DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA

SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. 8. OCTOB. 1827.

1.

Disquisitiones, in quibus de directionibus variarum rectarum in spatio agitur, plerumque ad maius perspicuitatis et simplicitatis fastigium euehuntur, in auxilium vocando superficiem sphaericam radio = 1 circa centrum arbitrarium descriptam, cuius singula puncta repraesentare censebuntur directiones rectarum radiis ad illa terminatis parallelarum. Dum situs omnium punctorum in spatio per tres coordinatas determinatur, puta per distantias a tribus planis fixis inter se normalibus, ante omnia considerandae veniunt directiones axium his planis normalium: puncta superficiei sphaericae, quae has directiones repraesentant, per (1), (2), (3) denotabimus; mutua igitur horum distantia erit quadrans. Ceterum axium directiones versus eas partes acceptas supponemus, versus quas coordinatae respondentes crescunt.

2.

Haud inutile erit, quasdam propositiones, quae in huiusmodi quaestionibus vsum frequentem offerunt, hic in conspectum producere.

I. Angulus inter duas rectas se secantes mensuratur per arcum inter puncta, quae in superficie sphaerica illarum directionibus respondent.

II. Situs cuiuslibet plani repraesentari potest per circulum maximum in superficie sphaerica, cuius planum illi est parallelum.

III. Angulus inter duo plana aequalis est angulo sphaerico inter circulos maximos illa repraesentantes, et proin etiam per arcum inter horum circulorum maximorum polos interceptum mensuratur. Et perinde inclinatio rectae ad planum mensuratur per arcum, a puncto, quod respondet directioni rectae, ad circulum maximum, qui plani situm repraesentat, normaliter ductum.

IV. Denotantibus x, y, z; x', y', z' coordinatas duorum punctorum, r eorundem distantiam, atque L punctum, quod in superficie sphaerica repraesentat directionem rectae a puncto priori ad posterius ductae, erit

$$x' = x + r \cos (1) L$$
$$y' = y + r \cos (2) L$$
$$z' = z + r \cos (3) L$$

V. Hinc facile sequitur, haberi generaliter

$$\cos(1) L^2 + \cos(2) L^2 + \cos(3) L^2 = 1$$

nec non, denotante L' quodcunque aliud punctum superficiei sphaericae, esse

$$\cos (1) L . \cos (1) L' + \cos (2) L . \cos (2) L' + \cos (3) L . \cos (3) L' = \cos LL'.$$

VI. Theorema. *Denotantibus L, L', L'', L''' quatuor puncta in superficie sphaerae, atque A angulum, quem arcus LL', $L''L'''$ in puncto concursus sui formant, erit*

$$\cos LL'' . \cos L'L''' - \cos LL''' . \cos L'L'' = \sin LL' . \sin L''L''' . \cos A$$

Demonstratio. Denotet litera A insuper punctum concursus ipsum, statuaturque

$$AL = t,\ AL' = t',\ AL'' = t'',\ AL''' = t'''$$

Habemus itaque:

$$\cos LL'' = \cos t.\cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A$$
$$\cos L'L''' = \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A$$
$$\cos LL''' = \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A$$
$$\cos L'L'' = \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A$$

et proin

$$\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L'' = \cos A(\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''')$$
$$= \cos A\ (\cos t\ \sin t' - \sin t \cos t')\ (\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \sin t''')$$
$$= \cos A.\sin(t' - t)\ .\ \sin(t''' - t'')$$
$$= \cos A.\sin LL'\ .\ \sin L''L'''$$

Ceterum quum inde a puncto A bini rami vtriusque circuli maximi proficiscantur, duo quidem ibi anguli formantur, quorum alter alterius complementum ad 180°: sed analysis nostra monstrat, eos ramos adoptandos esse, quorum directiones cum sensu progressionis a puncto L ad L', et a puncto L'' ad L''' consentiunt: quibus intellectis simul patet, quum circuli maximi duobus punctis concurrant, arbitrarium esse, vtrum eligatur. Loco anguli A etiam arcus inter polos circulorum maximorum, quorum partes sunt arcus LL', $L''L'''$, adhiberi potest: manifesto autem polos tales accipere oportet, qui respectu horum arcuum similiter iacent, puta vel vterque polus ad dextram iacens, dum a L versus L' atque ab L'' versus L''' procedimus, vel vterque ad laeuam.

VII. Sint L, L', L'' tria puncta in superficie sphaerica, statuamusque breuitatis caussa

$$\cos(1)L = x,\ \cos(2)L = y,\ \cos(3)L = z$$
$$\cos(1)L' = x',\ \cos(2)L' = y',\ \cos(3)L' = z'$$
$$\cos(1)L'' = x'',\ \cos(2)L'' = y'',\ \cos(3)L'' = z''$$

nec non

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta$$

Designet λ polum circuli maximi, cuius pars est arcus LL', et quidem eum, qui respectu huius arcus similiter iacet, ac punctum (1) respectu arcus (2) (3). Tunc erit, ex theoremate praecedente, $yz'-y'z = \cos(1)\lambda . \sin(2)(3) . \sin LL'$, siue, propter $(2)(3) = 90°$,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda . \sin LL', \text{ et perinde}$$
$$zx' - z'x = \cos(2)\lambda . \sin LL'$$
$$xy' - x'y = \cos(3)\lambda . \sin LL'$$

Multiplicando has aequationes resp. per x'', y'', z'' et addendo, obtinemus adiumento theorematis secundi in *V* prolati

$$\Delta = \cos\lambda L'' . \sin LL'$$

Iam tres casus sunt distinguendi. *Primo*, quoties L'' iacet in eodem circulo maximo cuius pars est arcus LL', erit $\lambda L'' = 90°$, adeoque $\Delta = 0$. Quoties vero L'' iacet extra circulum illum maximum, aderit casus *secundus*, si est ab eadem parte, a qua est λ, *tertius*, si ab opposita: in his casibus puncta L, L', L'' formabunt triangulum sphaericum, et quidem iacebunt in casu secundo eodem ordine quo puncta (1), (2), (3), in casu tertio vero ordine opposito. Denotando angulos illius trianguli simpliciter per L, L', L'', atque perpendiculum in superficie sphaerica a puncto L'' ad latus LL' ductum per p, erit $\sin p = \sin L . \sin LL'' = \sin L' . \sin L'L''$, atque $\lambda L'' = 90° \mp p$, valente signo superiori pro casu secundo, inferiori pro tertio. Hinc itaque colligimus

$$\pm\Delta = \sin L . \sin LL' . \sin LL'' = \sin L' . \sin LL' . \sin L'L''$$
$$= \sin L'' . \sin LL'' . \sin L'L''$$

Ceterum manifesto casus primus in secundo vel tertio comprehendi censeri potest, nulloque negotio perspicitur, $\pm\Delta$ exhibere sextuplum soliditatis pyramidis inter puncta L, L', L'' atque centrum sphaerae formatae. Denique hinc facillime colligitur, eandem expressionem $\pm\frac{1}{6}\Delta$ generaliter exprimere soliditatem cuiusuis pyramidis inter initium coordinatarum atque puncta quorum coordinatae sunt x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', contentae.

3.

Superficies curua apud punctum A in ipsa situm curuatura continua gaudere dicitur, si directiones omnium rectarum ab A ad omnia puncta superficiei ab A infinite parum distantia ductarum infinite parum ab vno eodemque plano per A transiente deflectuntur: hoc planum superficiem curuam in puncto A *tangere* dicitur. Quodsi huic conditioni in aliquo puncto satisfieri nequit, continuitas curuaturae hic interrumpitur, vti e. g. euenit in cuspide coni. Disquisitiones praesentes ad tales superficies curuas, vel ad tales superficiei partes, restringentur, in quibus continuitas curuaturae nullibi interrumpitur. Hic tantummodo obseruamus, methodos, quae positioni plani tangentis determinandae inseruiunt, pro punctis singularibus, in quibus continuitas curuaturae interrumpitur, vim suam perdere, et ad indeterminata perducere debere.

4.

Situs plani tangentis commodissime e situ rectae ipsi in puncto A normalis cognoscitur, quae etiam ipsi superficiei curuae normalis dicitur. Directionem huius normalis per punctum L in superficie sphaerae auxiliaris repraesentabimus, atque statuemus

$$\cos(1)L = X, \ \cos(2)L = Y, \ \cos(3)L = Z;$$

coordinatas puncti A per x, y, z denotamus. Sint porro $x + \mathrm{d}x$, $y + \mathrm{d}y$, $z + \mathrm{d}z$ coordinatae alius puncti in superficie curua A'; $\mathrm{d}s$ ipsius distantia infinite parua ab A; denique λ punctum superficiei sphaericae repraesentans directionem elementi AA'. Erit itaque

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s.\cos(1)\lambda, \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}s.\cos(2)\lambda, \ \mathrm{d}z = \mathrm{d}s.\cos(3)\lambda$$

et, quum esse debeat $\lambda L = 90°$,

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0$$

E combinatione harum aequationum deriuamus

$$X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = 0.$$

Duae habentur methodi generales ad exhibendam indolem superficiei curuae. Methodus *prima* vtitur aequatione inter coordinatas x, y, z, quam reductam esse supponemus ad formam $W = 0$, vbi W erit functio indeterminatarum x, y, z. Sit differentiale completum functionis W

$$\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

eritque in superficie curua

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$$

et proin

$$P\cos(1)\lambda + Q\cos(2)\lambda + R\cos(3)\lambda = 0$$

Quum haec aequatio, perinde vt ea quam supra stabiliuimus, valere debeat pro directionibus omnium elementorum $\mathrm{d}s$ in superficie curua, facile perspiciemus, X, Y, Z proportionales esse debere ipsis P, Q, R, et proin, quum fiat $XX + YY + ZZ = 1$, erit vel

$$X = \frac{P}{\surd(PP + QQ + RR)},\quad Y = \frac{Q}{\surd(PP + QQ + RR)},$$
$$Z = \frac{R}{\surd(PP + QQ + RR)}$$

vel

$$X = \frac{-P}{\surd(PP + QQ + RR)},\quad Y = \frac{-Q}{\surd(PP + QQ + RR)},$$
$$Z = \frac{-R}{\surd(PP + QQ + RR)}$$

Methodus *secunda* sistit coordinatas in forma functionum duarum variabilium p, q. Supponamus per differentiationem harum functionum prodire

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}p + c'\,\mathrm{d}q$$

quibus valoribus in formula supra data substitutis, obtinemus

$$(aX + bY + cZ)\,\mathrm{d}p + (a'X + b'Y + c'Z)\,\mathrm{d}q = 0$$

Quum haec aequatio locum habere debeat independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, manifesto esse debebit

$$aX + bY + cZ = 0,\ a'X + b'Y + c'Z = 0$$

vnde colligimus, X, Y, Z proportionales esse debere quantitatibus

$$bc' - cb',\ ca' - ac',\ ab' - ba'$$

Statuendo itaque breuitatis caussa

$$\sqrt{((bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2)} = \Delta$$

erit vel

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta},\ Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta},\ Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta}$$

vel

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta},\ Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta},\ Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}$$

His duabus methodis generalibus accedit *tertia*, vbi vna coordinatarum, e. g. z exhibetur in forma functionis reliquarum x, y: haec methodus manifesto nihil aliud est, nisi casus specialis vel methodi primae, vel secundae. Quodsi hic statuitur

$$\mathrm{d}z = t\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

erit vel

$$X = \frac{-t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Y = \frac{-u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Z = \frac{1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

vel

$$X = \frac{t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Y = \frac{u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}},\ Z = \frac{-1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

5.

