipimus, quaedam dilucidationes requiruntur, quas hic breuiter tantum attingemus. Quamdiu figura in superficie curua ita comparata est, vt singulis punctis intra ipsam puncta *diuersa* in superficie sphaerica respondeant, definitio vlteriori explicatione non indiget. Quoties autem conditio ista locum non habet, necesse erit, quasdam partes figurae in superficie sphaerica bis vel pluries in computum ducere, vnde, pro situ simili vel opposito, vel accumulatio vel destructio oriri poterit. Simplicissimum erit in tali casu, figuram in superficie curua in partes tales diuisam concipere, quae singulae per se spectatae conditioni illi satisfaciant, singulis tribuere curuaturam suam integram, quantitate per aream figurae in superficie sphaerica respondentis, signo per situm determinatis, ac denique figurae toti adscribere curuaturam integram ortam per additionem curuaturarum integrarum, quae singulis partibus respondent. Generaliter itaque curuatura integra figurae est $= \int k \, \mathrm{d}\sigma$, denotante $\mathrm{d}\sigma$ elementum areae figurae, $k$ mensuram curuaturae in quouis puncto. Quod vero attinet ad repraesentationem geometricam huius integralis, praecipua huius rei momenta ad sequentia redeunt. Peripheriae figurae in superficie curua (sub restrictione art. 3) semper respondebit in superficie sphaerica linea in se ipsam rediens. Quae si se ipsam nullibi intersecat, totam superficiem sphaericam in duas partes dirimet, quarum altera respondebit figurae in superficie curua, et cuius area, positiue vel negatiue accipienda, prout respectu peripheriae suae similiter iacet vt figura in superficie curua respectu suae, vel inuerse, exhibebit posterioris curuaturam integram. Quoties vero linea ista se ipsam semel vel pluries secat, exhibebit figuram complicatam, cui tamen area certa aeque legitime tribui potest, ac figuris absque nodis, haecque area, rite intellecta, semper valorem iustum curuaturae integrae exhibebit. Attamen vberiorem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reseruare debemus.

## 7.

Inuestigemus iam formulam ad exprimendam mensuram curuaturae pro quouis puncto superficiei curuae. Denotante $\mathrm{d}\sigma$ aream elementi huius superficiei, $Z\mathrm{d}\sigma$ erit area proiectionis huius elementi in planum coordinatarum $x$, $y$; et perinde, si $\mathrm{d}\Sigma$ est area elementi respondentis in superficie sphaerica, erit $Z \mathrm{d} \Sigma$ area proiectionis ad idem planum: signum positiuum vel negatiuum ipsius $Z$ vero indicabit situm proiectionis similem vel oppositum situi elementi proiecti: manifesto itaque illae proiectiones eandem rationem quoad quantitatem, simulque eandem relationem quoad situm, inter se tenent, vt elementa ipsa. Consideremus iam elementum triangulare in superficie curua, supponamusque coordinatas trium punctorum, quae formant ipsius proiectionem, esse

$$\begin{array}{ll} x, & y \\ x + \mathrm{d}x, & y + \mathrm{d}y \\ x + \delta y, & y + \delta y \end{array}$$

Duplex area huius trianguli exprimetur per formulam

$$\mathrm{d}x \,.\, \delta y - \mathrm{d}y \,.\, \delta x$$

et quidem in forma positiua vel negatiua, prout situs lateris a puncto primo ad tertium respectu lateris a puncto primo ad secundum similis vel oppositus est situi axis coordinatarum $y$ respectu axis coordinatarum $x$.

Perinde si coordinatae trium punctorum, quae formant proiectionem elementi respondentis in superficie sphaerica, a centro sphaerae inchoatae, sunt

$$\begin{array}{ll} X, & Y \\ X + \mathrm{d}X, & Y + \mathrm{d}Y \\ X + \delta X, & Y + \delta Y \end{array}$$

duplex area huius proiectionis exprimetur per

$$\mathrm{d}X \,.\, \delta Y - \mathrm{d}Y \,.\, \delta X$$

de cuius expressionis signo eadem valent quae supra. Quocirca mensura curuaturae in hoc loco superficiei curuae erit

$$k = \frac{\mathrm{d}X \,.\, \delta Y - \mathrm{d}Y \,.\, \delta X}{\mathrm{d}x \,.\, \delta y - \mathrm{d}y \,.\, \delta x}$$

Quodsi iam supponimus, indolem superficiei curuae datam esse seeundum modum tertium in art. 4 consideratum, habebuntur $X$ et $Y$ in forma functionum quantitatum $x$, $y$, vnde erit

$$\mathrm{d}X = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y$$

$$\delta X = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\delta y$$

$$\mathrm{d}Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y$$

$$\delta Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\delta y$$

Substitutis his valoribus, expressio praecedens transit in hanc:

$$k = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)$$

Statuendo vt supra

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u$$

atque insuper

$$\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} = T,\ \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = U,\ \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} = V$$

siue $\mathrm{d}t = T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}u = U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$

habemus ex formulis supra datis

$$X = -tZ,\ Y = -uZ,\ (1 + tt + uu)ZZ = 1$$

atque hinc

$$\mathrm{d}X = -Z\mathrm{d}t - t\mathrm{d}Z$$
$$\mathrm{d}Y = -Z\mathrm{d}u - u\mathrm{d}Z$$
$$(1 + tt + uu)\mathrm{d}Z + Z(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u) = 0$$

siue

$$\mathrm{d}Z = -Z^3(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u)$$
$$\mathrm{d}X = -Z^3(1 + uu)\mathrm{d}t + Z^3tu\mathrm{d}u$$
$$\mathrm{d}Y = +Z^3tu\mathrm{d}t - Z^3(1 + tt)\mathrm{d}u$$

adeoque

$$\frac{dX}{dx} = Z^3(-(1+uu)T + tuU)$$

$$\frac{dX}{dy} = Z^3(-(1+uu)U + tuV)$$

$$\frac{dY}{dx} = Z^3(tuT - (1+tt)U)$$

$$\frac{dY}{dy} = Z^3(tuU - (1+tt)V)$$

quibus valoribus in expressione praecedente substitutis, prodit

$$k = Z^6(TV - UU)(1+tt+uu) = Z^4(TV - UU)$$

$$= \frac{TV - UU}{(1+tt+uu)^2}$$

## 8.

Per idoneam electionem initii et axium coordinatarum facile effici potest, vt pro puncto determinato $A$ valores quantitatum $t$, $u$, $U$ euanescant. Scilicet duae priores conditiones iam adimplentur, si planum tangens in hoc puncto pro plano coordinatarum $x$, $y$ adoptatur. Quarum initium si insuper in puncto $A$ ipso collocatur, manifesto expressio coordinatarum $z$ adipiscitur formam talem

$$z = \tfrac{1}{2}T^\circ xx + U^\circ xy + \tfrac{1}{2}V^\circ yy + \Omega$$

vbi $\Omega$ erit ordinis altioris quam secundi. Mutando dein situm axium ipsarum $x$, $y$ angulo $M$ tali vt habeatur

$$\operatorname{tang} 2M = \frac{2U^\circ}{T^\circ - V^\circ}$$

facile perspicitur, prodituram esse aequationem huius formae

$$z = \tfrac{1}{2}Txx + \tfrac{1}{2}Vyy + \Omega$$

quo pacto etiam tertiae conditioni satisfactum est. Quibus ita factis, patet

I. Si

I. Si superficies curua secetur plano ipsi normali et per axem coordinatarum $x$ transeunte, oriri curuam planam, cuius radius curuaturae in puncto $A$ fiat $= \frac{1}{T}$, signo positiuo vel negatiuo indicante concauitatem vel conuexitatem versus plagam eam, versus quam coordinatae $z$ sunt positiuae.

II. Simili modo $\frac{1}{V}$ erit in puncto $A$ radius curuaturae curvae planae, quae oritur per sectionem superficiei curuae cum plano per axes ipsarum $y$, $z$ transeunte.

III. Statuendo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, fit

$$z = \tfrac{1}{2} (T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2)\, rr + \Omega$$

vnde colligitur, si sectio fiat per planum superficiei in $A$ normale et cum axe ipsarum $x$ angulum $\varphi$ efficiens, oriri curuam planam, cuius radius curuaturae in puncto $A$ sit

$$= \frac{1}{T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2}$$

IV. Quoties itaque habetur $T = V$, radii curuaturae in *cunctis* planis normalibus aequales erunt. Si vero $T$ et $V$ sunt inaequales, manifestum est, quum $T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2$ pro quouis valore anguli $\varphi$ cadat intra $T$ et $V$, radios curuaturae in sectionibus principalibus, in I et II consideratis, referri ad curuaturas extremas, puta alterum ad curuaturam maximam, alterum ad minimam, si $T$ et $V$ eodem signo affectae sint, contra alterum ad maximam conuexitatem, alterum ad maximam concauitatem, si $T$ et $V$ signis oppositis gaudeant. Hae conclusiones omnia fere continent, quae ill. Euler de curuatura superficierum curuarum primus docuit.

