IA 4. THEORIE DER GEMEINEN UND HÖHEREN COMPLEXEN GRÖSSEN.

VON

E. STUDY

IN GREIFSWALD.

Inhaltsübersicht.

1. Imaginäre Grössen im 17. und 18. Jahrhundert.
2. Rechnen mit Grössenpaaren.
3. Gemeine complexe Grössen.
4. Absoluter Betrag, Amplitude, Logarithmus.
5. Darstellung der complexen Grössen durch Punkte einer Ebene.
6. Darstellung gewisser Transformationsgruppen mit Hülfe gewöhnlicher complexer Grössen.
7. Allgemeiner Begriff eines Systems complexer Grössen.
8. Typen, Gestalten, Reducibilität.
9. Systeme mit zwei, drei und vier Einheiten.
10. Specielle Systeme mit n^2 Einheiten. Bilineare Formen.
11. Specielle Systeme mit commutativer Multiplikation.
12. Complexe Grössen und Transformationsgruppen.
13. Klassifikation der Systeme complexer Grössen.
14. Ansätze zu einer Funktionentheorie und Zahlentheorie der Systeme höherer complexer Grössen.

Vorbemerkung.

Die Theorie der *gemeinen* complexen Grössen bildet die Grundlage mehrerer der wichtigsten Zweige der Analysis, namentlich der Algebra und der Funktionentheorie. Sie wird daher in allen Lehrbüchern dieser Disciplinen, wie auch in den besseren Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung abgehandelt. Wegen der grossen Zahl dieser Werke müssen wir auf eine Zusammenstellung ihrer Titel verzichten. In der Darstellung der Theorie selbst beschränken wir uns auf die ersten Elemente, und verweisen wegen weiterer Entwickelungen auf die Abschnitte I B und II B der Encyclopädie, ferner wegen specieller geometrischer und anderer Anwendungen auf die Artikel III A 7, III B 3 und III D 5, endlich auf die Bände IV und V. —

In der Theorie der Systeme von sogenannten *höheren* complexen Grössen bleiben die eigentlich geometrischen und physikalischen Anwendungen im Geiste von *W. R. Hamilton* und seinen Nachfolgern ebenfalls ausgeschlossen, da für die einen ein besonderer Artikel (III B 3) in Aussicht genommen ist, die anderen aber ebenfalls in den Bänden IV und V zur Sprache kommen werden. Hier werden nur die allgemeinen Sätze dargelegt, auf denen diese Anwendungen im letzten Grunde beruhen. Von Lehrbuchlitteratur dieses noch ziemlich neuen Zweiges der Algebra und Gruppentheorie wird daher nur zu nennen sein:

H. Hankel, Theorie der complexen Zahlen, Leipzig 1867. *S. Lie,* Vorlesungen über endliche continuierliche Gruppen, bearbeitet von *G. Scheffers,* Leipzig 1893 (Kap. 21). Nur auf einen sehr beschränkten Abschnitt dieser Theorie (§ 11 gegenwärtigen Artikels) bezieht sich eine Monographie von *B. Berloty,* Théorie des quantités complexes à *n* unités principales (Thèse. Paris 1886). Einiges darüber findet man auch bei *O. Stolz,* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. II, Leipzig 1886.

---

1. Imaginäre Grössen im 17. und 18. Jahrhundert. Der ursprüngliche Begriff der Zahl ist der der positiven ganzen Zahl. Wie nun das Bedürfnis nach einer einfacheren Darstellung und allgemeineren Ausführbarkeit gewisser Operationen schon in der elementaren Arithmetik mehrere Erweiterungen dieses einfachsten Zahlbegriffs veranlasst hat, indem zu den ganzen Zahlen die gebrochenen, zu den positiven die negativen, zu den rationalen die irrationalen „Zahlen“ oder „Grössen“ hinzugefügt wurden (I A 1 und I A 3), so hat dasselbe Bedürfnis zu einer ferneren Ausdehnung des Zahlbegriffs, zur Einführung der (gemeinen) „complexen“ Zahlen oder Grössen geführt: Man postulierte, um zunächst alle quadratischen Gleichungen wenigstens der Form nach auflösen zu können, die Quadratwurzel aus der negativen Einheit, die thatsächlich nicht vorhandene „Grösse“ $\sqrt{-1}$, als ein blosses Gedankending, ein Rechnungssymbol, eine „imaginäre“, „unmögliche“ Zahl. Mit diesem Symbol arbeitete man, mit allmählich wachsender Sicherheit, wie man es mit wirklichen Zahlgrössen zu thun gewohnt war. Dabei ergab sich ein doppelter Vorteil: Erstens zeigte es sich, dass nicht nur die Auflösung der quadratischen, sondern auch die der kubischen und biquadratischen Gleichungen mit Hülfe dieses Zeichens allgemein (formal) ausführbar wurde. Zweitens gelang es, durch Vermittelung des Symbols $\sqrt{-1}$ mehrere wichtige Funktionen der Analysis miteinander in Verbindung zu bringen. Das grösste Verdienst in dieser Periode der Theorie des Imaginären hat *L. Euler,* durch seine Entdeckung des Zusammenhanges der Exponentialfunktion mit den goniometrischen Funktionen, und durch seine daraus hervorgegangene Entscheidung der (ehemals) berühmten Streitfrage „Ob auch negative Zahlen Logarithmen haben?"[1])