Duae solutiones in art. praec. inuentae manifesto ad puncta superficiei sphaericae opposita, siue ad directiones oppositas referuntur, quod cum rei natura quadrat, quum normalem ad vtramuis plagam superficiei curuae ducere liceat. Quodsi duas plagas, superficiei contiguas, inter se distinguere, alteramque exteriorem alteram interiorem vocare placet, etiam vtrique normali suam solutionem rite tribuere licebit adiumento theorematis in art. 2 (VII) euoluti, simulatque criterium stabilitum est ad plagam alteram ab altera distinguendam.

In methodo prima tale criterium petendum erit a signo valoris quantitatis W. Scilicet generaliter loquendo superficies curua eas spatii partes, in quibus W valorem positiuum obtinet, ab iis dirimet, in quibus valor ipsius W fit negatiuus. E theoremate illo vero facile colligitur, si W valorem positiuum obtineat versus plagam exteriorem, normalisque extrorsum ducta concipiatur, solutionem priorem adoptandam esse. Ceterum in quouis casu facile diiudicabitur, vtrum per superficiem integram eadem regula respectu signi ipsius W valeat, an pro diuersis partibus diuersae: quamdiu coëfficientes P, Q, R valores finitos habent, nec simul omnes tres euanescunt, lex continuitatis vicissitudinem vetabit.

Si methodum secundam sequimur, in superficie curua duo systemata linearum curuarum concipere possumus, alterum, pro quo p est variabilis, q constans; alterum, pro quo q variabilis, p constans: situs mutuus harum linearum respectu plagae exterioris decidere debet, vtram salutionem adoptare oporteat. Scilicet quoties tres lineae, puta ramus lineae prioris systematis a puncto A proficiscens crescente p, ramus posterioris systematis a puncto A egrediens crescente q, atque normalis versus plagam exteriorem ducta *similiter* iacent, vt, inde ab origine abscissarum, axes ipsarum x, y, z resp. (e. g. si tum e tribus lineis illis, tum e tribus his, prima sinistrorsum, secunda dextrorsum, tertia sursum directa concipi potest), solutio prima adoptari debet; quoties autem situs mutuus trium linearum priorum oppositus est situi mutuo axium ipsarum x, y, z, solutio secunda valebit.

In methodo tertia dispiciendum est, vtrum, dum z incrementum positiuum accipit, manentibus x et y inuariatis, transitus fiat versus plagam exteriorem an interiorem. In casu priori, pro normali extrorsum directa, solutio prima valet, in posteriori secunda.

6.

Sicuti, per translatam directionem normalis in superficiem curuam ad superficiem sphaerae, cuiuis puncto determinato prioris superficiei respondet punctum determinatum in posteriori, ita etiam quaeuis linea, vel quaeuis figura in illa repraesentabitur per lineam vel figuram correspondentem in hac. In comparatione duarum figurarum hoc modo sibi mutuo correspondentium, quarum altera quasi imago alterius erit, duo momenta sunt respicienda, alterum, quatenus sola quantitas consideratur, alterum, quatenus abstrahendo a relationibus quantitatiuis solum situm contemplamur.

Momentum primum basis erit quarundam notionum, quas in doctrinam de superficiebus curuis recipere vtile videtur. Scilicet cuilibet parti superficiei curuae limitibus determinatis cinctae *curvaturam totalem* seu *integram* adscribimus, quae per aream figurae illi in superficie sphaerica respondentem exprimetur. Ab hac curuatura integra probe distinguenda est curuatura quasi specifica, quam nos *mensuram curuaturae* vocabimus: haec posterior ad *punctum* superficiei refertur, et denotabit quotientem qui oritur, dum curuatura integra elementi superficialis puncto adiacentis per aream ipsius elementi diuiditur, et proin indicat rationem arearum infinite paruarum in superficie curua et in superficie sphaerica sibi mutuo respondentium. Vtilitas harum innouationum per ea, quae in posterum a nobis explicabuntur, abunde, vt speramus, sancietur. Quod vero attinet ad terminologiam, imprimis prospiciendum esse duximus, vt omnis ambiguitas arceatur, quapropter haud congruum putauimus, analogiam terminologiae in doctrina de lineis curuis planis vulgo receptam (etsi non omnibus probatam) stricte sequi, secundum quam mensura curuaturae simpliciter audire debuisset curuatura, curuatura integra autem amplitudo. Sed quidni in verbis faciles esse liceret, dummodo res non sint inanes, neque dictio interpretationi erroneae obnoxia?

Situs figurae in superficie sphaerica vel similis esse potest situi figurae respondentis in superficie curua, vel oppositus (inuersus); casus prior locum habet, vbi binae lineae in superficie curua ab eodem puncto directionibus inaequalibus sed non oppositis proficiscentes repraesentantur in superficie sphaerica per lineas similiter iacentes, puta vbi imago lineae ad dextram iacentis ipsa est ad dextram; casus posterior, vbi contrarium valet. Hos duos casus per *signum* mensurae curuaturae vel positiuum vel negatiuum distinguemus. Sed manifesto haec distinctio eatenus tantum locum habere potest, quatenus in vtraque superficie plagam determinatam eligimus, in qua figura concipi debet. In sphaera auxiliari semper plagam exteriorem, a centro auersam, adhibebimus: in superficie curva etiam plaga exterior siue quae tamquam exterior consideratur, adoptari potest, vel potius plaga eadem, a qua normalis erecta concipitur; manifesto enim respectu similitudinis figurarum nihil mutatur, si in superficie curua tum figura ad plagam oppositam transfertur, tum normalis, dummodo ipsius imago semper in eadem plaga superficiei sphaericae depingatur.

Signum positiuum vel negatiuum, quod pro situ figurae infinite paruae *mensurae* curuaturae adscribimus, etiam ad curuaturam integram figurae finitae in superficie curua extendimus. Attamen si argumentum omni generalitate amplecti suscipimus, quaedam dilucidationes requiruntur, quas hic breuiter tantum attingemus. Quamdiu figura in superficie curua ita comparata est, vt singulis punctis intra ipsam puncta *diuersa* in superficie sphaerica respondeant, definitio vlteriori explicatione non indiget. Quoties autem conditio ista locum non habet, necesse erit, quasdam partes figurae in superficie sphaerica bis vel pluries in computum ducere, vnde, pro situ simili vel opposito, vel accumulatio vel destructio oriri poterit. Simplicissimum erit in tali casu, figuram in superficie curua in partes tales diuisam concipere, quae singulae per se spectatae conditioni illi satisfaciant, singulis tribuere curuaturam suam integram, quantitate per aream figurae in superficie sphaerica respondentis, signo per situm determinatis, ac denique figurae toti adscribere curuaturam integram ortam per additionem curuaturarum integrarum, quae singulis partibus respondent. Generaliter itaque curuatura integra figurae est $= \int k \, d\sigma$, denotante $d\sigma$ elementum areae figurae, k mensuram curuaturae in quouis puncto. Quod vero attinet ad repraesentationem geometricam huius integralis, praecipua huius rei momenta ad sequentia redeunt. Peripheriae figurae in superficie curua (sub restrictione art. 3) semper respondebit in superficie sphaerica linea in se ipsam rediens. Quae si se ipsam nullibi intersecat, totam superficiem sphaericam in duas partes dirimet, quarum altera respondebit figurae in superficie curua, et cuius area, positiue vel negatiue accipienda, prout respectu peripheriae suae similiter iacet vt figura in superficie curua respectu suae, vel inuerse, exhibebit posterioris curuaturam integram. Quoties vero linea ista se ipsam semel vel pluries secat, exhibebit figuram complicatam, cui tamen area certa aeque legitime tribui potest, ac figuris absque nodis, haecque area, rite intellecta, semper valorem iustum curuaturae integrae exhibebit. Attamen vberiorem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reseruare debemus.

7.

Inuestigemus iam formulam ad exprimendam mensuram curuaturae pro quouis puncto superficiei curuae. Denotante $d\sigma$ aream elementi huius superficiei, $Z\,d\sigma$ erit area proiectionis huius elementi in planum coordinatarum x, y; et perinde, si $d\Sigma$ est area elementi respondentis in superficie sphaerica, erit $Z \mathrm{d}\Sigma$ area proiectionis ad idem planum: signum positiuum vel negatiuum ipsius Z vero indicabit situm proiectionis similem vel oppositum situi elementi proiecti: manifesto itaque illae proiectiones eandem rationem quoad quantitatem, simulque eandem relationem quoad situm, inter se tenent, vt elementa ipsa. Consideremus iam elementum triangulare in superficie curua, supponamusque coordinatas trium punctorum, quae formant ipsius proiectionem, esse

$$\begin{array}{ll} x, & y \\ x + \mathrm{d}x, & y + \mathrm{d}y \\ x + \delta y, & y + \delta y \end{array}$$

Duplex area huius trianguli exprimetur per formulam

$$\mathrm{d}x \,.\, \delta y - \mathrm{d}y \,.\, \delta x$$

et quidem in forma positiua vel negatiua, prout situs lateris a puncto primo ad tertium respectu lateris a puncto primo ad secundum similis vel oppositus est situi axis coordinatarum y respectu axis coordinatarum x.