V. Mensura curuaturae superficiei curuae in puncto $A$ autem nanciscitur expressionem simplicissimam $k = TV$, vnde habemus

Theorema. *Mensura curuaturae in quouis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator vnitas, denominator au-*

*tem productum duorum radiorum curuaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

Simul patet, mensuram curuaturae fieri positiuam pro superficiebus concauo-concauis vel conuexo-conuexis (quod discrimen non est essentiale), negatiuam vero pro concauo-conuexis. Si superficies constat e partibus vtriusque generis, in earum confiniis mensura curuaturae euanescens esse debebit. De indole superficierum curuarum talium, in quibus mensura curuaturae vbique euanescit, infra pluribus agetur.

9.

Formula generalis pro mensura curuaturae in fine art. 7 proposita, omnium simplicissima est, quippe quae quinque tantum elementa implicat; ad magis complicatam, scilicet nouem elementa inuoluentem, deferimur, si adhibere volumus modum primum indolem superficiei curuae exprimendi. Retinendo notationes art. 4. insuper statuemus:

$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x^2} = P', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y^2} = Q', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}z^2} = R'$$

$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y.\mathrm{d}z} = P'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}z} = Q'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = R''$$

ita vt fiat

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P &= P'\mathrm{d}x + R''\mathrm{d}y + Q''\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}Q &= R''\mathrm{d}x + Q'\mathrm{d}y + P''\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}R &= Q''\mathrm{d}x + P''\mathrm{d}y + R'\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Iam quum habeatur $t = -\frac{P}{R}$, inuenimus per differentiationem

$$RR\mathrm{d}t = -R\mathrm{d}P + P\mathrm{d}R = (PQ'' - RP')\mathrm{d}x + (PP'' - RR'')\mathrm{d}y + (PR' - RQ'')\mathrm{d}z,$$

siue, eliminata $\mathrm{d}z$ adiumento aequationis $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$,

$$R^3\,\mathrm{d}t = (-RRP' + 2PRQ'' - PPR')\mathrm{d}x + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\mathrm{d}y.$$

Prorsus simile modo obtinemus

$$R^3\,\mathrm{d}u = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\mathrm{d}x + (-RRQ' + 2QRP'' - QQR')\mathrm{d}y$$

Hinc itaque colligimus

$$R^3\,T = -RRP' + 2PRQ'' - PPR'$$
$$R^3\,U = PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR''$$
$$R^3\,V = -RRQ' + 2QRP'' - QQR'$$

Substituendo hos valores in formula art. 7, obtinemus pro mensura curuaturae $k$ expressionem symmetricam sequentem:

$$(PP + QQ + RR)^2 k =$$
$$PP(Q'R' - P''P'') + QQ(P'R' - Q''Q'') + RR(P'Q' - R''R'')$$
$$+ 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'')$$

## 10.

Formulam adhuc magis complicatam, puta e quindecim elementis conflatam, obtinemus, si methodum generalem secundam, indolem superficierum curuarum exprimendi, sequimur. Magni tamen momenti est, hanc quoque elaborare. Retinendo signa art. 4, insuper statuemus

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p^2} = \alpha,\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \alpha',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q^2} = \alpha''$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p^2} = \beta,\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \beta',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q^2} = \beta''$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p^2} = \gamma',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \gamma',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q^2} = \gamma''$$

Praeterea breuitatis caussa faciemus

$$bc' - cb' = A$$
$$ca' - ac' = B$$
$$ab' - ba' = C$$

Primo obseruamus, haberi $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, siue $dz = -\frac{A}{C}\,dx - \frac{B}{C}\,dy$; quatenus itaque $z$ spectatur tamquam functio ipsarum $x$, $y$, fit

$$\frac{dz}{dx} = t = -\frac{A}{C}$$

$$\frac{dz}{dy} = u = -\frac{B}{C}$$

Porro deducimus, ex $dx = a\,dp + a'\,dq$, $dy = b\,dp + b'\,dq$,

$$C\,dp = b'\,dx - a'\,dy$$

$$C\,dq = -b\,dx + a\,dy$$

Hinc obtinemus differentialia completa ipsarum $t$, $u$

$$\begin{aligned} C^3\,dt = {} & \left(A\frac{dC}{dp} - C\frac{dA}{dp}\right)(b'\,dx - a'\,dy) \\ & + \left(C\frac{dA}{dq} - A\frac{dC}{dq}\right)(b\,dx - a\,dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^3\,du = {} & \left(B\frac{dC}{dp} - C\frac{dB}{dp}\right)(b'\,dx - a'\,dy) \\ & + \left(C\frac{dB}{dq} - B\frac{dC}{dq}\right)(b\,dx - a\,dy \end{aligned}$$

Iam si in his formulis substituimus

$$\frac{dA}{dp} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma$$

$$\frac{dA}{dq} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma'$$

$$\frac{dB}{dp} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha$$

$$\frac{dB}{dq} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha'$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

atque perpendimus, valores differentialium $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}u$ sic prodeuntium, aequales esse debere, independenter a differentialibus $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, quantitatibus $T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y$, $U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$ resp. inueniemus, post quasdam transformationes satis obuias

$$\begin{aligned} C^3 T = {} & \alpha A b'b' + \beta B b'b' + \gamma C b'b' \\ & - 2\alpha' A b b' - 2\beta' B b b' - 2\gamma' C b b' \\ & + \alpha'' A b b + \beta'' B b b + \gamma'' C b b \\ C^3 U = {} & - \alpha A a' b' - \beta B a' b' - \gamma C a' b' \\ & + \alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\ & - \alpha'' A a b - \beta'' B a b - \gamma'' C a b \\ C^3 V = {} & \alpha A a' a' + \beta B a' a' + \gamma C a' a' \\ & - 2\alpha' A a a' - 2\beta' B a a' - 2\gamma' C a a' \\ & + \alpha'' A a a + \beta'' B a a + \gamma'' C a a \end{aligned}$$

Si itaque breuitatis caussa statuimus

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D' \;\ldots\ldots\; (2)$$

$$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'' \;\ldots\ldots\; (3)$$

fit

$$C^3 T = D b'b' - 2D' b b' + D'' b b$$

$$C^3 U = - D a' b' + D'(ab' + ba') - D'' a b$$

$$C^3 V = D a' a' - 2D' a a' + D'' a a$$

Hinc inuenimus, euolutione facta,

$$C^6 (TV - UU) = (DD'' - D'D')(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'D')CC$$

et proin formulam pro mensura curuaturae

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}$$

## 11.

Formulae modo inuentae iam aliam superstruemus, quae inter fertilissima theoremata in doctrina de superficiebus curuis referenda est. Introducamus sequentes notationes:

$$aa + bb + cc = E$$
$$aa' + bb' + cc' = F$$
$$a'a' + b'b' + c'c' = G$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = m \ldots\ldots (4)$$
$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m' \ldots\ldots (5)$$
$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'' \ldots\ldots (6)$$
$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n \ldots\ldots (7)$$
$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n' \ldots\ldots (8)$$
$$a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n'' \ldots\ldots (9)$$
$$AA + BB + CC = EG - FF = \Delta$$

Eliminemus ex aequationibus 1, 4, 7, quantitates $\beta$, $\gamma$, quod fit multiplicando illas per $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$, et addendo: ita oritur

$$(A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC))\alpha$$
$$= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC)$$

quam aequationem facile transformamus in hanc:

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE)$$

Simili modo eliminatio quantitatum $\alpha$, $\gamma$ vel $\alpha$, $\beta$ ex iisdem aequationibus suppeditat

$$BD = \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE)$$
$$CD = \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE)$$

Multiplicando has tres aequationes per $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ et addendo obtinemus

$$DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE) \ldots (10)$$

Si perinde tractamus aequationes 2, 5, 8, prodit

$$AD' = \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E)$$
$$BD' = \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E)$$
$$CD' = \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E)$$

quibus aequationibus per $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ multiplicatis, additio suppeditat:

$$D'D' = (\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E)$$

Combinatio huius aequationis cum aequatione (10) producit

$$DD'' - D'D' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma')\Delta$$
$$+ E(n'n' - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'm' - mm'')$$

Iam patet esse $\frac{dE}{dp} = 2m$, $\frac{dE}{dq} = 2m'$, $\frac{dF}{dp} = m' + n$, $\frac{dF}{dq} = m'' + n$,

$$\frac{dG}{dp} = 2n', \quad \frac{dG}{dq} = 2n'', \text{ siue}$$

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad m' = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad m'' = \frac{dF}{dq} - \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}$$

$$n = \frac{dF}{dq} - \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad n' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \quad n'' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq}$$

Porro facile corfirmatur, haberi

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma' = \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddE}{dq^2} + \frac{ddF}{dp\,.\,dq} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddG}{dp^2}$$

Quodsi iam has expressiones diuersas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, peruenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus $F$, $F$, $G$ atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$4(EG - FF)^2 k = E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\,\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right)$$
$$+ F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\,\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq}\right.$$
$$\left. + 4\,\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} - 2\,\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right)$$
$$+ G\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\cdot\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right)$$

$$- 2 (EG - FF) \left(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q^2} - 2\,\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p^2}\right).$$

## 12.

Quum indefinite habeatur

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2,$$

patet, $\surd\,(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)$ esse expressionem generalem elementi linearis in superficie curua. Docet itaque analysis in art. praec. explicata, ad inueniendam mensuram curuaturae haud opus esse formulis finitis, quae coordinatas $x$, $y$, $z$ tamquam functiones indeterminatarum $p$, $q$ exhibeant, sed sufficere expressionem generalem pro magnitudine cuiusuis elementi linearis. Progrediamur ad aliquot applicationes huius grauissimi theorematis.