Die Einführung der „imaginären" Grössen begegnete anfänglich vielen Bedenken. Diese bezogen sich indessen nicht eigentlich auf die Sache selbst, sondern auf die Art ihrer Herleitung und auf die unklaren Vorstellungen, die von Vielen damit verknüpft wurden, und die namentlich in dem von *K. F. Gauss* gerügten Gebrauch des Wortes „unmöglich" ihren Ausdruck gefunden haben. *Gauss* drückt sich über den Wert der imaginären Grössen anfangs nicht sehr bestimmt aus[2]); er hat sich aber jedenfalls sehr bald von ihrer Zulässigkeit und praktischen Unentbehrlichkeit überzeugt. Seine Autorität und die von ihm selbst gemachten Anwendungen auf Algebra und Zahlentheorie[3]), ferner die Arbeiten von *N. H. Abel* und *C. G. J. Jacobi* über elliptische Funktionen [II B 6a] haben die erhobenen Zweifel endgültig zerstreut. Leider hat *Gauss* die von ihm versprochene Rechtfertigung der Einführung der „imaginären" oder, wie er später lieber sagte, „*complexen*"[3]) Grössen niemals geliefert; und das ist wohl der Grund dafür, dass man auch heute noch in verbreiteten Lehrbüchern eine Art der Darstellung antrifft, der man schwer entnehmen kann, was nach Ansicht der Verfasser Definition und was Folgerung sein soll.

2. Rechnen mit Grössenpaaren. Bei Einführung der complexen oder imaginären Grössen verfährt man am besten nach dem Vorgang von *W. R. Hamilton*[4])[5]) in rein arithmetischer Weise, da so die Einmischung ungehöriger Vorstellungen mit Sicherheit vermieden werden kann.

Wir betrachten eine einzelne — positive oder negative, rationale oder irrationale — Grösse a als besonderen Fall eines geordneten, d. h. in bestimmter Reihenfolge gesetzten *Grössenpaares* (a, α); wir

---

1) Wegen der Geschichte der Theorie des Imaginären s. *H. Hankel,* Theorie der complexen Zahlensysteme (Lpz. 1867), Abschnitt V. *E. Kossak,* Elemente der Arithmetik (Progr. Berl. Fried. Werd. Gymn. 1872). *R. Baltzer,* J. f. Math. 94 (1883), p. 87. *L. Janssen van Raay,* Arch. Teyler 4 (1894), p. 53. *A. Ramorino,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 233.

2) S. *Gauss*' Dissertation (Demonstratio nova etc.) Helmstedt 1799 = Werke 3, p. 3; deutsch von *E. Netto,* in *Ostwald*'s Klassikern Nr. 14 (Lpz. 1890). Insbesondere kommt in Betracht die Anmerkung zu Nr. 3.

3) Theoria residuorum biquadraticorum II und die Selbstanzeige zu dieser Abhandlung (1831). Werke 2, p. 169. — Wegen des Vorkommens des Zeichens i für $\sqrt{-1}$ bei *L. Euler* s. die Abh. „De formulis differentialibus . . .", Petrop. Acta (5. Mai) 1777, abgedruckt in Instit. Calculi Integralis, ed. tertia, Petrop. 1845, vol. 4, p. 183, bes. p. 184; vgl. *W. Beman,* Am. Bull. 4 (1898) p. 274.

4) Dubl. Trans. 17 (1837), p. 393.