Perinde si coordinatae trium punctorum, quae formant proiectionem elementi respondentis in superficie sphaerica, a centro sphaerae inchoatae, sunt

$$\begin{array}{ll} X, & Y \\ X + \mathrm{d}X, & Y + \mathrm{d}Y \\ X + \delta X, & Y + \delta Y \end{array}$$

duplex area huius proiectionis exprimetur per

$$\mathrm{d}X \,.\, \delta Y - \mathrm{d}Y \,.\, \delta X$$

de cuius expressionis signo eadem valent quae supra. Quocirca mensura curuaturae in hoc loco superficiei curuae erit

$$k = \frac{\mathrm{d}X \,.\, \delta Y - \mathrm{d}Y \,.\, \delta X}{\mathrm{d}x \,.\, \delta y - \mathrm{d}y \,.\, \delta x}$$

Quodsi iam supponimus, indolem superficiei curuae datam esse seeundum modum tertium in art. 4 consideratum, habebuntur X et Y in forma functionum quantitatum x, y, vnde erit

$$\mathrm{d}X = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y$$

$$\delta X = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\delta y$$

$$\mathrm{d}Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y$$

$$\delta Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\delta y$$

Substitutis his valoribus, expressio praecedens transit in hanc:

$$k = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)$$

Statuendo vt supra

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u$$

atque insuper

$$\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} = T,\ \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = U,\ \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} = V$$

siue $\mathrm{d}t = T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}u = U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$

habemus ex formulis supra datis

$$X = -tZ,\ Y = -uZ,\ (1 + tt + uu)ZZ = 1$$

atque hinc

$$\mathrm{d}X = -Z\mathrm{d}t - t\mathrm{d}Z$$
$$\mathrm{d}Y = -Z\mathrm{d}u - u\mathrm{d}Z$$
$$(1 + tt + uu)\mathrm{d}Z + Z(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u) = 0$$

siue

$$\mathrm{d}Z = -Z^3(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u)$$
$$\mathrm{d}X = -Z^3(1 + uu)\mathrm{d}t + Z^3 tu\mathrm{d}u$$
$$\mathrm{d}Y = + Z^3 tu\mathrm{d}t - Z^3(1 + tt)\mathrm{d}u$$

adeoque

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = Z^3(-(1+uu)T + tuU)$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} = Z^3(-(1+uu)U + tuV)$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = Z^3(tuT - (1+tt)U)$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} = Z^3(tuU - (1+tt)V)$$

quibus valoribus in expressione praecedente substitutis, prodit

$$k = Z^6(TV - UU)(1+tt+uu) = Z^4(TV - UU)$$

$$= \frac{TV - UU}{(1+tt+uu)^2}$$

8.

Per idoneam electionem initii et axium coordinatarum facile effici potest, vt pro puncto determinato A valores quantitatum t, u, U euanescant. Scilicet duae priores conditiones iam adimplentur, si planum tangens in hoc puncto pro plano coordinatarum x, y adoptatur. Quarum initium si insuper in puncto A ipso collocatur, manifesto expressio coordinatarum z adipiscitur formam talem

$$z = \tfrac{1}{2}T^\circ xx + U^\circ xy + \tfrac{1}{2}V^\circ yy + \Omega$$

vbi Ω erit ordinis altioris quam secundi. Mutando dein situm axium ipsarum x, y angulo M tali vt habeatur

$$\operatorname{tang} 2M = \frac{2U^\circ}{T^\circ - V^\circ}$$

facile perspicitur, prodituram esse aequationem huius formae

$$z = \tfrac{1}{2}Txx + \tfrac{1}{2}Vyy + \Omega$$

quo pacto etiam tertiae conditioni satisfactum est. Quibus ita factis, patet

I. Si

I. Si superficies curua secetur plano ipsi normali et per axem coordinatarum x transeunte, oriri curuam planam, cuius radius curuaturae in puncto A fiat $= \frac{1}{T}$, signo positiuo vel negatiuo indicante concauitatem vel conuexitatem versus plagam eam, versus quam coordinatae z sunt positiuae.

II. Simili modo $\frac{1}{V}$ erit in puncto A radius curuaturae curvae planae, quae oritur per sectionem superficiei curuae cum plano per axes ipsarum y, z transeunte.

III. Statuendo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, fit

$$z = \tfrac{1}{2}\,(T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2)\, rr + \Omega$$

vnde colligitur, si sectio fiat per planum superficiei in A normale et cum axe ipsarum x angulum φ efficiens, oriri curuam planam, cuius radius curuaturae in puncto A sit

$$= \frac{1}{T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2}$$

IV. Quoties itaque habetur $T = V$, radii curuaturae in *cunctis* planis normalibus aequales erunt. Si vero T et V sunt inaequales, manifestum est, quum $T \cos \varphi^2 + V \sin \varphi^2$ pro quouis valore anguli φ cadat intra T et V, radios curuaturae in sectionibus principalibus, in I et II consideratis, referri ad curuaturas extremas, puta alterum ad curuaturam maximam, alterum ad minimam, si T et V eodem signo affectae sint, contra alterum ad maximam conuexitatem, alterum ad maximam concauitatem, si T et V signis oppositis gaudeant. Hae conclusiones omnia fere continent, quae ill. Euler de curuatura superficierum curuarum primus docuit.

V. Mensura curuaturae superficiei curuae in puncto A autem nanciscitur expressionem simplicissimam $k = TV$, vnde habemus

THEOREMA. *Mensura curuaturae in quouis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator vnitas, denominator au-*

tem productum duorum radiorum curuaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.

Simul patet, mensuram curuaturae fieri positiuam pro superficiebus concauo-concauis vel conuexo-conuexis (quod discrimen non est essentiale), negatiuam vero pro concauo-conuexis. Si superficies constat e partibus vtriusque generis, in earum confiniis mensura curuaturae euanescens esse debebit. De indole superficierum curuarum talium, in quibus mensura curuaturae vbique euanescit, infra pluribus agetur.

9.

Formula generalis pro mensura curuaturae in fine art. 7 proposita, omnium simplicissima est, quippe quae quinque tantum elementa implicat; ad magis complicatam, scilicet nouem elementa inuoluentem, deferimur, si adhibere volumus modum primum indolem superficiei curuae exprimendi. Retinendo notationes art. 4. insuper statuemus:

$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x^2} = P', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y^2} = Q', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}z^2} = R'$$

$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y\,.\,\mathrm{d}z} = P'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{d}z} = Q'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{d}y} = R''$$

ita vt fiat

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= P'\mathrm{d}x + R''\mathrm{d}y + Q''\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}Q &= R''\mathrm{d}x + Q'\mathrm{d}y + P''\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}R &= Q''\mathrm{d}x + P''\mathrm{d}y + R'\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Iam quum habeatur $t = -\frac{P}{R}$, inuenimus per differentiationem

$$RR\mathrm{d}t = -R\mathrm{d}P + P\mathrm{d}R = (PQ'' - RP')\mathrm{d}x + (PP'' - RR'')\mathrm{d}y + (PR' - RQ'')\mathrm{d}z,$$

siue, eliminata $\mathrm{d}z$ adiumento aequationis $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$,

$$R^3\,\mathrm{d}t = (-RRP' + 2PRQ'' - PPR')\,\mathrm{d}x + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\,\mathrm{d}y.$$

Prorsus simile modo obtinemus

$$R^3\,\mathrm{d}u = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\,\mathrm{d}x + (-RRQ' + 2QRP'' - QQR')\,\mathrm{d}y$$

Hinc itaque colligimus

$$R^3\,T = -RRP' + 2PRQ'' - PPR'$$
$$R^3\,U = PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR''$$
$$R^3\,V = -RRQ' + 2QRP'' - QQR'$$

Substituendo hos valores in formula art. 7, obtinemus pro mensura curuaturae k expressionem symmetricam sequentem:

$$(PP + QQ + RR)^2\,k =$$
$$PP(Q'R' - P''P'') + QQ(P'R' - Q''Q'') + RR(P'Q' - R''R'')$$
$$+ 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'')$$

10.

Formulam adhuc magis complicatam, puta e quindecim elementis conflatam, obtinemus, si methodum generalem secundam, indolem superficierum curuarum exprimendi, sequimur. Magni tamen momenti est, hanc quoque elaborare. Retinendo signa art. 4, insuper statuemus

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p^2} = \alpha,\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \alpha',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q^2} = \alpha''$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p^2} = \beta,\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \beta',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q^2} = \beta''$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p^2} = \gamma',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \gamma',\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q^2} = \gamma''$$

Praeterea breuitatis caussa faciemus

$$bc' - cb' = A$$
$$ca' - ac' = B$$
$$ab' - ba' = C$$

Primo obseruamus, haberi $A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z = 0$, siue $\mathrm{d}z = -\frac{A}{C}\mathrm{d}x - \frac{B}{C}\mathrm{d}y$; quatenus itaque z spectatur tamquam functio ipsarum x, y, fit

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t = -\frac{A}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u = -\frac{B}{C}$$

Porro deducimus, ex $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}p + a'\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}y = b\mathrm{d}p + b'\mathrm{d}q$,

$$C\mathrm{d}p = b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y$$

$$C\mathrm{d}q = -b\mathrm{d}x + a\mathrm{d}y$$

Hinc obtinemus differentialia completa ipsarum t, u

$$C^3\mathrm{d}t = \left(A\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\right)(b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y)$$
$$+ \left(C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} - A\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}\right)(b\mathrm{d}x - a\mathrm{d}y)$$

$$C^3\mathrm{d}u = \left(B\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p}\right)(b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y)$$
$$+ \left(C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} - B\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}\right)(b\mathrm{d}x - a\mathrm{d}y$$

Iam si in his formulis substituimus

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma'$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha'$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

atque perpendimus, valores differentialium $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}u$ sic prodeuntium, aequales esse debere, independenter a differentialibus $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, quantitatibus $T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y$, $U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$ resp. inueniemus, post quasdam transformationes satis obuias

$$\begin{aligned} C^3 T = {} & \alpha A b' b' + \beta B b' b' + \gamma C b' b' \\ & - 2\alpha' A b b' - 2\beta' B b b' - 2\gamma' C b b' \\ & + \alpha'' A b b + \beta'' B b b + \gamma'' C b b \\ C^3 U = {} & - \alpha A a' b' - \beta B a' b' - \gamma C a' b' \\ & + \alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\ & - \alpha'' A a b - \beta'' B a b - \gamma'' C a b \\ C^3 V = {} & \alpha A a' a' + \beta B a' a' + \gamma C a' a' \\ & - 2\alpha' A a a' - 2\beta' B a a' - 2\gamma' C a a' \\ & + \alpha'' A a a + \beta'' B a a + \gamma'' C a a \end{aligned}$$

Si itaque breuitatis caussa statuimus

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D \;\ldots\ldots\; (1)$$
$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D' \;\ldots\ldots\; (2)$$
$$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'' \;\ldots\ldots\; (3)$$

fit

$$C^3 T = D b' b' - 2D' b b' + D'' b b$$
$$C^3 U = - D a' b' + D'(ab' + ba') - D'' a b$$
$$C^3 V = D a' a' - 2D' a a' + D'' a a$$

Hinc inuenimus, euolutione facta,

$$C^6 (TV - UU) = (DD'' - D'D')(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'D')CC$$

et proin formulam pro mensura curuaturae

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}$$

11.