Supponamus superficiem nostram curuam explicari posse in aliam superficiem, curuam seu planam, ita vt cuiuis puncto prioris superficiei per coordinatas $x$, $y$, $z$ determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint $x'$, $y'$, $z'$. Manifesto itaque $x'$, $y'$, $z'$ quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum $p$, $q$, vnde pro elemento $\surd\,(\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2)$ prodibit expressio talis

$$\surd\,(E'\mathrm{d}p^2 + 2F'\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G'\mathrm{d}q^2)$$

denotantibus etiam $E'$, $F'$, $G'$ functiones ipsarum $p$, $q$. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in vtraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E = E',\ F = F',\ G = G'.$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curua in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curuaturae in singulis punctis inuariata manet.*

Manifesto quoque *quaeuis pars finita superficiei curuae post explicationem in aliam superficiem eandem curuaturam integram retinebit.*

Casum specialem, ad quem geometrae hactenus inuestigationes suas restrinxerunt, sistunt superficies in planum explicabiles. Theoria nostra sponte docet, talium superficierum mensuram curuaturae in quouis puncto fieri $= 0$, quocirca, si earum indoles secundum modum tertium exprimitur, vbique erit

$$\frac{ddz}{dx^2} \cdot \frac{ddz}{dy^2} - \left(\frac{ddz}{dx \cdot dy}\right)^2 = 0$$

quod criterium, dudum quidem notum, plerumque nostro saltem iudicio haud eo rigore qui desiderari posset demonstratur.

## 13.

Quae in art. praec. exposuimus, cohaerent cum modo peculiari superficies considerandi, summopere digno, qui a geometris diligenter excolatur. Scilicet quatenus superficies consideratur non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum, cuius dimensio vna pro euanescente habetur, flexile quidem, sed non extensibile, qualitates superficiei partim a forma pendent, in quam illa reducta concipitur, partim absolutae sunt, atque inuariatae manent, in quamcunque formam illa flectatur. Ad has posteriores, quarum inuestigatio campum geometriae nouum fertilemque aperit, referendae sunt mensura curuaturae atque curuatura integra eo sensu, quo hae expressiones a nobis accipiuntur; porro huc pertinet doctrina de lineis breuissimis, pluraque alia, de quibus in posterum agere nobis reseruamus. In hoc considerationis modo superficies plana atque superficies in planum explicabilis, e. g. cylindrica, conica etc. tamquam essentialiter identicae spectantur, modusque genuinus indolem superficiei ita consideratae generaliter exprimendi semper innititur formulae $\sqrt{(Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2)}$, quae nexum elementi cum duabus indeterminatis $p$, $q$ sistit. Sed antequam hoc argumentum vlterius prosequamur, principia theoriae linearum breuissimarum in superficie curua data praemittere oportet.

## 14.

Indoles lineae curuae in spatio generaliter ita datur, vt coordinatae $x$, $y$, $z$ singulis illius punctis respondentes exhibeantur in forma functionum vnius variabilis, quam per $w$ denotabimus. Longitudo talis lineae a puncto initiali arbitrario vsque ad punctum, cuius coordinatae sunt $x$, $y$, $z$, exprimitur per integrale

$$\int \mathrm{d}w \,.\, \sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2\right)}$$

Si supponimus, situm lineae curuae variationem infinite paruam pati, ita vt coordinatae singulorum punctorum accipiant variationes $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, variatio totius longitudinis inuenitur

$$= \int \frac{\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}y \,.\, \mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z \,.\, \mathrm{d}\delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}}$$

quam expressionem in hanc formam transmutamus:

$$\frac{\mathrm{d}x \,.\, \delta x + \mathrm{d}y \,.\, \delta y + \mathrm{d}z \,.\, \delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}} - \int \left(\delta x \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z^2)}}\right.$$

$$\left. + \delta y \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}} + \delta z \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}}\right)$$

In casu eo, vbi linea est breuissima inter puncta sua extrema, constat, ea, quae hic sub signo integrali sunt, euanescere debere. Quatenus linea esse debet in superficie data, cuius indoles exprimitur per aequationem $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$, etiam variationes $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ satisfacere debent aequationi $P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$, vnde per principia nota facile colligitur, differentialia

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\ \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\ \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$

resp. quantitatibus $P$, $Q$, $R$ proportionalia esse debere. Iam sit $\mathrm{d}r$ elementum lineae curuae, $\lambda$ punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem huius elementi, $L$ punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem normalis in superficiem curuam; denique sint $\xi$, $\eta$, $\zeta$ coordinatae puncti $\lambda$, atque $X$, $Y$, $Z$ coordinatae puncti $L$ respectu centri sphaerae. Ita erit

$$\mathrm{d}x = \xi\,\mathrm{d}r,\ \mathrm{d}y = \eta\,\mathrm{d}r,\ \mathrm{d}z = \zeta\,\mathrm{d}r$$

vnde colligimus, differentialia illa fieri $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\zeta$. Et quum quantitates $P$, $Q$, $R$ proportionales sint ipsis $X$, $Y$, $Z$, character lineae breuissimae consistit in aequationibus

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{X} = \frac{\mathrm{d}\eta}{Y} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{Z}$$

Ceterum facile perspicitur, $\sqrt{(\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2)}$ aequari arculo in superficie sphaerica, qui mensurat angulum inter directiones tangentium in initio et fine elementi $\mathrm{d}r$, adeoque esse $= \frac{\mathrm{d}r}{\varrho}$ si $\varrho$ denotet radium curuaturae in hoc loco curuae breuissimae; ita fiet

$$\varrho\,\mathrm{d}\xi = X\mathrm{d}r,\ \varrho\,\mathrm{d}\eta = Y\mathrm{d}r,\ \varrho\,\mathrm{d}\zeta = Z\mathrm{d}r$$

## 15.

Supponamus, in superficie curua a puncto dato $A$ proficisci innumeras curuas breuissimas, quas inter se distinguemus per angulum, quem constituit singularum elementum primum cum elemento primo vnius ex his lineis pro prima assumtae: sit $\varphi$ ille angulus, vel generalius functio illius anguli, nec non $r$ longitudo talis lineae breuissimae a puncto $A$ vsque ad punctum, cuius coordinatae sunt $x$, $y$, $z$. Quum itaque valoribus determinatis variabilium $r$, $\varphi$ respondeant puncta determinata superficiei, coordinatae $x$, $y$, $z$ considerari possunt tamquam functiones ipsarum $r$, $\varphi$. Notationes $\lambda$, $L$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $X$, $Y$, $Z$ in eadem significatione retinebimus, in qua in art. praec. acceptae fuerunt, modo indefinite ad punctum indefinitum cuiuslibet linearum breuissimarum referantur.

Lineae breuissimae omnes, quae sunt aequalis longitudinis $r$, terminabuntur ad aliam lineam, cuius longitudinem ab initio arbitrario numeratam denotamus per $\nu$. Considerari poterit itaque $\nu$ tamquam functio indeterminatarum $r$, $\varphi$, et si per $\lambda'$ designamus punctum in superficie sphaerica respondens directioni elementi $d\nu$, nec non per $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ coordinatas huius puncti respectu centri sphaerae, habebimus:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = \xi' \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varphi},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \eta' \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varphi},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = \zeta' \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varphi}$$

Hinc et ex

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \xi,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = \eta,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \zeta$$

sequitur

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\lambda\lambda' \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varphi}$$

Membrum primum huius aequationis, quod etiam erit functio ipsarum $r$, $\varphi$, per $S$ denotamus; cuius differentiatio secundum $r$ suppeditat:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{dd}x}{\mathrm{d}r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2\right)}{\mathrm{d}\varphi}$$
$$= \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)}{\mathrm{d}\varphi}$$

Sed $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$, adeoque ipsius differentiale $= 0$; et per art, praec. habemus, si etiam hic $\varrho$ denotat radium curuaturae in linea $r$,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\rho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\rho}, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\rho}$$

Ita obtinemus

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\rho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = 0$$

quoniam manifesto $\lambda'$ iacet in circulo maximo, cuius polus $L$. Hinc itaque concludimus, $S$ independentem esse ab $r$ et proin functionem solius $\varphi$. At pro $r = 0$ manifesto fit $\nu = 0$, et proin etiam $\frac{d\nu}{d\varphi} = 0$, nec non $S = 0$ independenter a $\varphi$. Necessario itaque generaliter esse debebit $S = 0$, adeoque $\cos\lambda\lambda' = 0$, i. e. $\lambda\lambda' = 90°$. Hinc colligimus

THEOREMA. *Ductis in superficie curua ab eodem puncto initiali innumeris lineis breuissimis aequalis longitudinis, linea earum extremitates iungens ad illas singulas erit normalis.*