5) Lectures on Quaternions (Dublin, 1853). Vorrede.

betrachten sie nämlich als ein Grössenpaar, dessen zweite Grösse α den Wert Null hat. Wir schreiben demgemäss $a = (a, 0)$. Die Regeln des gewöhnlichen Rechnens lassen sich dann in folgender Weise auf beliebige Grössenpaare (a, α), (b, β) u. s. w. ausdehnen:

Zwei Grössenpaare (a, α) und (a', α') werden dann und nur dann einander gleich gesetzt, $(a, \alpha) = (a', \alpha')$, wenn $a = a'$ und $\alpha = \alpha'$ ist. Es wird ferner die „Summe" zweier Grössenpaare (a, α) und (b, β) definiert durch die Formel:

$$(1) \qquad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta).$$

Weiter wird das „Produkt" eines Grössenpaares (a, α) und einer einzelnen Grösse $m = (m, 0)$ (s. oben) erklärt durch die Formel

$$(2) \qquad m \cdot (a, \alpha) = (a, \alpha) \cdot m = (ma, m\alpha).$$

Aus diesen naheliegenden Festsetzungen folgt sofort, dass ein jedes Grössenpaar sich aus zwei „unabhängigen" Grössenpaaren — sogenannten *Einheiten* — durch Multiplikation dieser Grössenpaare mit einfachen Grössen und nachfolgende Addition zusammensetzen lässt. Man hat zufolge (1) und (2):

$$(3) \qquad (a, \alpha) = a \cdot (1, 0) + \alpha (0, 1);$$

oder, da nach obiger Definition $(1, 0) = 1$ ist, bei Einführung des neuen Zeichens i für die zweite Einheit $(0, 1)$

$$(3^*) \qquad (a, \alpha) = a + i\alpha.$$

Alles dieses lässt sich offenbar ohne weiteres auf Grössentripel, Grössenquadrupel u. s. f. ausdehnen.

Man kann nun aber neben die gelehrte Addition der Zahlenpaare noch eine andere Art der Verknüpfung stellen, die die gewöhnliche Multiplikation zweier einfacher Grössen, sowie die durch (2) gegebene „Multiplikation" einer einfachen Grösse und eines Grössenpaares umfasst, und wegen ihrer sonstigen Analogie mit der gewöhnlichen Multiplikation ebenfalls noch als „Multiplikation" der Grössenpaare bezeichnet wird[6]): *Das „Produkt" zweier Grössenpaare* (a, α) *und* (b, β) *wird erklärt durch die Formel*

$$(4) \qquad (a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab - \alpha\beta, a\beta + b\alpha),$$

oder, bei Verwendung des eben angeführten Zeichens i, durch die äquivalente Formel

$$(4^*) \qquad (a + i\alpha)(b + i\beta) = ab - \alpha\beta + (a\beta + b\alpha)i. \text{ —}$$

6) In allgemeinerem Sinne noch als in der Theorie der Systeme complexer Grössen werden die Worte Produkt und Multiplikation von *H. Grassmann* und anderen verwendet. Wir verweisen auf *Grassmann*'s Ges. Werke und insbesondere auf den Aufsatz „Sur les divers genres de multiplication", J. f. Math. 49 (1855), p. 123.

Die Definition der Multiplikation der Grössenpaare durch die Formel (4) hat zunächst den Anschein der Willkür. Man sieht nicht sogleich, warum unter einer Menge verschiedener scheinbar gleichwertiger Bestimmungen gerade diese herausgegriffen wird. Dieser Anschein verschwindet indessen bei näherer Untersuchung, wobei sich zeigt, dass obige Festsetzung in der That vor anderen ausgezeichnet ist. (S. Nr. **11**.)

Die Multiplikation der Grössenpaare genügt denselben formalen Regeln wie die Multiplikation der einfachen Zahlgrössen. Stellt man zur Abkürzung das Grössenpaar (a, α) oder $a + i\alpha$ durch ein einfaches Zeichen A dar, so sind, ganz wie bei einfachen Grössen a, b, c, . . ., die (durch die Formeln (1) und (4) erklärten) Gleichungen

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \tag{5}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{6}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \tag{7}$$

erfüllt, die man heute allgemein als das *associative*, das *distributive* und das *commutative Gesetz der Multiplikation* bezeichnet[7]) (vgl. I A 1, Nr. **7**). Insbesondere folgt aus (4)

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1), \quad (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \tag{8}$$

oder

$$1 \cdot i = i, \quad i \cdot i = i^2 = -1; \tag{8*}$$

und es ist deutlich, dass diese Formeln (8), zusammen mit den aus dem gewöhnlichen Zahlenrechnen herübergenommenen Regeln (5), (6), (7), die Formel (4) vollständig ersetzen können. Es gilt endlich für die erklärte „Multiplikation" der Grössenpaare ganz wie für die Multiplikation der einfachen Grössen der Satz, dass ein Produkt nicht verschwinden kann, ohne dass einer seiner Faktoren verschwindet.