Formulae modo inuentae iam aliam superstruemus, quae inter fertilissima theoremata in doctrina de superficiebus curuis referenda est. Introducamus sequentes notationes:

$$
\begin{aligned}
aa + bb + cc &= E\\
aa' + bb' + cc' &= F\\
a'a' + b'b' + c'c' &= G\\
a\alpha + b\beta + c\gamma &= m \ldots\ldots (4)\\
a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= m' \ldots\ldots (5)\\
a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' &= m'' \ldots\ldots (6)\\
a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= n \ldots\ldots (7)\\
a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' &= n' \ldots\ldots (8)\\
a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' &= n'' \ldots\ldots (9)\\
AA + BB + CC &= EG - FF = \Delta
\end{aligned}
$$

Eliminemus ex aequationibus 1, 4, 7, quantitates β, γ, quod fit multiplicando illas per $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$, et addendo: ita oritur

$$
\begin{aligned}
&(A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC))\alpha\\
&= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC)
\end{aligned}
$$

quam aequationem facile transformamus in hanc:

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE)$$

Simili modo eliminatio quantitatum α, γ vel α, β ex iisdem aequationibus suppeditat

$$
\begin{aligned}
BD &= \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE)\\
CD &= \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE)
\end{aligned}
$$

Multiplicando has tres aequationes per α'', β'', γ'' et addendo obtinemus

$$DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE) \ldots (10)$$

Si perinde tractamus aequationes 2, 5, 8, prodit

$$
\begin{aligned}
AD' &= \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E)\\
BD' &= \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E)\\
CD' &= \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E)
\end{aligned}
$$

quibus aequationibus per α', β', γ' multiplicatis, additio suppeditat:

$$D'D' = (\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E)$$

Combinatio huius aequationis cum aequatione (10) producit

$$DD'' - D'D' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma')\Delta$$
$$+ E(n'n' - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'm' - mm'')$$

Iam patet esse $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = 2m$, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} = 2m'$, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = m' + n$, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} = m'' + n$,

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} = 2n', \quad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} = 2n'', \text{ siue}$$

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}, \quad m' = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}, \quad m'' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} - \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}$$

$$n = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} - \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}, \quad n' = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}, \quad n'' = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}$$

Porro facile confirmatur, haberi

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma' = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} - \frac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}m''}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}q}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} + \frac{\mathrm{dd}F}{\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}$$

Quodsi iam has expressiones diuersas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, peruenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus F, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$4(EG - FF)^2 k = E\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} + \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)^2\right)$$
$$+ F\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} - \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} - 2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q}\right.$$
$$\left. + 4\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)$$
$$+ G\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} - 2\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} + \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\right)^2\right)$$

$$- 2 (EG - FF) \left(\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} - 2 \frac{\mathrm{dd}F}{\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}\right).$$

12.

Quum indefinite habeatur

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2,$$

patet, $\surd\,(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)$ esse expressionem generalem elementi linearis in superficie curua. Docet itaque analysis in art. praec. explicata, ad inueniendam mensuram curuaturae haud opus esse formulis finitis, quae coordinatas x, y, z tamquam functiones indeterminatarum p, q exhibeant, sed sufficere expressionem generalem pro magnitudine cuiusuis elementi linearis. Progrediamur ad aliquot applicationes huius grauissimi theorematis.

Supponamus superficiem nostram curuam explicari posse in aliam superficiem, curuam seu planam, ita vt cuiuis puncto prioris superficiei per coordinatas x, y, z determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint x', y', z'. Manifesto itaque x', y', z' quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum p, q, vnde pro elemento $\surd\,(\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2)$ prodibit expressio talis

$$\surd\,(E'\mathrm{d}p^2 + 2F'\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q + G'\mathrm{d}q^2)$$

denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in vtraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E = E',\ F = F',\ G = G'.$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curua in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curuaturae in singulis punctis inuariata manet.*

Manifesto quoque *quaeuis pars finita superficiei curuae post explicationem in aliam superficiem eandem curuaturam integram retinebit.*

Casum specialem, ad quem geometrae hactenus inuestigationes suas restrinxerunt, sistunt superficies in planum explicabiles. Theoria nostra sponte docet, talium superficierum mensuram curuaturae in quouis puncto fieri $= 0$, quocirca, si earum indoles secundum modum tertium exprimitur, vbique erit

$$\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}y}\right)^2 = 0$$

quod criterium, dudum quidem notum, plerumque nostro saltem iudicio haud eo rigore qui desiderari posset demonstratur.

13.

Quae in art. praec. exposuimus, cohaerent cum modo peculiari superficies considerandi, summopere digno, qui a geometris diligenter excolatur. Scilicet quatenus superficies consideratur non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum, cuius dimensio vna pro euanescente habetur, flexile quidem, sed non extensibile, qualitates superficiei partim a forma pendent, in quam illa reducta concipitur, partim absolutae sunt, atque inuariatae manent, in quamcunque formam illa flectatur. Ad has posteriores, quarum inuestigatio campum geometriae nouum fertilemque aperit, referendae sunt mensura curuaturae atque curuatura integra eo sensu, quo hae expressiones a nobis accipiuntur; porro huc pertinet doctrina de lineis breuissimis, pluraque alia, de quibus in posterum agere nobis reseruamus. In hoc considerationis modo superficies plana atque superficies in planum explicabilis, e. g. cylindrica, conica etc. tamquam essentialiter identicae spectantur, modusque genuinus indolem superficiei ita consideratae generaliter exprimendi semper innititur formulae $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$, quae nexum elementi cum duabus indeterminatis p, q sistit. Sed antequam hoc argumentum vlterius prosequamur, principia theoriae linearum breuissimarum in superficie curua data praemittere oportet.

14.

Indoles lineae curuae in spatio generaliter ita datur, vt coordinatae x, y, z singulis illius punctis respondentes exhibeantur in forma functionum vnius variabilis, quam per w denotabimus. Longitudo talis lineae a puncto initiali arbitrario vsque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z, exprimitur per integrale

$$\int \mathrm{d}w \,.\, \sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2\right)}$$

Si supponimus, situm lineae curuae variationem infinite paruam pati, ita vt coordinatae singulorum punctorum accipiant variationes δx, δy, δz, variatio totius longitudinis inuenitur

$$= \int \frac{\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}y \,.\, \mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z \,.\, \mathrm{d}\delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}}$$

quam expressionem in hanc formam transmutamus:

$$\frac{\mathrm{d}x \,.\, \delta x + \mathrm{d}y \,.\, \delta y + \mathrm{d}z \,.\, \delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}} - \int \Big(\delta x \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z^2)}}$$
$$+ \delta y \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}} + \delta z \,.\, \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}}\Big)$$

In casu eo, vbi linea est breuissima inter puncta sua extrema, constat, ea, quae hic sub signo integrali sunt, euanescere debere. Quatenus linea esse debet in superficie data, cuius indoles exprimitur per aequationem $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$, etiam variationes δx, δy, δz satisfacere debent aequationi $P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$, vnde per principia nota facile colligitur, differentialia

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\ \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\ \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$

resp. quantitatibus P, Q, R proportionalia esse debere. Iam sit $\mathrm{d}r$ elementum lineae curuae, λ punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem huius elementi, L punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem normalis in superficiem curuam; denique sint ξ, η, ζ coordinatae puncti λ, atque X, Y, Z coordinatae puncti L respectu centri sphaerae. Ita erit

$$\mathrm{d}x = \xi \mathrm{d}r,\ \mathrm{d}y = \eta \mathrm{d}r,\ \mathrm{d}z = \zeta \mathrm{d}r$$

vnde colligimus, differentialia illa fieri $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\zeta$. Et quum quantitates P, Q, R proportionales sint ipsis X, Y, Z, character lineae breuissimae consistit in aequationibus

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{X} = \frac{\mathrm{d}\eta}{Y} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{Z}$$

Ceterum facile perspicitur, $\sqrt{(\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2)}$ aequari arculo in superficie sphaerica, qui mensurat angulum inter directiones tangentium in initio et fine elementi $\mathrm{d}r$, adeoque esse $= \frac{\mathrm{d}r}{\varrho}$ si ϱ denotet radium curuaturae in hoc loco curuae breuissimae; ita fiet

$$\varrho \mathrm{d}\xi = X\mathrm{d}r,\ \varrho \mathrm{d}\eta = Y\mathrm{d}r,\ \varrho \mathrm{d}\zeta = Z\mathrm{d}r$$

15.

Supponamus, in superficie curua a puncto dato A proficisci innumeras curuas breuissimas, quas inter se distinguemus per angulum, quem constituit singularum elementum primum cum elemento primo vnius ex his lineis pro prima assumtae: sit φ ille angulus, vel generalius functio illius anguli, nec non r longitudo talis lineae breuissimae a puncto A vsque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z. Quum itaque valoribus determinatis variabilium r, φ respondeant puncta determinata superficiei, coordinatae x, y, z considerari possunt tamquam functiones ipsarum r, φ. Notationes λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z in eadem significatione retinebimus, in qua in art. praec. acceptae fuerunt, modo indefinite ad punctum indefinitum cuiuslibet linearum breuissimarum referantur.

Lineae breuissimae omnes, quae sunt aequalis longitudinis r, terminabuntur ad aliam lineam, cuius longitudinem ab initio arbitrario numeratam denotamus per v. Considerari poterit itaque v tamquam functio indeterminatarum r, φ, et si per λ' designamus punctum in superficie sphaerica respondens directioni elementi dv, nec non per ξ', η', ζ' coordinatas huius puncti respectu centri sphaerae, habebimus:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = \xi' \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \eta' \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = \zeta' \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}$$

Hinc et ex

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \xi, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = \eta, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \zeta$$

sequitur

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\lambda\lambda' \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}$$

Membrum primum huius aequationis, quod etiam erit functio ipsarum r, φ, per S denotamus; cuius differentiatio secundum r suppeditat:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2\right)}{\mathrm{d}\varphi}$$
$$= \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)}{\mathrm{d}\varphi}$$

Sed $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$, adeoque ipsius differentiale $= 0$; et per art, praec. habemus, si etiam hic ϱ denotat radium curuaturae in linea r,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\varrho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\varrho}, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\varrho}$$

Ita obtinemus

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\varrho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{1}{\varrho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = 0$$

quoniam manifesto λ' iacet in circulo maximo, cuius polus L. Hinc itaque concludimus, S independentem esse ab r et proin functionem solius φ. At pro $r = 0$ manifesto fit $\nu = 0$, et proin etiam $\frac{d\nu}{d\varphi} = 0$, nec non $S = 0$ independenter a φ. Necessario itaque generaliter esse debebit $S = 0$, adeoque $\cos \lambda\lambda' = 0$, i. e. $\lambda\lambda' = 90°$. Hinc colligimus

THEOREMA. *Ductis in superficie curua ab eodem puncto initiali innumeris lineis breuissimis aequalis longitudinis, linea earum extremitates iungens ad illas singulas erit normalis.*

Operae pretium esse duximus, hoc theorema e proprietate fundamentali linearum breuissimarum deducere: ceterum eius veritas etiam absque calculo per sequens ratiocinium intelligi potest. Sint AB, AB' duae lineae breuissimae eiusdem longitudinis, angulum infinite paruum ad A includentes, supponamusque, alterutrum angulorum elementi BB' cum lineis BA, $B'A$ differre quantitate finita ab angulo recto, vnde per legem continuitatis alter maior alter minor erit angulo recto. Supponamus, angulum ad B esse $= 90° - \omega$, capiamusque in linea BA punctum C ita vt sit $BC = BB' . \operatorname{cosec} \omega$: hinc quum triangulum infinite paruum $BB'C$ tamquam planum tractare liceat, erit $CB' = BC . \cos \omega$, et proin $AC + CB' = AC + BC . \cos \omega = AB - BC . (1 - \cos \omega) = AB' - BC\,(1 - \cos \omega)$, i. e. transitus a puncto A ad B' per punctum C breuior linea breuissima, $Q . E . A.$

16.