Operae pretium esse duximus, hoc theorema e proprietate fundamentali linearum breuissimarum deducere: ceterum eius veritas etiam absque calculo per sequens ratiocinium intelligi potest. Sint $AB$, $AB'$ duae lineae breuissimae eiusdem longitudinis, angulum infinite paruum ad $A$ includentes, supponamusque, alterutrum angulorum elementi $BB'$ cum lineis $BA$, $B'A$ differre quantitate finita ab angulo recto, vnde per legem continuitatis alter maior alter minor erit angulo recto. Supponamus, angulum ad $B$ esse $= 90° - \omega$, capiamusque in linea $BA$ punctum $C$ ita vt sit $BC = BB' . \operatorname{cosec} \omega$: hinc quum triangulum infinite paruum $BB'C$ tamquam planum tractare liceat, erit $CB' = BC . \cos\omega$, et proin $AC + CB' = AC + BC . \cos\omega = AB - BC . (1 - \cos\omega) = AB' - BC\,(1 - \cos\omega)$, i. e. transitus a puncto $A$ ad $B'$ per punctum $C$ breuior linea breuissima, $Q . E . A.$

## 16.

Theoremati art. praec. associamus aliud, quod ita enunciamus. *Si in superficie curua concipitur linea qualiscunque, a cuius punctis singulis proficiscantur sub angulis rectis et versus eandem plagam innumerae lineae breuissimae aequalis longitudinis, curua, quae earum extremitates alteras iungit, illas singulas sub angulis rectis secabit.* Ad demonstrationem nihil in analysi praecedente mutandum est, nisi quod $\varphi$ designare debet longitudinem curuae *datae* inde a puncto arbitrario numeratam, aut si mauis functionem huius longitudinis; ita omnia ratiocinia etiamnum valebunt, ea modificatione, quod veritas aequationis $S = 0$ pro $r = 0$ nunc iam in ipsa hypothesi implicatur. Ceterum hoc alterum theorema generalius est praecedente, quod adeo in illo comprehendi censeri potest, dum pro linea data adoptamus circulum infinite paruum circa centrum $A$ descriptum. Denique monemus, hic quoque considerationes geometricas analyseos vice fungi posse, quibus tamen quum satis obuiae sint hic non immoramur.

## 17.

Reuertimur ad formulam $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$, quae indefinite magnitudinem elementi linearis in superficie curua exprimit, atque ante omnia significationem geometricam coëfficientium $E$, $F$, $G$ examinamus. Iam in art. 5 monuimus, in superficie curua concipi posse duo systemata linearum, alterum, in quibus singulis sola $p$ sit variabilis, $q$ constans; alterum, in quibus sola $q$ variabilis, $p$ constans. Quodlibet punctum superficiei considerari potest tamquam intersectio lineae primi systematis cum linea secundi: tuncque elementum lineae primae huic puncto adiacens et variationi $\mathrm{d}p$ respondens erit $= \sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p$, nec non elementum lineae secundae respondens variationi $\mathrm{d}q$ erit $= \sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q$; denique denotando per $\omega$ angulum inter haec elementa, facile perspicitur fieri cos $\omega$

$= \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Area autem elementi parallelogrammatici in superficie curua inter duas lineas primi systematis, quibus respondent $q$, $q + \mathrm{d}q$, atque duas lineas systematis secundi quibus respondent $p$, $p + \mathrm{d}p$, erit $\sqrt{(EG - FF)}\, \mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q$.

Linea quaecunque in superficie curua ad neutrum illorum systematum pertinens, oritur, dum $p$ et $q$ concipiuntur esse functiones vnius variabilis nouae, vel altera illarum functio alterius. Sit $s$ longitudo talis curuae ab initio arbitrario numerata et versus directionem vtramuis pro positiua habita. Denotemus per $\theta$ angulum, quem efficit elementum $\mathrm{d}s = \sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$ cum linea primi systematis per initium elementi ducta, et quidem ne vlla ambiguitas remaneat, hunc angulum semper ab eo ramo illius lineae, in quo valores ipsius $p$ crescunt, inchoari, et versus eam plagam positiue accipi supponemus, versus quam valores ipsius $q$ crescunt. His ita intellectis facile perspicitur haberi

$$\cos\theta \,.\, \mathrm{d}s = \sqrt{E} \,.\, \mathrm{d}p + \sqrt{G} \,.\, \cos\omega \,.\, \mathrm{d}q = \frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\theta \,.\, \mathrm{d}s = \sqrt{G} \,.\, \sin\omega \,.\, \mathrm{d}q = \frac{\sqrt{(EG - FF)} \,.\, \mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

## 18.

Inuestigabimus nunc, quaenam sit conditio, vt haec linea sit breuissima. Quum ipsius longitudo $s$ expressa sit per integrale

$$s = \int \sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$$

conditio minimi requirit, vt variatio huius integralis a mutatione infinite parua tractus lineae oriunda fiat $= 0$. Calculus ad propositum nostrum in hoc casu commodius absoluitur, si $p$ tamquam functionem ipsius $q$ consideramus. Quo pacto, si variatio per characteristicam $\delta$ denotatur, habemus

$$\delta s = \int \frac{(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}q^2)\,\delta p + (2E\mathrm{d}p + 2F\mathrm{d}q)\,\mathrm{d}\delta p}{2\,\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}.\delta p + \int \delta p.\Big(\frac{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2}{2\,\mathrm{d}s} - \mathrm{d}\,.\,\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\Big)$$

constatque, quae hic sunt sub signo integrali, independenter a $\delta p$ euanescere debere. Fit itaque

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2 = 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\,\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$$

$$= 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\sqrt{E}.\cos\theta = \frac{\mathrm{d}s.\mathrm{d}E.\cos\theta}{\sqrt{E}} - 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}\theta.\sqrt{E}.\sin\theta$$

$$= \frac{(E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q)\,\mathrm{d}E}{E} - 2\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$

$$= \Big(\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{E}\Big).\Big(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q\Big) - 2\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$

Hinc itaque nanciscimur aequationem conditionalem pro linea breuissima sequentem:

$$\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p + \tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

quam etiam ita scribere licet

$$\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\mathrm{d}E + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Ceterum adiumento aequationis

$$\cot\theta = \frac{E}{\sqrt{(EG - FF)}}.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + \frac{F}{\sqrt{(EG - FF)}}$$

ex

ex illa aequatione angulus $\theta$ eliminari, atque sic aequatio differentio-differentialis inter $p$ et $q$ euolui potest, quae tamen magis complicata, et ad applicationes minus vtilis euaderet, quam praecedens.

## 19.

Formulae generales, quas pro mensura curuaturae et pro variatione directionis lineae breuissimae in artt. 11, 18 eruimus, multo simpliciores fiunt, si quantitates $p$, $q$ ita sunt electae, vt lineae primi systematis lineas secundi systematis vbique orthogonaliter secent, i. e. vt generaliter habeatur $\omega = 90°$, siue $F = 0$. Tunc scilicet fit, pro mensura curuaturae,

$$4EEGGk = E.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} + E\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)^2 + G.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} + G\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\right)^2$$
$$- 2EG\left(\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} + \frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}\right),$$

et pro variatione anguli $\theta$

$$\sqrt{EG}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Inter varios casus, in quibus haec conditio orthogonalitatis valet, primarium locum tenet is, vbi lineae omnes alterutrius systematis, e. g. primi, sunt lineae breuissimae. Hic itaque pro valore constante ipsius $q$, angulus $\theta$ fit $= 0$, vnde aequatio pro variatione anguli $\theta$ modo tradita docet, fieri debere $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} = 0$, siue coëfficientem $E$ a $q$ independentem, i. e. $E$ esse debet vel constans vel functio solius $p$. Simplicissimum erit, pro $p$ adoptare longitudinem ipsam cuiusque lineae primi systematis, et quidem, quoties omnes lineae primi systematis in vno puncto concurrunt, ab hoc puncto numeratam, vel, si communis intersectio non adest, a qualibet linea secundi systematis. Quibus ita intellectis patet, $p$ et $q$ iam eadem denotare, quae in artt. 15, 16 per $r$ et $\varphi$ expresseramus, atque fieri $E = 1$. Ita duae formulae praecedentes iam transeunt in has:

$$4\,G\,G\,k = \left(\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,p}\right)^2 - 2\;G\;\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,p^2}$$

$$\sqrt{G}\;.\;\mathrm{d}\,\theta = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,p}\cdot\mathrm{d}\,q$$

vel statuendo $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,p^2},\quad \mathrm{d}\,\theta = -\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,p}\;.\;\mathrm{d}\,q$$

Generaliter loquendo $m$ erit functio ipsarum $p$, $q$ atque $m\,\mathrm{d}\,q$ expressio elementi cuiusuis lineae secundi systematis. In casu speciali autem, vbi omnes lineae $p$ ab eodem puncto proficiscuntur, manifesto pro $p = 0$ esse debet $m = 0$; porro si in hoc casu pro $q$ adoptamus angulum ipsum, quem elementum primum cuiusuis lineae primi systematis facit cum elemento alicuius ex ipsis ad arbitrium electae, quum pro valore infinite paruo ipsius $p$, elementum lineae secundi systematis (quae considerari potest tamquam circulus radio $p$ descriptus), sit $= p\,\mathrm{d}\,q$, erit pro valore infinite paruo ipsius $p$, $m = p$, adeoque, pro $p = 0$ simul $m = 0$ et $\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,p} = 1$.