Gleicht somit das Rechnen mit Grössenpaaren dem Rechnen mit einfachen Grössen in wichtigen Beziehungen, so unterscheidet es sich doch von diesem in einem wesentlichen Punkte: Die Formel (8) oder (8*) zeigt, dass im Bereiche der Grössenpaare die Gleichung $X \cdot X = (-1, 0)$ oder $X^2 = -1$ lösbar ist, während eine einfache Grösse $X = (X, 0)$, die dieser Gleichung genügte, nicht existiert. Die angeführte Gleichung wird nämlich erfüllt durch das Grössenpaar $X = (0, 1) = i$, wie auch durch das Grössenpaar $X = (0, -1) = -i$, aber durch kein weiteres Grössenpaar. Die durch die Gleichung $x^2 = a$ ausgedrückte Forderung pflegt man in der elementaren Algebra

7) Wegen des muthmasslichen Ursprungs dieser Namen s. *Hankel*, Theorie der complexen Zahlensysteme (Leipzig 1867), Anmerkung auf p. 3.

auch durch das Zeichen $x = \sqrt{a}$ darzustellen. Es steht nichts im Wege, diese Bezeichnung auf das Rechnen mit Grössenpaaren auszudehnen. Man kann daher das bisher mit i bezeichnete Grössenpaar $(0, 1)$ auch mit $\sqrt{(-1, 0)}$ oder kürzer mit $\sqrt{-1}$ bezeichnen. Das Grössenpaar $-i$ oder $(0, -1)$ muss dann das Zeichen $-\sqrt{(-1, 0)}$ oder $-\sqrt{-1}$ erhalten, wobei natürlich das Vorzeichen der Wurzel in allen Rechnungen festzuhalten ist, so dass das einmal mit $\sqrt{-1}$ bezeichnete Grössenpaar nicht mit $-\sqrt{-1}$ verwechselt werden kann. Es ist aber seit *Gauss*[3]) üblich geworden, die genannten beiden speciellen Grössenpaare durch die von *Euler* eingeführten Zeichen i und $-i$ darzustellen, wie wir es bereits gethan hatten.

3. Gemeine complexe Grössen. Der heute in der Analysis allgemein gebräuchliche Begriff der (gewöhnlichen) „*complexen*" oder „*imaginären*" Grösse unterscheidet sich von dem in Nr. 2 erklärten Begriff des Grössenpaares gar nicht; nur die *Terminologie* ist eine andere. Man hat es zweckmässig gefunden, dem Singularis „Grösse" einen erweiterten Sinn beizulegen, und, was wir bisher „Grössenpaar" nannten, ebenfalls noch als „Grösse" zu bezeichnen. Der Begriff des Dualis wird dann in das Beiwort „complex" verlegt: Die einfache Grösse $a = (a, 0)$, die einzige Zahlgrösse, die die elementare Arithmetik kennt, heisst nunmehr zum Unterschiede von der complexen oder imaginären „Grösse" eine „*reelle*" Grösse. Die Nützlichkeit dieser auf den ersten Blick jedenfalls befremdlichen Redeweise kann im Grunde nur durch den Aufbau der gesamten Analysis dargethan werden; wir begnügen uns hier mit dem Hinweise auf die Umgestaltung und Erweiterung, die der Fundamentalsatz der Algebra [I B 1, 3] bei Einführung dieser Terminologie erfährt. Während man im Gebiete der gewöhnlichen (sog. reellen) Grössen nur sagen kann, dass eine ganze Funktion n^{ten} Grades einer Veränderlichen x als Produkt von ganzen Funktionen ersten oder zweiten Grades dargestellt werden kann, gilt im Gebiete der complexen Grössen der einfachere Satz, dass jede solche Funktion ein Produkt von Funktionen ersten Grades ist; und zwar gilt dieser Satz auch für ganze Funktionen mit complexen Coefficienten. —

Gänzlich verschieden von der hier vorgetragenen Exposition ist der Vorschlag *A. Cauchy*'s, i als eine reelle *veränderliche* Grösse aufzufassen, und an Stelle von Gleichungen Congruenzen nach dem Modul $i^2 + 1$ zu betrachten[8]). Zwei ganze rationale Funktionen der (reellen) Veränderlichen i heissen nach dem allgemeinen Congruenzbegriff dann