Theoremati art. praec. associamus aliud, quod ita enunciamus. *Si in superficie curua concipitur linea qualiscunque, a cuius punctis singulis proficiscantur sub angulis rectis et versus eandem plagam innumerae lineae breuissimae aequalis longitudinis, curua, quae earum extremitates alteras iungit, illas singulas sub angulis rectis secabit.* Ad demonstrationem nihil in analysi praecedente mutandum est, nisi quod φ designare debet longitudinem curuae *datae* inde a puncto arbitrario numeratam, aut si mauis functionem huius longitudinis; ita omnia ratiocinia etiamnum valebunt, ea modificatione, quod veritas aequationis $S = 0$ pro $r = 0$ nunc iam in ipsa hypothesi implicatur. Ceterum hoc alterum theorema generalius est praecedente, quod adeo in illo comprehendi censeri potest, dum pro linea data adoptamus circulum infinite paruum circa centrum A descriptum. Denique monemus, hic quoque considerationes geometricas analyseos vice fungi posse, quibus tamen quum satis obuiae sint hic non immoramur.

17.

Reuertimur ad formulam $\sqrt{}(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)$, quae indefinite magnitudinem elementi linearis in superficie curua exprimit, atque ante omnia significationem geometricam coëfficientium E, F, G examinamus. Iam in art. 5 monuimus, in superficie curua concipi posse duo systemata linearum, alterum, in quibus singulis sola p sit variabilis, q constans; alterum, in quibus sola q variabilis, p constans. Quodlibet punctum superficiei considerari potest tamquam intersectio lineae primi systematis cum linea secundi: tuncque elementum lineae primae huic puncto adiacens et variationi $\mathrm{d}p$ respondens erit $= \sqrt{}E \,.\, \mathrm{d}p$, nec non elementum lineae secundae respondens variationi $\mathrm{d}q$ erit $= \sqrt{}G \,.\, \mathrm{d}q$; denique denotando per ω angulum inter haec elementa, facile perspicitur fieri cos ω

$= \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Area autem elementi parallelogrammatici in superficie curua inter duas lineas primi systematis, quibus respondent q, $q + \mathrm{d}q$, atque duas lineas systematis secundi quibus respondent p, $p + \mathrm{d}p$, erit $\sqrt{(EG - FF)}\, \mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q$.

Linea quaecunque in superficie curua ad neutrum illorum systematum pertinens, oritur, dum p et q concipiuntur esse functiones vnius variabilis nouae, vel altera illarum functio alterius. Sit s longitudo talis curuae ab initio arbitrario numerata et versus directionem vtramuis pro positiua habita. Denotemus per θ angulum, quem efficit elementum $\mathrm{d}s = \sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$ cum linea primi systematis per initium elementi ducta, et quidem ne vlla ambiguitas remaneat, hunc angulum semper ab eo ramo illius lineae, in quo valores ipsius p crescunt, inchoari, et versus eam plagam positiue accipi supponemus, versus quam valores ipsius q crescunt. His ita intellectis facile perspicitur haberi

$$\cos\theta \,.\, \mathrm{d}s = \sqrt{E} \,.\, \mathrm{d}p + \sqrt{G} \,.\, \cos\omega \,.\, \mathrm{d}q = \frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\theta \,.\, \mathrm{d}s = \sqrt{G} \,.\, \sin\omega \,.\, \mathrm{d}q = \frac{\sqrt{(EG - FF)} \,.\, \mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

18.

Inuestigabimus nunc, quaenam sit conditio, vt haec linea sit breuissima. Quum ipsius longitudo s expressa sit per integrale

$$s = \int \sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \,.\, \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$$

conditio minimi requirit, vt variatio huius integralis a mutatione infinite parua tractus lineae oriunda fiat $= 0$. Calculus ad propositum nostrum in hoc casu commodius absoluitur, si p tamquam functionem ipsius q consideramus. Quo pacto, si variatio per characteristicam δ denotatur, habemus

$$\delta s = \int \frac{\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}q^2\right)\delta p + (2E\mathrm{d}p + 2F\mathrm{d}q)\mathrm{d}\delta p}{2\,\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}.\delta p + \int \delta p.\left(\frac{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2}{2\,\mathrm{d}s} - \mathrm{d}\,.\,\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)$$

constatque, quae hic sunt sub signo integrali, independenter a δp euanescere debere. Fit itaque

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2 = 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$$

$$= 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\sqrt{E}.\cos\theta = \frac{\mathrm{d}s.\mathrm{d}E.\cos\theta}{\sqrt{E}} - 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}\theta.\sqrt{E}.\sin\theta$$

$$= \frac{(E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q)\,\mathrm{d}E}{E} - 2\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{E}\right).\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q\right) - 2\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$

Hinc itaque nanciscimur aequationem conditionalem pro linea brevissima sequentem:

$$\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p + \tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

quam etiam ita scribere licet

$$\sqrt{(EG - FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\mathrm{d}E + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Ceterum adiumento aequationis

$$\cot\theta = \frac{E}{\sqrt{(EG - FF)}}.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + \frac{F}{\sqrt{(EG - FF)}}$$

ex

ex illa aequatione angulus θ eliminari, atque sic aequatio differentio-differentialis inter p et q euolui potest, quae tamen magis complicata, et ad applicationes minus vtilis euaderet, quam praecedens.

19.

Formulae generales, quas pro mensura curuaturae et pro variatione directionis lineae breuissimae in artt. 11, 18 eruimus, multo simpliciores fiunt, si quantitates p, q ita sunt electae, vt lineae primi systematis lineas secundi systematis vbique orthogonaliter secent, i. e. vt generaliter habeatur $\omega = 90°$, siue $F = 0$. Tunc scilicet fit, pro mensura curuaturae,

$$4EEGGk = E.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} + E\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)^2 + G.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} + G\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\right)^2$$
$$-2EG\left(\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} + \frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}\right),$$

et pro variatione anguli θ

$$\sqrt{EG}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Inter varios casus, in quibus haec conditio orthogonalitatis valet, primarium locum tenet is, vbi lineae omnes alterutrius systematis, e. g. primi, sunt lineae breuissimae. Hic itaque pro valore constante ipsius q, angulus θ fit $= 0$, vnde aequatio pro variatione anguli θ modo tradita docet, fieri debere $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} = 0$, siue coëfficientem E a q independentem, i. e. E esse debet vel constans vel functio solius p. Simplicissimum erit, pro p adoptare longitudinem ipsam cuiusque lineae primi systematis, et quidem, quoties omnes lineae primi systematis in vno puncto concurrunt, ab hoc puncto numeratam, vel, si communis intersectio non adest, a qualibet linea secundi systematis. Quibus ita intellectis patet, p et q iam eadem denotare, quae in artt. 15, 16 per r et φ expresseramus, atque fieri $E = 1$. Ita duae formulae praecedentes iam transeunt in has:

$$4\,G\,G\,k = \left(\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,p}\right)^2 - 2\;G\;\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,p^2}$$

$$\surd G\;.\;\mathrm{d}\,\theta = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,p}\cdot\mathrm{d}\,q$$

vel statuendo $\surd G = m$,

$$k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,p^2},\quad \mathrm{d}\,\theta = -\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,p}\;.\,\mathrm{d}\,q$$

Generaliter loquendo m erit functio ipsarum p, q atque $m\,\mathrm{d}\,q$ expressio elementi cuiusuis lineae secundi systematis. In casu speciali autem, vbi omnes lineae p ab eodem puncto proficiscuntur, manifesto pro $p = 0$ esse debet $m = 0$; porro si in hoc casu pro q adoptamus angulum ipsum, quem elementum primum cuiusuis lineae primi systematis facit cum elemento alicuius ex ipsis ad arbitrium electae, quum pro valore infinite paruo ipsius p, elementum lineae secundi systematis (quae considerari potest tamquam circulus radio p descriptus), sit $= p\,\mathrm{d}\,q$, erit pro valore infinite paruo ipsius p, $m = p$, adeoque, pro $p = 0$ simul $m = 0$ et $\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,p} = 1$.

20.

Immoremur adhuc iidem suppositioni, puta p designare indefinite longitudinem lineae breuissimae a puncto determinato A ad punctum quodlibet superficiei ductum, atque q angulum, quem primum elementum huius lineae efficit cum elemento primo alicuius lineae breuissimae ex A proficiscentis datae. Sit B punctum determinatum in hac linea pro qua $q = 0$, atque C aliud punctum determinatum superficiei, pro quo valorem ipsius q simpliciter per A designabimus. Supponamus, puncta B, C per lineam breuissimam iuncta, cuius partes, inde a puncto B numeratas, indefinite vt in art. 18 per s denotabimus, nec non perinde vt illic, per θ angulum, quem quoduis elementum ds facit cum elemento dp: denique sint θ°, θ' valores anguli θ in punctis B, C. Habemus itaque in superficie curua triangulum lineis breuissimis inclusum, eiusque anguli ad B et C, per has ipsas literas simpliciter designandi aequales erunt ille complemento anguli θ° ad $180°$, hic ipsi angulo θ'. Sed quum analysin nostram inspicienti facile pateat, omnes angulos non per gradus sed per numeros expressos concipi, ita vt angulus $57° 17' 45''$, cui respondet arcus radio aequalis, pro vnitate habeatur, statuere oportet, denotando per 2π peripheriam circuli

$$\theta^\circ = \pi - B, \quad \theta' = C$$

Inquiramus nunc in curuaturam integram huius trianguli, quae fit $= \int k \, d\sigma$, denotante $d\sigma$ elementum superficiale trianguli; quare quum hoc elementum exprimatur per $m \, dp \,.\, dq$, eruere oportet integrale $\int\int k m \, dp \,.\, dq$ supra totam trianguli superficiem. Incipiamus ab integratione secundum p, quae propter $k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{ddm}{dp^2}$, suppeditat dq. (Const. $- \frac{dm}{dp}$), pro curuatura integra areae iacentis inter lineas primi systematis quibus respondent valores indeterminatae secundae q, $q + dq$: quum haec curuatura pro $p = 0$ euanescere debeat, quantitas constans per integrationem introducta aequalis esse debet valori ipsius $\frac{dm}{dp}$ pro $p = 0$, i. e. vnitati. Habemus itaque $dq \, (1 - \frac{dm}{dp})$, vbi pro $\frac{dm}{dp}$ accipere oportet valorem respondentem fini illius areae in linea CB. In hac linea vero fit per art. praec. $\frac{dm}{dp} \,.\, dq = - d\theta$, vnde expressio nostra mutatur in $dq + d\theta$. Accedente iam integratione altera a $q = 0$ vsque ad $q = A$ extendenda, obtinemus curuaturam integram trianguli $= A + \theta' - \theta^\circ$ $= A + B + C - \pi$.