## 20.

Immoremur adhuc iidem suppositioni, puta $p$ designare indefinite longitudinem lineae breuissimae a puncto determinato $A$ ad punctum quodlibet superficiei ductum, atque $q$ angulum, quem primum elementum huius lineae efficit cum elemento primo alicuius lineae breuissimae ex $A$ proficiscentis datae. Sit $B$ punctum determinatum in hac linea pro qua $q = 0$, atque $C$ aliud punctum determinatum superficiei, pro quo valorem ipsius $q$ simpliciter per $A$ designabimus. Supponamus, puncta $B$, $C$ per lineam breuissimam iuncta, cuius partes, inde a puncto $B$ numeratas, indefinite vt in art. 18 per $s$ denotabimus, nec non perinde vt illic, per $\theta$ angulum, quem quoduis elementum $\mathrm{d}s$ facit cum elemento $\mathrm{d}p$: denique sint $\theta^\circ$, $\theta'$ valores anguli $\theta$ in punctis $B$, $C$. Habemus itaque in superficie curua triangulum lineis breuissimis inclusum, eiusque anguli ad $B$ et $C$, per has ipsas literas simpliciter designandi aequales erunt ille complemento anguli $\theta^\circ$ ad $180^\circ$, hic ipsi angulo $\theta'$. Sed quum analysin nostram inspicienti facile pateat, omnes angulos non per gradus sed per numeros expressos concipi, ita vt angulus $57^\circ\, 17'\, 45''$, cui respondet arcus radio aequalis, pro vnitate habeatur, statuere oportet, denotando per $2\pi$ peripheriam circuli

$$\theta^\circ = \pi - B,\ \theta' = C$$

Inquiramus nunc in curuaturam integram huius trianguli, quae fit $= \int k\, \mathrm{d}\sigma$, denotante $\mathrm{d}\sigma$ elementum superficiale trianguli; quare quum hoc elementum exprimatur per $m\, \mathrm{d}p\, .\, \mathrm{d}q$, eruere oportet integrale $\int\int k\, m\, \mathrm{d}p\, .\, \mathrm{d}q$ supra totam trianguli superficiem. Incipiamus ab integratione secundum $p$, quae propter $k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p^2}$, suppeditat $\mathrm{d}q$. (Const. $- \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$), pro curuatura integra areae iacentis inter lineas primi systematis quibus respondent valores indeterminatae secundae $q$, $q + \mathrm{d}q$: quum haec curuatura pro $p = 0$ euanescere debeat, quantitas constans per integrationem introducta aequalis esse debet valori ipsius $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ pro $p = 0$, i. e. vnitati. Habemus itaque $\mathrm{d}q\ (1 - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p})$, vbi pro $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ accipere oportet valorem respondentem fini illius areae in linea $CB$. In hac linea vero fit per art. praec. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}\, .\, \mathrm{d}q = -\mathrm{d}\theta$, vnde expressio nostra mutatur in $\mathrm{d}q + \mathrm{d}\theta$. Accedente iam integratione altera a $q = 0$ vsque ad $q = A$ extendenda, obtinemus curuaturam integram trianguli $= A + \theta' - \theta^\circ$ $= A + B + C - \pi$.

Curuatura integra aequalis est areae eius partis superficiei sphaericae, quae respondet triangulo, signo positiuo vel negatiuo affectae, prout superficies curua, in qua triangulum iacet, est concauo-concaua vel concauo-conuexa: pro vnitate areae accipiendum est quadratum, cuius latus est vnitas (radius sphaerae), quo pacto superficies tota sphaerae fit $= 4\pi$. Est itaque pars superficiei sphaericae triangulo respondens ad sphaerae superficiem integram vt $\pm (A + B + C - \pi)$ ad $4\pi$. Hoc theorema, quod ni fallimur ad elegantissima in theoria superficierum curuarum referendum esse videtur, etiam sequenti modo enunciari potest:

*Excessus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-concaua formati vltra 180°, vel defectus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-conuexa formati a 180° mensuratur per aream partis superficiei sphaericae, quae illi triangulo per directiones normalium respondet, si superficies integra 720 gradibus aequiparatur.*

Generalius in quouis polygono $n$ laterum, quae singula formantur per lineas breuissimas, excessus summae angulorum supra $2n-4$ rectos, vel defectus a $2n-4$ rectis (pro indole curuaturae superficiei), aequatur areae polygoni respondentis in superficie sphaerica, dum tota superficies sphaerae 720 gradibus aequiparatur, vti per discerptionem polygoni in triangula e theoremate praecedente sponte demanat.

## 21.

Restituamus characteribus $p$, $q$, $E$, $F$, $G$, $\omega$ significationes generales, quibus supra accepti fuerant, supponamusque, indolem superficiei curuae praeterea alio simili modo per duas alias variabiles $p'$, $q'$ determinari, vbi elementum lineare indefinitum exprimatur per

$$\sqrt{(E'\mathrm{d}p'^2 + 2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q' + G'\mathrm{d}q'^2)}$$

Ita cuiuis puncto superficiei per valores determinatos variabilium $p$, $q$ definito respondebunt valores determinati variabilium $p'$, $q'$, quocirca hae erunt functiones ipsarum $p$, $q$, e quarum differentiatione prodire supponemus

$$\mathrm{d}p' = \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q$$

Iam proponimus nobis inuestigare significationem geometricam horum coëfficientium $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

*Quatuor* itaque nunc systemata linearum in superficie curua concipi possunt, pro quibus resp. $q$, $p$, $q'$, $p'$ sint constantes. Si per punctum determinatum, cui respondent variabilium valores $p$, $q$, $p'$, $q'$, quatuor lineas ad singula illa systemata pertinentes ductas supponimus, harum elementa, variationibus positiuis $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$, respondentes erunt

$$\sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p,\quad \sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q,\quad \sqrt{E'}\,.\,\mathrm{d}q',\quad \sqrt{G'}\,.\,\mathrm{d}q'.$$

Angulos, quos horum elementorum directiones faciunt cum directione fixa arbitraria, denotabimus per $M$, $N$, $M'$, $N'$, numerando eo sensu, quo iacet secunda respectu primae, ita vt $\sin(N - M)$ fiat quantitas positiua: eodem sensu iacere supponemus (quod licet) quartam respectu tertiae, ita vt etiam $\sin(N' - M')$ sit quantitas positiua. His ita intellectis, si consideramus punctum aliud, a priori infinite parum distans, cui respondeant valores variabilium $p + \mathrm{d}p$, $q + \mathrm{d}q$, $p' + \mathrm{d}p'$, $q' + \mathrm{d}q'$, leui attentione adhibita cognoscemus, fieri generaliter, i. e. independenter a valoribus variationum $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$,

$$\sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p\,.\sin M + \sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q\,.\sin N = \sqrt{E'}\,.\,\mathrm{d}p'\,.\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,\mathrm{d}q'\,.\sin N'$$

quum vtraque expressio nihil aliud sit, nisi distantia puncti noui a linea, a qua anguli directionum incipiunt. Sed habemus, per notationem iam supra introductam $N - M = \omega$, et per analogiam statuemus $N' - M' = \omega'$, nec non insuper $N - M' = \psi$. Ita aequatio modo inuenta exhiberi potest in forma sequente

$$\sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p\,.\,\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q\,.\,\sin(M'+\psi)$$
$$=\sqrt{E'}\,.\,\mathrm{d}p'\,.\,\sin M'+\sqrt{G'}\,.\,\mathrm{d}q'\,\sin(M'+\omega')$$

vel ita

$$\sqrt{E}.\mathrm{d}p\,.\sin(N'-\omega-\omega')+\psi)+\sqrt{G}.\mathrm{d}q.\sin(N'-\omega'+\psi)$$
$$=\sqrt{E'}.\mathrm{d}p'\,\sin(N'-\omega')+\sqrt{G'}.\mathrm{d}q'\,\sin N'$$

Et quum aequatio manifesto independens esse debeat a directione initiali, hanc ad lubitum accipere licet. Statuendo itaque in forma secunda $N'=0$, vel in prima $M'=0$, obtinemus aequationes sequentes:

$$\sqrt{E'}\,.\sin\omega'\,.\,\mathrm{d}p'=\sqrt{E}.\sin(\omega+\omega'-\psi).\mathrm{d}p+\sqrt{G}.\sin(\omega'-\psi).\mathrm{d}q$$
$$\sqrt{G'}\,.\,\sin\omega'\,.\,\mathrm{d}q'=\sqrt{E}\,.\,\sin(\psi-\omega)\,.\,\mathrm{d}p+\sqrt{G}\,.\sin\psi\,.\,\mathrm{d}q$$

quae aequationes quum identicae esse debeant cum his

$$\mathrm{d}p'=\alpha\,\mathrm{d}p+\beta\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q'=\gamma\,\mathrm{d}p+\delta\,\mathrm{d}q$$

suppeditabunt determinationem coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Erit scilicet

$$\alpha=\sqrt{\frac{E}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega+\omega'-\psi)}{\sin\omega'},\quad \beta=\sqrt{\frac{G}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega'-\psi)}{\sin\omega'}$$
$$\gamma=\sqrt{\frac{E}{G'}}\cdot\frac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega'},\quad \delta=\sqrt{\frac{G}{G'}}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin\omega'}$$

Adiungi debent aequationes $\cos\omega=\dfrac{F}{\sqrt{EG}}$, $\cos\omega'=\dfrac{F'}{\sqrt{E'G'}}$, $\sin\omega=\sqrt{\dfrac{EG-FF}{EG}}$, $\sin\omega'=\sqrt{\dfrac{E'G'-F'F'}{E'G'}}$, vnde quatuor aequationes ita quoque exhiberi possunt

$$\alpha\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{EG'}\,.\,\sin(\omega+\omega'-\psi)$$
$$\beta\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{GG'}\,.\,\sin(\omega'-\psi)$$
$$\gamma\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{EE'}\,.\,\sin(\psi-\omega)$$
$$\delta\sqrt{(E'G'-F'F')}=\sqrt{GE'}\,.\,\sin\psi$$

Quum per substitutiones $\mathrm{d}p'=\alpha\,\mathrm{d}p+\beta\,\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}q'=\gamma\,\mathrm{d}p+\delta\,\mathrm{d}q$

trinomium $E'\mathrm{d}p'^2 + 2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q' + G'\mathrm{d}q'^2$ transire debeat in $E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2$, facile obtinemus

$$EG - FF = (E'G' - F'F')(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

et quum vice versa trinomium posterius rursus transire debeat in prius per substitutionum

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\,\mathrm{d}p = \delta\,\mathrm{d}p' - \beta\,\mathrm{d}q',\ (\alpha\delta-\beta\gamma)\,\mathrm{d}q = -\gamma\,\mathrm{d}p' + \alpha\,\mathrm{d}q',$$

inuenimus

$$E\delta\delta - 2F\gamma\delta + G\gamma\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot E'$$

$$E\beta\delta - F(\alpha\delta+\beta\gamma) + G\alpha\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot F'$$

$$E\beta\beta - 2F\alpha\beta + G\alpha\alpha = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot G'$$

## 22.

**A** disquisitione generali art. praec. descendimus ad applicationem latissime patentem, vbi, dum $p$ et $q$ etiamnum significatione generalissima accipiuntur, pro $p'$, $q'$, adoptamus quantitates in art. 15. per $r$, $\varphi$ denotatas, quibus characteribus etiam hic vtemur, scilicet vt pro quouis puncto superficiei $r$ sit distantia minima a puncto determinato, atque $\varphi$ angulus in hoc puncto inter elementum primum ipsius $r$ atque directionem fixam. Ita habemus $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega' = 90°$: statuemus insuper $\sqrt{G'} = m$, ita vt elementum lineare quodcunque fiat $= \sqrt{(\mathrm{d}r^2 + mm\,\mathrm{d}\varphi^2)}$. Hinc quatuor aequationes in art. praec pro $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, erutae, suppeditant:

$$\sqrt{E}.\cos(\omega - \psi) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sqrt{G}.\cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\sqrt{E}.\sin(\psi - \omega) = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \ldots\ldots (3)$$

$$\sqrt{G}\,.\sin\psi = m\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}\,\ldots\ldots\ldots (1)$$

Vltima et penultima vero has

$$EG - FF = E\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 - 2F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} + G\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2\ldots (5)$$

$$\left(E.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} = \left(F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - G.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\ldots (6)$$

Ex his aequationibus petenda est determinatio quantitatum $r$, $\varphi$, $\psi$ et (si opus videatur) $m$, per $p$ et $q$: scilicet integratio aequationis (5) dabit $r$, qua inuenta integratio aequationis (6) dabit $\varphi$, atque alterutra aequationum (1), (2) ipsam $\psi$: denique $m$ habebitur per alterutram aequationum (3), (4).

Integratio generalis aequationum (5), (6) necessario duas functiones arbitrarias introducere debet, quae quid sibi velint facile intelligemus, si perpendimus, illas aequationes ad casum eum quem hic consideramus non limitari, sed perinde valere, si $r$ et $\varphi$ accipiantur in significatione generaliori art. 16, ita vt sit $r$ longitudo lineae breuissimae ad lineam arbitrariam determinatam normaliter ductae, atque $\varphi$ functio arbitraria longitudinis eius partis lineae, quae inter lineam breuissimam indefinitam et punctum arbitrarium determinatum intercipitur. Solutio itaque generalis haec omnia indefinite amplecti debet, functionesque arbitrariae tunc demum in definitas abibunt, quando linea illa arbitraria atque functio partium quam $\varphi$ exhibere debet, praescriptae sunt. In casu nostro circulus infinite paruus adoptari potest, centrum in eo puncto habens, a quo distantiae $r$ numerantur, et $\varphi$ denotabit partes huius circuli ipsas per radium diuisas, vnde facile colligitur, aequationes (5), (6) pro casu nostro complete sufficere, dummodo ea, quae indefinita relinquunt, ei conditioni accommodentur, vt $r$ et $\varphi$ pro puncto illo initiali atque punctis ab eo infinite parum distantibus quadrent.

Ceterum

Ceterum quod attinet ad integrationem ipsam aequationum (5), (6), constat, eam reduci posse ad integrationem aequationum differentialium vulgarium, quae tamen plerumque tam intricatae euadunt, vt parum lucri inde redundet. Contra euolutio in series, quae ad vsus practicos, quoties de partibus superficiei modicis agitur, abunde sufficiunt, nullis difficultatibus obnoxia est, atque sic formulae allatae fontem vberem aperiunt, ad multa problemata grauissima soluenda. Hoc vero loco exemplum vnicum ad methodi indolem monstrandam euoluemus.

23.

Considerabimus casum eum, vbi omnes lineae, pro quibus $p$ constans est, sunt lineae breuissimae orthogonaliter secantes lineam pro qua $\varphi = 0$, et quam tamquam lineam abscissarum contemplari possumus. Sit $A$ punctum pro quo $r = 0$, $D$ punctum indefinitum in linea abscissarum, $AD = p$, $B$ punctum indefinitum in linea breuissima ipsi $AD$ in $D$ normali, atque $BD = q$, ita vt $p$ considerari possit tamquam abscissa, $q$ tamquam ordinata puncti $B$; abscissas positiuas assumimus in eo ramo lineae abscissarum, cui respondet $\varphi = 0$, dum $r$ semper tamquam quantitatem positiuam spectamus; ordinatas positiuas statuimus in plaga ea, vbi $\varphi$ numeratur inter 0 et 180°.

Per theorema art. 16 habebimus $\omega = 90°$, $F = 0$, nec non $G = 1$; statuemus insuper $\sqrt{E} = n$. Erit itaque $n$ functio ipsarum $p$, $q$, et quidem talis, quae pro $q = 0$ fieri debet $= 1$. Applicatio formulae in art. 18 allatae ad casum nostrum docet, in *quauis* linea breuissima esse debere $\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} \cdot \mathrm{d}p$, denotante $\theta$ angulum inter elementum huius lineae atque elementum lineae pro qua $q$ constans: iam quum linea abscissarum ipsa sit breuissima, atque pro ea vbique $\theta = 0$, patet, pro $q = 0$ vbique fieri debere $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} = 0$.

Hinc igitur colligimus, si $n$ in seriem secundum potestates ipsius $q$ progredientem euoluatur, hanc habere debere formam sequentem

$$n = 1 + fqq + gq^3 + hq^4 + \text{etc.}$$

vbi $f$, $g$, $h$ etc. erunt functiones ipsius $p$, et quidem statuemus

$$f = f^\circ + f'p + f''pp + \text{etc.}$$
$$g = g^\circ + g'p + g''pp + \text{etc.}$$
$$h = h^\circ + h'p + h''pp + \text{etc.}$$

etc. siue

$$\begin{aligned} n = 1 + f^\circ qq + f'pqq &+ f''ppqq + \text{etc.} \\ + g^\circ q^3 &+ g'pq^3 + \text{etc.} \\ &+ h^\circ q^4 + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

## 24.

Aequationes art. 22 in casu nostro suppeditant

$$n\sin\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p},\quad \cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q},\quad -n\cos\psi = m\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p},\quad \sin\psi = m\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$nn = nn\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2,\quad nn\,.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

Adiumento harum aequationum, quarum quinta et sexta iam in reliquis continentur, series euolui poterunt pro $r$, $\varphi$, $\psi$, $m$, vel pro quibuslibet functionibus harum quantitatum, e quibus eas, quae imprimis attentione sunt dignae, hic sistemus.