Curuatura integra aequalis est areae eius partis superficiei sphaericae, quae respondet triangulo, signo positiuo vel negatiuo affectae, prout superficies curua, in qua triangulum iacet, est concauo-concaua vel concauo-conuexa: pro vnitate areae accipiendum est quadratum, cuius latus est vnitas (radius sphaerae), quo pacto superficies tota sphaerae fit $= 4\pi$. Est itaque pars superficiei sphaericae triangulo respondens ad sphaerae superficiem integram vt $\pm (A + B + C - \pi)$ ad 4π. Hoc theorema, quod ni fallimur ad elegantissima in theoria superficierum curuarum referendum esse videtur, etiam sequenti modo enunciari potest:

Excessus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-concaua formati vltra 180°, vel defectus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-conuexa formati a 180° mensuratur per aream partis superficiei sphaericae, quae illi triangulo per directiones normalium respondet, si superficies integra 720 gradibus aequiparatur.

Generalius in quouis polygono n laterum, quae singula formantur per lineas breuissimas, excessus summae angulorum supra $2n-4$ rectos, vel defectus a $2n-4$ rectis (pro indole curuaturae superficiei), aequatur areae polygoni respondentis in superficie sphaerica, dum tota superficies sphaerae 720 gradibus aequiparatur, vti per discerptionem polygoni in triangula e theoremate praecedente sponte demanat.

21.

Restituamus characteribus p, q, E, F, G, ω significationes generales, quibus supra accepti fuerant, supponamusque, indolem superficiei curuae praeterea alio simili modo per duas alias variabiles p', q' determinari, vbi elementum lineare indefinitum exprimatur per

$$\sqrt{(E'\mathrm{d}p'^2 + 2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q' + G'\mathrm{d}q'^2)}$$

Ita cuiuis puncto superficiei per valores determinatos variabilium p, q definito respondebunt valores determinati variabilium p', q', quocirca hae erunt functiones ipsarum p, q, e quarum differentiatione prodire supponemus

$$\mathrm{d}p' = \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q$$

Iam proponimus nobis inuestigare significationem geometricam horum coëfficientium α, β, γ, δ.

Quatuor itaque nunc systemata linearum in superficie curua concipi possunt, pro quibus resp. q, p, q', p' sint constantes. Si per punctum determinatum, cui respondent variabilium valores p, q, p', q', quatuor lineas ad singula illa systemata pertinentes ductas supponimus, harum elementa, variationibus positiuis $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$, respondentes erunt

$$\sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p,\quad \sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q,\quad \sqrt{E'}\,.\,\mathrm{d}q',\quad \sqrt{G'}\,.\,\mathrm{d}q'.$$

Angulos, quos horum elementorum directiones faciunt cum directione fixa arbitraria, denotabimus per M, N, M', N', numerando eo sensu, quo iacet secunda respectu primae, ita vt $\sin(N - M)$ fiat quantitas positiua: eodem sensu iacere supponemus (quod licet) quartam respectu tertiae, ita vt etiam $\sin(N' - M')$ sit quantitas positiua. His ita intellectis, si consideramus punctum aliud, a priori infinite parum distans, cui respondeant valores variabilium $p + \mathrm{d}p$, $q + \mathrm{d}q$, $p' + \mathrm{d}p'$, $q' + \mathrm{d}q'$, leui attentione adhibita cognoscemus, fieri generaliter, i. e. independenter a valoribus variationum $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$,

$$\sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p\,.\sin M + \sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q\,.\sin N = \sqrt{E'}\,.\,\mathrm{d}p'\,.\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,\mathrm{d}q'\,.\sin N';$$

quum vtraque expressio nihil aliud sit, nisi distantia puncti noui a linea, a qua anguli directionum incipiunt. Sed habemus, per notationem iam supra introductam $N - M = \omega$, et per analogiam statuemus $N' - M' = \omega'$, nec non insuper $N - M' = \psi$. Ita aequatio modo inuenta exhiberi potest in forma sequente

$$\sqrt{E}\,.\,\mathrm{d}p\,.\,\sin(M' - \omega + \psi) + \sqrt{G}\,.\,\mathrm{d}q\,.\,\sin(M' + \psi)$$
$$= \sqrt{E'}\,.\,\mathrm{d}p'\,.\,\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,\mathrm{d}q'\,\sin(M' + \omega')$$

vel ita

$$\sqrt{E}.\mathrm{d}p\,.\sin(N' - \omega - \omega') + \psi) + \sqrt{G}.\mathrm{d}q.\sin(N' - \omega' + \psi)$$
$$= \sqrt{E'}.\mathrm{d}p'\,\sin(N' - \omega') + \sqrt{G'}.\mathrm{d}q'\,\sin N'$$

Et quum aequatio manifesto independens esse debeat a directione initiali, hanc ad lubitum accipere licet. Statuendo itaque in forma secunda $N' = 0$, vel in prima $M' = 0$, obtinemus aequationes sequentes:

$$\sqrt{E'}\,.\sin\omega'\,.\,\mathrm{d}p' = \sqrt{E}.\sin(\omega + \omega' - \psi).\mathrm{d}p + \sqrt{G}.\sin(\omega' - \psi).\mathrm{d}q$$
$$\sqrt{G'}\,.\,\sin\omega'\,.\,\mathrm{d}q' = \sqrt{E}\,.\,\sin(\psi - \omega)\,.\mathrm{d}p + \sqrt{G}\,.\sin\psi\,.\,\mathrm{d}q$$

quae aequationes quum identicae esse debeant cum his

$$\mathrm{d}p' = \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q$$

suppeditabunt determinationem coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Erit scilicet

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega + \omega' - \psi)}{\sin\omega'},\quad \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega' - \psi)}{\sin\omega'}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}}\cdot\frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin\omega'},\quad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin\omega'}$$

Adiungi debent aequationes $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$, $\cos\omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}$, $\sin\omega = \sqrt{\frac{EG - FF}{EG}}$, $\sin\omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'F'}{E'G'}}$, vnde quatuor aequationes ita quoque exhiberi possunt

$$\alpha\sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{EG'}\,.\,\sin(\omega + \omega' - \psi)$$
$$\beta\sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{GG'}\,.\,\sin(\omega' - \psi)$$
$$\gamma\sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{EE'}\,.\,\sin(\psi - \omega)$$
$$\delta\sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{GE'}\,.\,\sin\psi$$

Quum per substitutiones $\mathrm{d}p' = \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}q' = \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q$

trinomium $E'\mathrm{d}p'^2 + 2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q' + G'\mathrm{d}q'^2$ transire debeat in $E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2$, facile obtinemus

$$EG - FF = (E'G' - F'F')(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

et quum vice versa trinomium posterius rursus transire debeat in prius per substitutionum

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\,\mathrm{d}p = \delta\,\mathrm{d}p' - \beta\,\mathrm{d}q',\ (\alpha\delta-\beta\gamma)\,\mathrm{d}q = -\gamma\,\mathrm{d}p' + \alpha\,\mathrm{d}q',$$

inuenimus

$$E\delta\delta - 2F\gamma\delta + G\gamma\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot E'$$

$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot F'$$

$$E\beta\beta - 2F\alpha\beta + G\alpha\alpha = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'}\cdot G'$$

22.

A disquisitione generali art. praec. descendimus ad applicationem latissime patentem, vbi, dum p et q etiamnum significatione generalissima accipiuntur, pro p', q', adoptamus quantitates in art. 15. per r, φ denotatas, quibus characteribus etiam hic vtemur, scilicet vt pro quouis puncto superficiei r sit distantia minima a puncto determinato, atque φ angulus in hoc puncto inter elementum primum ipsius r atque directionem fixam. Ita habemus $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega' = 90°$: statuemus insuper $\sqrt{G'} = m$, ita vt elementum lineare quodcunque fiat $= \sqrt{(\mathrm{d}r^2 + mm\,\mathrm{d}\varphi^2)}$. Hinc quatuor aequationes in art. praec pro α, β, γ, δ, erutae, suppeditant:

$$\sqrt{E}.\cos(\omega - \psi) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sqrt{G}.\cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\sqrt{E}.\sin(\psi - \omega) = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \ldots\ldots (3)$$

$$\sqrt{G} \,.\, \sin\psi = m \,.\, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} \,\ldots\ldots\ldots\, (1)$$

Vltima et penultima vero has

$$EG - FF = E\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 - 2F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} + G\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 \ldots\ldots (5)$$

$$\left(E.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} = \left(F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - G.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \ldots (6)$$

Ex his aequationibus petenda est determinatio quantitatum r, φ, ψ et (si opus videatur) m, per p et q: scilicet integratio aequationis (5) dabit r, qua inuenta integratio aequationis (6) dabit φ, atque alterutra aequationum (1), (2) ipsam ψ: denique m habebitur per alterutram aequationum (3), (4).

Integratio generalis aequationum (5), (6) necessario duas functiones arbitrarias introducere debet, quae quid sibi velint facile intelligemus, si perpendimus, illas aequationes ad casum eum quem hic consideramus non limitari, sed perinde valere, si r et φ accipiantur in significatione generaliori art. 16, ita vt sit r longitudo lineae breuissimae ad lineam arbitrariam determinatam normaliter ductae, atque φ functio arbitraria longitudinis eius partis lineae, quae inter lineam breuissimam indefinitam et punctum arbitrarium determinatum intercipitur. Solutio itaque generalis haec omnia indefinite amplecti debet, functionesque arbitrariae tunc demum in definitas abibunt, quando linea illa arbitraria atque functio partium quam φ exhibere debet, praescriptae sunt. In casu nostro circulus infinite paruus adoptari potest, centrum in eo puncto habens, a quo distantiae r numerantur, et φ denotabit partes huius circuli ipsas per radium diuisas, vnde facile colligitur, aequationes (5), (6) pro casu nostro complete sufficere, dummodo ea, quae indefinita relinquunt, ei conditioni accommodentur, vt r et φ pro puncto illo initiali atque punctis ab eo infinite parum distantibus quadrent.