Quum pro valoribus infinite paruis ipsarum $p$, $q$ fieri debeat $rr = pp + qq$, series pro $rr$ incipiet a terminis $pp + qq$: terminos altiorum ordinum obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum *) adiumento aequationis

$$\left(\frac{1}{n}\,.\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}\right)^2 = 4rr$$

*) Calculum, qui per nonnulla artificia paullulum contrahi potest, hic adscribere superfluum duximus.

scilicet

$$[1]\quad rr = pp + \tfrac{2}{3}f^\circ ppqq + \tfrac{1}{2}f' p^3 qq + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^\circ f^\circ)p^4 qq \text{ etc.}$$
$$+ qq \qquad + \tfrac{1}{2}g^\circ ppq^3 + \tfrac{2}{5}g' p^3 q^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h^\circ - \tfrac{7}{45}f^\circ f^\circ)ppq^4$$

Dein habemus, ducente formula $r\sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}$,

$$[2]\quad r\sin\psi = p - \tfrac{1}{3}f^\circ pqq - \tfrac{1}{4}f' ppqq - (\tfrac{1}{5}f'' + \tfrac{8}{45}f^\circ f^\circ)p^3 qq \text{ etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2}g^\circ pq^3 - \tfrac{2}{5}g' ppq^3$$
$$- (\tfrac{3}{5}h^\circ - \tfrac{8}{45}f^\circ f^\circ)pq^4$$

nec non per formulam $r\cos\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}$

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \tfrac{2}{3}f^\circ ppq + \tfrac{1}{2}f' p^3 q + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^\circ f^\circ)p^4 q \text{ etc.}$$
$$+ \tfrac{3}{4}g^\circ ppqq + \tfrac{3}{5}g' p^3 qq$$
$$+ (\tfrac{4}{5}h^\circ - \tfrac{14}{45}f^\circ f^\circ)ppq^3$$

Hinc simul innotescit angulus $\psi$. Perinde ad computum anguli $\varphi$ concinnius euoluuntur series pro $r\cos\varphi$ atque $r\sin\varphi$, quibus inseruiunt aequationes differentiales partiales

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} = n\cos\varphi\,.\sin\psi - r\sin\varphi\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = \cos\varphi\,.\cos\psi - r\sin\varphi\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p} = n\sin\varphi\,.\sin\psi + r\cos\varphi\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q} = \sin\varphi\,.\cos\psi + r\cos\varphi\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$n\cos\psi\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \sin\psi\,.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

quarum combinatio suppeditat

$$\frac{r\sin\psi}{n}\,.\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi\,.\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = r\cos\varphi$$

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q}=r\sin\varphi$$

Hinc facile euoluuntur series pro $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, quarum termini primi manifesto esse debent $p$ et $q$, puta

$$[4]\quad r\cos\varphi=p+\tfrac{2}{3}f^{\circ}pqq+\tfrac{5}{12}f'ppqq+(\tfrac{3}{10}f''-\tfrac{8}{45}f^{\circ}f^{\circ})p^3qq \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}g^{\circ}pq^3+\tfrac{7}{20}g'ppq^3$$
$$+(\tfrac{2}{5}h^{\circ}-\tfrac{7}{45}f^{\circ}f^{\circ})pq^4$$

$$[5]\quad r\sin\varphi=q-\tfrac{1}{3}f^{\circ}ppq-\tfrac{1}{6}f'p^3q-(\tfrac{1}{10}f''-\tfrac{7}{90}f^{\circ}f^{\circ})p^4q \text{ etc.}$$
$$-\tfrac{1}{4}g^{\circ}ppqq-\tfrac{3}{20}g'p^3qq$$
$$-(\tfrac{1}{5}h^{\circ}+\tfrac{13}{90}f^{\circ}f^{\circ})ppq^3$$

E combinatione aequationum [2], [3], [4], [5] deriuari posset series pro $rr\cos(\psi+\varphi)$, atque hinc, diuidendo per seriem [1], series pro $\cos(\psi+\varphi)$, a qua ad seriem pro ipso angulo $\psi+\varphi$ descendere liceret. Elegantius tamen eadem obtinetur sequenti modo. Differentiando aequationem primam et secundam ex iis, quae initio huius art. allatae sunt, obtinemus

$$\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}+n\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q}+\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q}=0$$

qua combinata cum hac

$$n\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}+\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}=0$$

prodit

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}+\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}q}=0$$

Ex hac aequatione adiumento methodi coëfficientium indeterminatorum facile eliciemus seriem pro $\psi+\varphi$, si perpendimus ipsius terminum primum esse debere $\frac{1}{2}\pi$, radio pro vnitate accepto, atque denotante $2\pi$ peripheriam circuli,

$$[6]\quad \psi+\varphi=\tfrac{1}{2}\pi-f^{\circ}pq-\tfrac{2}{3}f'ppq-(\tfrac{1}{2}f''-\tfrac{1}{6}f^{\circ}f^{\circ})p^3q \text{ etc.}$$
$$-g^{\circ}pqq-\tfrac{3}{4}g'ppqq$$
$$-(h^{\circ}-\tfrac{1}{3}f^{\circ}f^{\circ})pq^3$$

Operae pretium videtur, etiam aream trianguli $ABD$ in seriem euoluere. Huic euolutioni inseruit aequatio conditionalis sequens, quae e considerationibus geometricis satis obuiis facile deriuatur, et in qua $S$ aream quaesitam denotat:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}=\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\int n\,\mathrm{d}q$$

integratione a $q=0$ incepta. Hinc scilicet obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum

$$\begin{aligned}[7]\quad S=\tfrac{1}{2}pq-\tfrac{1}{12}f^\circ p^3q-\tfrac{1}{20}f'p^4q-(\tfrac{1}{30}f''-\tfrac{1}{60}f^\circ f^\circ)p^5q \text{ etc.}\\ -\tfrac{1}{12}f^\circ pq^3-\tfrac{3}{40}g^\circ p^3qq-\tfrac{1}{20}g'p^4qq\\ -\tfrac{7}{120}f'ppq^3-(\tfrac{1}{15}h^\circ+\tfrac{2}{45}f''+\tfrac{1}{60}f^\circ f^\circ)p^3q^3\\ -\tfrac{1}{10}g^\circ pq^4-\tfrac{3}{40}g'ppq^4\\ -(\tfrac{1}{10}h^\circ-\tfrac{1}{30}f^\circ f^\circ)pq^5\end{aligned}$$

## 25.

A formulis art. praec., quae referuntur ad triangulum a lineis breuissimis formatum rectangulum, progredimur ad generalia. Sit $C$ aliud punctum in eadem linea breuissima $DB$, pro quo, manente $p$, characteres $q'$, $r'$, $\varphi'$, $\psi'$, $S'$ eadem designent, quae $q$, $r$, $\varphi$, $\psi$, $S$ pro puncto $B$. Ita oritur triangulum inter puncta $A$, $B$, $C$, cuius angulos per $A$, $B$, $C$, latera opposita per $a$, $b$, $c$, aream per $\sigma$ denotamus; mensuram curuaturae in punctis $A$, $B$, $C$ resp. per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ exprimemus. Supponendo itaque (quod licet), quantitates, $p$, $q$, $q-q'$ esse positiuas, habemus

$$A=\varphi-\varphi',\ B=\psi,\ C=\pi-\psi',\ a=q-q',\ b=r',\ c=r,\ \sigma=S-S'.$$

Ante omnia aream $\sigma$ per seriem exprimemus. Mutando in [7] singulas quantitates ad $B$ relatas in eas quae ad $C$ referuntur, prodit formula pro $S'$, vnde, vsque ad quantitates sexti ordinis obtinemus

$$\sigma = \tfrac{1}{2}p(q-q')(1-\tfrac{1}{6}f^\circ(pp+qq+qq'+q'q')$$
$$-\tfrac{1}{60}f''p(6pp+7qq+7qq'+7q'q')$$
$$-\tfrac{1}{20}g^\circ(q+q')(3pp+4qq+\cancel{4qq'}+4q'q'))$$

Haec formula, adiumento seriei [2] puta

$$c\sin B = p(1-\tfrac{1}{3}f^\circ qq - \tfrac{1}{4}f'pqq - \tfrac{1}{2}g^\circ q^3 - \text{etc.})$$

transit in sequentem

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B(1-\tfrac{1}{6}f^\circ(pp-qq+qq'+q'q')$$
$$-\tfrac{1}{60}f'p(6pp-8qq+7qq'+7q'q')$$
$$-\tfrac{1}{20}g^\circ(3ppq+3ppq'-6q^3+4qqq'+4qq'q'+4q'^3))$$

Mensura curuaturae pro quouis superficiei puncto fit (per art. 19, vbi $m$, $p$, $q$ erant quae hic sunt $n$, $q$, $p$)

$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{dd}n}{\mathrm{d}q^2} = -\frac{2f+6gq+12hqq+\text{etc.}}{1+fqq+\text{etc.}}$$
$$= -2f-6gq-(12h-2ff)qq-\text{etc.}$$

Hinc fit, quatenus $p$, $q$ ad punctum $B$ referuntur,

$$\beta = -2f^\circ - 2f'p - 6g^\circ q - 2f''pp - 6g'pq$$
$$-(12h^\circ - 2f^\circ f^\circ)qq - \text{etc.}$$

nec non

$$\gamma = -2f^\circ - 2f'p - 6g^\circ q' - 2f''pp - 6g'pq'$$
$$-(12h^\circ - 2f^\circ f^\circ)q'q' - \text{etc.}$$

$$\alpha = -2f^\circ$$

Introducendo has mensuras curuaturae in serie pro $\sigma$, obtinemus expressionem sequentem, vsque ad quantitates sexti ordinis (excl.) exactam:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B(1+\tfrac{1}{120}\alpha(4pp-2qq+3qq'+3q'q')$$
$$+\tfrac{1}{120}\beta(3pp-6qq+6qq'+3q'q')$$
$$+\tfrac{1}{120}\gamma(3pp-2qq+qq'+4qq'))$$