Ceterum

Ceterum quod attinet ad integrationem ipsam aequationum (5), (6), constat, eam reduci posse ad integrationem aequationum differentialium vulgarium, quae tamen plerumque tam intricatae euadunt, vt parum lucri inde redundet. Contra euolutio in series, quae ad vsus practicos, quoties de partibus superficiei modicis agitur, abunde sufficiunt, nullis difficultatibus obnoxia est, atque sic formulae allatae fontem vberem aperiunt, ad multa problemata grauissima soluenda. Hoc vero loco exemplum vnicum ad methodi indolem monstrandam euoluemus.

23.

Considerabimus casum eum, vbi omnes lineae, pro quibus p constans est, sunt lineae breuissimae orthogonaliter secantes lineam pro qua $\varphi = 0$, et quam tamquam lineam abscissarum contemplari possumus. Sit A punctum pro quo $r = 0$, D punctum indefinitum in linea abscissarum, $AD = p$, B punctum indefinitum in linea breuissima ipsi AD in D normali, atque $BD = q$, ita vt p considerari possit tamquam abscissa, q tamquam ordinata puncti B; abscissas positiuas assumimus in eo ramo lineae abscissarum, cui respondet $\varphi = 0$, dum r semper tamquam quantitatem positiuam spectamus; ordinatas positiuas statuimus in plaga ea, vbi φ numeratur inter 0 et 180°.

Per theorema art. 16 habebimus $\omega = 90°$, $F = 0$, nec non $G = 1$; statuemus insuper $\sqrt{E} = n$. Erit itaque n functio ipsarum p, q, et quidem talis, quae pro $q = 0$ fieri debet $= 1$. Applicatio formulae in art. 18 allatae ad casum nostrum docet, in *quauis* linea breuissima esse debere $\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p$, denotante θ angulum inter elementum huius lineae atque elementum lineae pro qua q constans: iam quum linea abscissarum ipsa sit breuissima, atque pro ea vbique $\theta = 0$, patet, pro $q = 0$ vbique fieri debere $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} = 0$.

Hinc igitur colligimus, si n in seriem secundum potestates ipsius q progredientem euoluatur, hanc habere debere formam sequentem

$$n = 1 + fqq + gq^3 + hq^4 + \text{etc.}$$

vbi f, g, h etc. erunt functiones ipsius p, et quidem statuemus

$$\begin{aligned} f &= f^\circ + f'p + f''pp + \text{etc.} \\ g &= g^\circ + g'p + g''pp + \text{etc.} \\ h &= h^\circ + h'p + h''pp + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. siue

$$\begin{aligned} n = 1 + f^\circ qq + f'pqq &+ f''ppqq + \text{etc.} \\ + g^\circ q^3 &+ g'pq^3 + \text{etc.} \\ &+ h^\circ q^4 + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

24.

Aequationes art. 22 in casu nostro suppeditant

$$n \sin\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}, \quad \cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}, \quad -n\cos\psi = m \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}, \quad \sin\psi = m \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$nn = nn\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2, \quad nn \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

Adiumento harum aequationum, quarum quinta et sexta iam in reliquis continentur, series euolui poterunt pro r, φ, ψ, m, vel pro quibuslibet functionibus harum quantitatum, e quibus eas, quae imprimis attentione sunt dignae, hic sistemus.

Quum pro valoribus infinite paruis ipsarum p, q fieri debeat $rr = pp + qq$, series pro rr incipiet a terminis $pp + qq$: terminos altiorum ordinum obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum *) adiumento aequationis

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}\right)^2 = 4rr$$

*) Calculum, qui per nonnulla artificia paullulum contrahi potest, hic adscribere superfluum duximus.

scilicet

$$[1]\quad rr = pp + \tfrac{2}{3}f^\circ ppqq + \tfrac{1}{2}f'p^3qq + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^\circ f^\circ)p^4qq \text{ etc.}$$
$$+ qq \qquad + \tfrac{1}{2}g^\circ ppq^3 + \tfrac{2}{5}g'p^3q^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h^\circ - \tfrac{7}{45}f^\circ f^\circ)ppq^4$$

Dein habemus, ducente formula $r\sin\psi = \dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}$,

$$[2]\quad r\sin\psi = p - \tfrac{1}{3}f^\circ pqq - \tfrac{1}{4}f'ppqq - (\tfrac{1}{5}f'' + \tfrac{8}{45}f^\circ f^\circ)p^3qq \text{ etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2}g^\circ pq^3 - \tfrac{2}{5}g'ppq^3$$
$$- (\tfrac{3}{5}h^\circ - \tfrac{8}{45}f^\circ f^\circ)pq^4$$

nec non per formulam $r\cos\psi = \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}$

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \tfrac{2}{3}f^\circ ppq + \tfrac{1}{2}f'p^3q + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^\circ f^\circ)p^4q \text{ etc.}$$
$$+ \tfrac{3}{4}g^\circ ppqq + \tfrac{3}{5}g'p^3qq$$
$$+ (\tfrac{4}{5}h^\circ - \tfrac{14}{45}f^\circ f^\circ)ppq^3$$

Hinc simul innotescit angulus ψ. Perinde ad computum anguli φ concinnius euoluuntur series pro $r\cos\varphi$ atque $r\sin\varphi$, quibus inseruiunt aequationes differentiales partiales

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} = n\cos\varphi\,.\,\sin\psi - r\sin\varphi\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = \cos\varphi\,.\,\cos\psi - r\sin\varphi\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p} = n\sin\varphi\,.\,\sin\psi + r\cos\varphi\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$

$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q} = \sin\varphi\,.\,\cos\psi + r\cos\varphi\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$

$$n\cos\psi\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \sin\psi\,.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

quarum combinatio suppeditat

$$\frac{r\sin\psi}{n}\,.\,\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi\,.\,\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = r\cos\varphi$$

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q}=r\sin\varphi$$

Hinc facile euoluuntur series pro $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, quarum termini primi manifesto esse debent p et q, puta

$$[4]\quad r\cos\varphi=p+\tfrac{2}{3}f^{\circ}pqq+\tfrac{5}{12}f'ppqq+(\tfrac{3}{10}f''-\tfrac{8}{45}f^{\circ}f^{\circ})p^3qq \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}g^{\circ}pq^3+\tfrac{7}{20}g'ppq^3$$
$$+(\tfrac{2}{5}h^{\circ}-\tfrac{7}{45}f^{\circ}f^{\circ})pq^4$$

$$[5]\quad r\sin\varphi=q-\tfrac{1}{3}f^{\circ}ppq-\tfrac{1}{6}f'p^3q-(\tfrac{1}{10}f''-\tfrac{7}{90}f^{\circ}f^{\circ})p^4q \text{ etc.}$$
$$-\tfrac{1}{4}g^{\circ}ppqq-\tfrac{3}{20}g'p^3qq$$
$$-(\tfrac{1}{5}h^{\circ}+\tfrac{13}{90}f^{\circ}f^{\circ})ppq^3$$

E combinatione aequationum [2], [3], [4], [5] deriuari posset series pro $rr\cos(\psi+\varphi)$, atque hinc, diuidendo per seriem [1], series pro $\cos(\psi+\varphi)$, a qua ad seriem pro ipso angulo $\psi+\varphi$ descendere liceret. Elegantius tamen eadem obtinetur sequenti modo. Differentiando aequationem primam et secundam ex iis, quae initio huius art. allatae sunt, obtinemus

$$\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}+n\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q}+\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q}=0$$

qua combinata cum hac

$$n\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}+\sin\psi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}=0$$

prodit

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}+\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}q}=0$$

Ex hac aequatione adiumento methodi coëfficientium indeterminatorum facile eliciemus seriem pro $\psi+\varphi$, si perpendimus ipsius terminum primum esse debere $\frac{1}{2}\pi$, radio pro vnitate accepto, atque denotante 2π peripheriam circuli,

$$[6]\quad \psi+\varphi=\tfrac{1}{2}\pi-f^{\circ}pq-\tfrac{2}{3}f'ppq-(\tfrac{1}{2}f''-\tfrac{1}{6}f^{\circ}f^{\circ})p^3q \text{ etc.}$$
$$-g^{\circ}pqq-\tfrac{3}{4}g'ppqq$$
$$-(h^{\circ}-\tfrac{1}{3}f^{\circ}f^{\circ})pq^3$$

Operae pretium videtur, etiam aream trianguli ABD in seriem euoluere. Huic euolutioni inseruit aequatio conditionalis sequens, quae e considerationibus geometricis satis obuiis facile deriuatur, et in qua S aream quaesitam denotat:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}+r\cos\psi\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}=\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\int n\,\mathrm{d}q$$

integratione a $q=0$ incepta. Hinc scilicet obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum

$$[7]\quad \begin{aligned} S=\tfrac{1}{2}pq-\tfrac{1}{12}f^\circ p^3q-\tfrac{1}{20}f'p^4q-(\tfrac{1}{30}f''-\tfrac{1}{60}f^\circ f^\circ)p^5q\ \text{etc.}\\ -\tfrac{1}{12}f^\circ pq^3-\tfrac{3}{40}g^\circ p^3qq-\tfrac{1}{20}g'p^4qq\\ -\tfrac{7}{120}f'ppq^3-(\tfrac{1}{15}h^\circ+\tfrac{2}{45}f''+\tfrac{1}{60}f^\circ f^\circ)p^3q^3\\ -\tfrac{1}{10}g^\circ pq^4-\tfrac{3}{40}g'ppq^4\\ -(\tfrac{1}{10}h^\circ-\tfrac{1}{30}f^\circ f^\circ)pq^5\end{aligned}$$

25.