Praecisio eadem manebit, si pro $p$, $q$, $q'$ substituimus $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B - a$, quo pacto prodit

$$[8] \quad \sigma = \tfrac{1}{2} ac \sin B (1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3aa + 4cc - 9ac\cos B) \\ + \tfrac{1}{120}\beta(3aa + 3cc - 12ac\cos B) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(4aa + 3cc - 9ac\cos B))$$

Quum ex hac aequatione omnia quae ad lineam $AD$ normaliter ad $BC$ ductam referuntur euanuerint, etiam puncta $A$, $B$, $C$ cum correlatis inter se permutare licebit, quapropter erit eadem praecisione

$$[9] \quad \sigma = \tfrac{1}{2} bc \sin A (1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 12bc\cos A) \\ + \tfrac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 9bc\cos A) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 9bc\cos A))$$

$$[10] \quad \sigma = \tfrac{1}{2} ab \sin C (1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3aa + 4bb - 9ab\cos C) \\ + \tfrac{1}{120}\beta(4aa + 3bb - 9ab\cos C) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(3aa + 3bb - 12ab\cos C))$$

## 26.

Magnam vtilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis $a$, $b$, $c$; anguli illius trianguli, quos per $A^*$, $B^*$, $C^*$ designabimus, different ab angulis trianguli in superficie curua, puta ab $A$, $B$, $C$, quantitatibus secundi ordinis, operaeque pretium erit, has differentias accurate euoluere. Calculorum autem prolixiorum quam difficiliorum, primaria momenta apposuisse sufficiet.

Mutando in formulis [1], [4], [5], quantitates quae referuntur ad $B$ in eas quae referuntur ad $C$, nanciscemur formulas pro $r'r'$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Tunc euolutio expressionis $rr + r'r' - (q-q')^2 - 2r\cos\varphi \,.\, r'\cos\varphi' - 2r\sin\varphi \,.\, r'\sin\varphi'$, quae fit $= bb + cc - aa - 2bc\cos A = 2bc(\cos A^* - \cos A)$, combinata cum euolutione expressionis $r\sin\varphi \,.\, r'\cos\varphi' - r\cos\varphi \,.\, r'\sin\varphi'$, quae fit $= bc\sin A$, suppeditat formulam sequentem

$$\cos A^* - \cos A = -(q-q')p\sin A(\tfrac{1}{3}f^\circ + \tfrac{1}{6}f'p + \tfrac{1}{4}g^\circ(q+q') \\ + (\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{1}{45}f^\circ f^\circ)pp + \tfrac{3}{20}g'p(q+q') \\ + (\tfrac{1}{5}h^\circ - \tfrac{7}{90}f^\circ f^\circ)(qq + qq' + q'q') + \text{etc.})$$

Hinc fit porro, vsque ad quantitates quinti ordinis

$$\begin{aligned} A^* - A = -(q-q')p(&\tfrac{1}{3}f^\circ + \tfrac{1}{6}f''p + \tfrac{1}{4}g^\circ(q+q') + \tfrac{1}{10}f''pp \\ &+ \tfrac{3}{20}g'p(q+q') + \tfrac{1}{5}h^\circ(qq+qq'+q'q') \\ &- \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(7pp+7qq+12qq'+7q'q')) \end{aligned}$$

Combinando hanc formulam cum hac

$$2\sigma = ap(1 - \tfrac{1}{6}f^\circ(pp+qq+qq'+q'q' - \text{etc.})$$

atque cum valoribus quantitatum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in art. praes. allatis, obtinemus vsque ad quantitates quinti ordinis

$$\begin{aligned} [11] \quad A^* = A - \sigma(&\tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{2}{15}f''pp + \tfrac{1}{5}g'p(q+q') \\ &+ \tfrac{1}{5}h^\circ(3qq - 2qq' + 3q'q') \\ &+ \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(4pp - 11qq + 14qq' - 11q'q')) \end{aligned}$$

Per operationes prorsus similes euoluimus

$$\begin{aligned} [12] \quad B^* = B - \sigma(&\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(2q+q') \\ &+ \tfrac{1}{5}h^\circ(4qq - 4qq' + 3q'q') \\ &- \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(2pp + 8qq - 8qq' + 11qq')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [13] \quad C^* = C - \sigma(&\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(q+2q') \\ &+ \tfrac{1}{5}h^\circ(3qq - 4qq' + 4q'q') \\ &- \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(2pp + 11qq - 8qq' + 8q'q')) \end{aligned}$$

Hinc simul deducimus, quum summa $A^* + B^* + C^*$ duobus rectis aequalis sit, excessum summae $A + B + C$ supra duos angulos rectos, puta

$$\begin{aligned} [14] \quad A + B + C = \pi + \sigma(&\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{3}f''pp + \tfrac{1}{2}g'p(q+q') \\ &+ (2h^\circ - \tfrac{1}{3}f^\circ f^\circ)(qq - qq' + q'q')) \end{aligned}$$

Haec vltima aequatio etiam formulae [6] superstrui potuisset.

## 27.

Si superficies curua est sphaera, cuius radius $= R$, erit $\alpha = \beta = \gamma = -2f^\circ = \frac{1}{RR}$; $f'' = 0$, $g' = 0$, $6h^\circ - f^\circ f^\circ = 0$ siue $h^\circ = \frac{1}{24R^4}$. Hinc formula [14] fit

$A +$

$$A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{RR}$$

quae praecisione absoluta gaudet; formulae 11 - 13 autem suppeditant

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(2pp - qq + 4qq' - q'q')$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp - 2qq + 2qq' + q'q')$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp + qq + 2qq' - 2q'q')$$

siue aeque exacte

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(bb + cc - 2aa)$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + cc - 2bb)$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + bb - 2cc)$$

Neglectis quantitatibus quarti ordinis, prodit hinc theorema notum a clar. Legendre primo propositum.

## 28.

Formulae nostrae generales, reiectis terminis quarti ordinis, persimplices euadunt, scilicet

$$A^* = A - \tfrac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma)$$
$$B^* = B - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma)$$
$$C^* = C - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma)$$

Angulis itaque $A$, $B$, $C$ in superficie non sphaerica reductiones inaequales applicandae sunt, vt mutatorum sinus lateribus oppositis fiant proportionales. Inaequalitas generaliter loquendo erit tertii ordinis, at si superficies parum a sphaera discrepat, illa ad ordinem altiorem referenda erit: in triangulis vel maximis in superficie telluris, quorum quidem angulos dimetiri licet, differentia semper pro insensibili haberi potest. Ita e. g. in triangulo maximo inter ea, quae annis praecedentibus dimensi sumus, puta inter puncta Hohehagen, Brocken, Inselsberg, vbi excessus summae angulorum fuit $= 14''85348$, calculus sequentes reductiones angulis applicandas prodidit:

| | |
|---|---|
| Hohehagen . . . . . . . | $-\ 4''95113$ |
| Brocken . . . . . . . . . | $-\ 4,95104$ |
| Inselsberg . . . . . . . | $-\ 4,95131$ |

## 29.

Coronidis caussa adhuc comparationem areae trianguli in superficie curua cum area trianguli rectilinei, cuius latera sunt $a$, $b$, $c$, adiiciemus. Aream posteriorem denotabimus per $\sigma^*$, quae fit $= \frac{1}{2} b c \sin A^* = \frac{1}{2} a c \sin B^* = \frac{1}{2} a b \sin C^*$

Habemus, vsque ad quantitates ordinis quarti

$$\sin A^* = \sin A - \tfrac{1}{12} \sigma \cos A \,.\, (2\alpha + \beta + \gamma)$$

siue aeque exacte

$$\sin A = \sin A^* \,.\, (1 + \tfrac{1}{24} b c \cos A \,.\, (2\alpha + \beta + \gamma))$$

Substituto hoc valore in formula [9], erit vsque ad quantitates sexti ordinis

$$\sigma = \tfrac{1}{2} b c \sin A^* \,.\, (1 + \tfrac{1}{120} \alpha (3bb + 3cc - 2bc\cos A) + \tfrac{1}{120} \beta (3bb + 4cc - 4bc\cos A) + \tfrac{1}{120} \gamma (4bb + 3cc - 4bc\cos A)),$$

siue aeque exacte

$$\sigma = \sigma^* (1 + \tfrac{1}{120} \alpha (aa + 2bb + 2cc) + \tfrac{1}{120} \beta (2aa + bb + 2cc) + \tfrac{1}{120} \gamma (2aa + 2bb + cc))$$

Pro superficie sphaerica haec formula sequentem induit formam

$$\sigma = \sigma^* (1 + \tfrac{1}{24} \alpha (aa + bb + cc))$$

cuius loco etiam sequentem salua eadem praecisione adoptari posse facile confirmatur

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin.A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*}}$$

Si eadem formula triangulis in superficie curua non sphaerica applicatur, error generaliter loquendo erit quinti ordinis, sed insensibilis in omnibus triangulis, qualia in superficie telluris dimetiri licet.