A formulis art. praec., quae referuntur ad triangulum a lineis breuissimis formatum rectangulum, progredimur ad generalia. Sit C aliud punctum in eadem linea breuissima DB, pro quo, manente p, characteres q', r', φ', ψ', S' eadem designent, quae q, r, φ, ψ, S pro puncto B. Ita oritur triangulum inter puncta A, B, C, cuius angulos per A, B, C, latera opposita per a, b, c, aream per σ denotamus; mensuram curuaturae in punctis A, B, C resp. per α, β, γ exprimemus. Supponendo itaque (quod licet), quantitates, p, q, $q-q'$ esse positiuas, habemus

$$A=\varphi-\varphi',\ B=\psi,\ C=\pi-\psi',\ a=q-q',\ b=r',\ c=r,\ \sigma=S-S'.$$

Ante omnia aream σ per seriem exprimemus. Mutando in [7] singulas quantitates ad B relatas in eas quae ad C referuntur, prodit formula pro S', vnde, vsque ad quantitates sexti ordinis obtinemus

$$\sigma = \tfrac{1}{2}p(q - q')(1 - \tfrac{1}{6}f^\circ(pp + qq + qq' + q'q')$$
$$- \tfrac{1}{60}f'p(6pp + 7qq + 7qq' + 7q'q')$$
$$- \tfrac{1}{20}g^\circ(q + q')(3pp + 4qq + \cancel{4qq'} + 4q'q'))$$

Haec formula, adiumento seriei [2] puta

$$c\sin B = p(1 - \tfrac{1}{3}f^\circ qq - \tfrac{1}{4}f'pqq - \tfrac{1}{2}g^\circ q^3 - \text{etc.})$$

transit in sequentem

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B(1 - \tfrac{1}{6}f^\circ(pp - qq + qq' + q'q')$$
$$- \tfrac{1}{60}f'p(6pp - 8qq + 7qq' + 7q'q')$$
$$- \tfrac{1}{20}g^\circ(3ppq + 3ppq' - 6q^3 + 4qqq' + 4qq'q' + 4q'^3))$$

Mensura curuaturae pro quouis superficiei puncto fit (per art. 19, vbi m, p, q erant quae hic sunt n, q, p)

$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{ddn}{dq^2} = -\frac{2f + 6gq + 12hqq + \text{etc.}}{1 + fqq + \text{etc.}}$$
$$= -2f - 6gq - (12h - 2ff)qq - \text{etc.}$$

Hinc fit, quatenus p, q ad punctum B referuntur,

$$\beta = -2f^\circ - 2f'p - 6g^\circ q - 2f''pp - 6g'pq$$
$$- (12h^\circ - 2f^\circ f^\circ)qq - \text{etc.}$$

nec non

$$\gamma = -2f^\circ - 2f'p - 6g^\circ q' - 2f''pp - 6g'pq'$$
$$- (12h^\circ - 2f^\circ f^\circ)q'q' - \text{etc.}$$

$$\alpha = -2f^\circ$$

Introducendo has mensuras curuaturae in serie pro σ, obtinemus expressionem sequentem, vsque ad quantitates sexti ordinis (excl.) exactam:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(4pp - 2qq + 3qq' + 3q'q')$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3pp - 6qq + 6qq' + 3q'q')$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(3pp - 2qq + qq' + 4qq'))$$

Praecisio eadem manebit, si pro p, q, q' substituimus $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B - a$, quo pacto prodit

$$[8] \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\, ac \sin B \big(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3aa + 4cc - 9ac\cos B) + \tfrac{1}{120}\beta(3aa + 3cc - 12ac\cos B) + \tfrac{1}{120}\gamma(4aa + 3cc - 9ac\cos B)\big)$$

Quum ex hac aequatione omnia quae ad lineam AD normaliter ad BC ductam referuntur euanuerint, etiam puncta A, B, C cum correlatis inter se permutare licebit, quapropter erit eadem praecisione

$$[9] \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A \big(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 12bc\cos A) + \tfrac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 9bc\cos A) + \tfrac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 9bc\cos A)\big)$$

$$[10] \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C \big(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3aa + 4bb - 9ab\cos C) + \tfrac{1}{120}\beta(4aa + 3bb - 9ab\cos C) + \tfrac{1}{120}\gamma(3aa + 3bb - 12ab\cos C)\big)$$

26.

Magnam vtilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis a, b, c; anguli illius trianguli, quos per A^*, B^*, C^* designabimus, different ab angulis trianguli in superficie curua, puta ab A, B, C, quantitatibus secundi ordinis, operaeque pretium erit, has differentias accurate euoluere. Calculorum autem prolixiorum quam difficiliorum, primaria momenta apposuisse sufficiet.

Mutando in formulis [1], [4], [5], quantitates quae referuntur ad B in eas quae referuntur ad C, nanciscemur formulas pro $r'r'$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Tunc euolutio expressionis $rr + r'r' - (q - q')^2 - 2r\cos\varphi \,.\, r'\cos\varphi' - 2r\sin\varphi \,.\, r'\sin\varphi'$, quae fit $= bb + cc - aa - 2bc\cos A = 2bc(\cos A^* - \cos A)$, combinata cum euolutione expressionis $r\sin\varphi \,.\, r'\cos\varphi' - r\cos\varphi \,.\, r'\sin\varphi'$, quae fit $= bc\sin A$, suppeditat formulam sequentem

$$\cos A^* - \cos A = -(q - q')p\sin A\big(\tfrac{1}{3}f^\circ + \tfrac{1}{6}f'p + \tfrac{1}{4}g^\circ(q + q') + (\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{1}{45}f^\circ f^\circ)pp + \tfrac{3}{20}g'p(q + q') + (\tfrac{1}{5}h^\circ - \tfrac{7}{90}f^\circ f^\circ)(qq + qq' + q'q') + \text{etc.}\big)$$

Hinc fit porro, vsque ad quantitates quinti ordinis

$$A^* - A = -(q - q')p(\tfrac{1}{3}f^\circ + \tfrac{1}{6}f''p + \tfrac{1}{4}g^\circ(q + q') + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{3}{20}g'p(q + q') + \tfrac{1}{5}h^\circ(qq + qq' + q'q') - \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(7pp + 7qq + 12qq' + 7q'q'))$$

Combinando hanc formulam cum hac

$$2\sigma = ap(1 - \tfrac{1}{6}f^\circ(pp + qq + qq' + q'q' - \text{etc.})$$

atque cum valoribus quantitatum α, β, γ in art. praes. allatis, obtinemus vsque ad quantitates quinti ordinis

$$[11] \quad A^* = A - \sigma(\tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{2}{15}f''pp + \tfrac{1}{5}g'p(q + q') + \tfrac{1}{5}h^\circ(3qq - 2qq' + 3q'q') + \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(4pp - 11qq + 14qq' - 11q'q'))$$

Per operationes prorsus similes euoluimus

$$[12] \quad B^* = B - \sigma(\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(2q + q') + \tfrac{1}{5}h^\circ(4qq - 4qq' + 3q'q') - \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(2pp + 8qq - 8qq' + 11qq'))$$

$$[13] \quad C^* = C - \sigma(\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(q + 2q') + \tfrac{1}{5}h^\circ(3qq - 4qq' + 4q'q') - \tfrac{1}{90}f^\circ f^\circ(2pp + 11qq - 8qq' + 8q'q'))$$

Hinc simul deducimus, quum summa $A^* + B^* + C^*$ duobus rectis aequalis sit, excessum summae $A + B + C$ supra duos angulos rectos, puta

$$[14] \quad A + B + C = \pi + \sigma(\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{3}f''pp + \tfrac{1}{2}g'p(q + q') + (2h^\circ - \tfrac{1}{3}f^\circ f^\circ)(qq - qq' + q'q'))$$

Haec vltima aequatio etiam formulae [6] superstrui potuisset.

27.

Si superficies curua est sphaera, cuius radius $= R$, erit $\alpha = \beta = \gamma = -2f^\circ = \frac{1}{RR}$; $f'' = 0$, $g' = 0$, $6h^\circ - f^\circ f^\circ = 0$ siue $h^\circ = \frac{1}{24R^4}$. Hinc formula [14] fit

$A +$

$$A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{RR}$$

quae praecisione absoluta gaudet; formulae 11 - 13 autem suppeditant

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(2pp - qq + 4qq' - q'q')$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp - 2qq + 2qq' + q'q')$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp + qq + 2qq' - 2q'q')$$

siue aeque exacte

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(bb + cc - 2aa)$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + cc - 2bb)$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + bb - 2cc)$$

Neglectis quantitatibus quarti ordinis, prodit hinc theorema notum a clar. Legendre primo propositum.

28.

Formulae nostrae generales, reiectis terminis quarti ordinis, persimplices euadunt, scilicet

$$A^* = A - \tfrac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma)$$
$$B^* = B - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma)$$
$$C^* = C - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma)$$

Angulis itaque A, B, C in superficie non sphaerica reductiones inaequales applicandae sunt, vt mutatorum sinus lateribus oppositis fiant proportionales. Inaequalitas generaliter loquendo erit tertii ordinis, at si superficies parum a sphaera discrepat, illa ad ordinem altiorem referenda erit: in triangulis vel maximis in superficie telluris, quorum quidem angulos dimetiri licet, differentia semper pro insensibili haberi potest. Ita e. g. in triangulo maximo inter ea, quae annis praecedentibus dimensi sumus, puta inter puncta Hohehagen, Brocken, Inselsberg, vbi excessus summae angulorum fuit $= 14''85348$, calculus sequentes reductiones angulis applicandas prodidit:

Hohehagen	$-\ 4''95113$
Brocken	$-\ 4{,}95104$
Inselsberg	$-\ 4{,}95131$

29.

Coronidis caussa adhuc comparationem areae trianguli in superficie curua cum area trianguli rectilinei, cuius latera sunt a, b, c, adiiciemus. Aream posteriorem denotabimus per σ^*, quae fit $= \frac{1}{2} bc \sin A^* = \frac{1}{2} ac \sin B^* = \frac{1}{2} ab \sin C^*$

Habemus, vsque ad quantitates ordinis quarti

$$\sin A^* = \sin A - \tfrac{1}{12}\sigma \cos A . (2\alpha + \beta + \gamma)$$

siue aeque exacte

$$\sin A = \sin A^* . (1 + \tfrac{1}{24} bc \cos A . (2\alpha + \beta + \gamma))$$

Substituto hoc valore in formula [9], erit vsque ad quantitates sexti ordinis

$$\sigma = \tfrac{1}{2} bc \sin A^* . (1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 2bc\cos A) + \tfrac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 4bc\cos A) + \tfrac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 4bc\cos A)),$$

siue aeque exacte

$$\sigma = \sigma^*(1 + \tfrac{1}{120}\alpha(aa + 2bb + 2cc) + \tfrac{1}{120}\beta(2aa + bb + 2cc) + \tfrac{1}{120}\gamma(2aa + 2bb + cc))$$

Pro superficie sphaerica haec formula sequentem induit formam

$$\sigma = \sigma^*(1 + \tfrac{1}{24}\alpha(aa + bb + cc))$$

cuius loco etiam sequentem salua eadem praecisione adoptari posse facile confirmatur

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A . \sin B . \sin C}{\sin . A^* . \sin B^* . \sin C^*}}$$

Si eadem formula triangulis in superficie curua non sphaerica applicatur, error generaliter loquendo erit quinti ordinis, sed insensibilis in omnibus triangulis, qualia in superficie telluris dimetiri licet.