8) *Cauchy*, Exercises d'analyse et de physique math. 4 (1847), p. 84.

congruent nach dem Modul i^2+1 („äquivalent" nach *Cauchy*), wenn sie, durch i^2+1 geteilt, denselben Rest lassen. An Stelle der Gleichung (4*) z. B. tritt dann die Congruenz

$$(a+i\alpha)(b+i\beta) \equiv (ab-\alpha\beta)+i(a\beta+b\alpha) \quad \text{mod. } (i^2+1).$$

Dieser Gedanke ist neuerdings noch von *L. Kronecker* verallgemeinert worden[9]. [Vgl. B 1, 3; C 5.] Ob und wie weit er sich ausserhalb des Bereiches der Algebra als brauchbar erweist, darüber liegen Untersuchungen zur Zeit nicht vor.

4. Absoluter Betrag, Amplitude, Logarithmus. Die Zahl Eins wird die reelle, i die *imaginäre*, auch wohl „laterale" Einheit genannt. Ist $z = x+iy$ irgend eine complexe Grösse, so heisst x *der reelle*, iy *der imaginäre Bestandteil von* z. Der reelle Bestandteil wird nach *K. Weierstrass* (Vorlesungen) vielfach mit $\mathfrak{R}(z)$ bezeichnet. Ist $y=0$, so heisst die Grösse z, wie gesagt, reell, ist $x=0$, so heisst sie „rein imaginär". Der positive Wert der Quadratwurzel $\sqrt{x^2+y^2}$ wird „Modul" (*Cauchy*, An. alg. 1821, cap. 7, § 2), besser — wegen der Vieldeutigkeit dieses Wortes — nach *Weierstrass* „*absoluter Betrag*" der Zahl z genannt, und durch mod. z, abs. z, meist aber (nach *Weierstrass*) durch das Zeichen $|z|$ dargestellt. Das Quadrat dieser reellen Grösse — also die Summe x^2+y^2 — wird nach *Gauss* die „*Norm*" von z genannt[3] und vielfach mit $N(z)$ bezeichnet.

Je zwei complexe Grössen von der Form $x+iy$ und $x-iy$ heissen „*conjugiert-complex*" oder „*conjugiert-imaginär*". (*Cauchy*, An. alg. cap. 7, § 1.) Wird die erste z genannt, so wird die zweite vielfach mit $\bar{z}$ bezeichnet. Das Produkt zweier conjugiert-complexer Grössen ist reell und gleich der Norm einer jeden von ihnen, $z\cdot\bar{z} = x^2+y^2$. Die eindeutig bestimmte complexe Grösse, die mit z multipliciert die Zahl Eins liefert, wird der „*reciproke Wert*" von z genannt, und mit $\frac{1}{z}$ oder z^{-1} bezeichnet; es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad (|z| \neq 0).$$

Jede complexe Grösse $z = x+iy$ kann auf die Form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gebracht werden, wo $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ den absoluten Betrag, und φ einen reellen, bis auf Vielfache von 2π bestimmten Winkel bedeutet. (*Euler, Jean le Rond d'Alembert*. S. Anm. 1.) Der zweite Faktor des Ausdruckes wird zuweilen „Richtungscoefficient" genannt (expres-

9) J. f. Math. 100 (1887) p. 490, vgl. 101, p. 337. *J. Molk*, Acta Math. 6 (1884), p. 8. Vgl. ferner unsere Anmerkung 33, sowie I A 3 Anm. 42.

sion reduite n. Cauchy); der Winkel φ selbst heisst „*Amplitude*“, auch „Argument“, „Abweichung“, „Anomalie“, „Azimuth“, „Arcus“ der complexen Grösse z. „*Hauptwert*“ der Amplitude heisst der Wert von φ, der den Ungleichungen $-\pi < \varphi \leqq +\pi$ genügt. Ist

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{so ist} \tag{9}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Für Grössen von der besonderen Form $\cos\varphi + i\sin\varphi$ gilt die sogenannte *Moivre'sche Formel*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi).$$

Mit Ausnahme der Null lässt sich ferner jede complexe Grösse z durch eine andere complexe Grösse ζ in der Gestalt

$$z = e^{\zeta} = 1 + \zeta + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\zeta^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\zeta^3 + \cdots \tag{10}$$

darstellen (II B 1). Wegen der durch die Formeln $e^{\zeta_1}\cdot e^{\zeta_2} = e^{\zeta_1+\zeta_2}$ und $e^{2\pi i} = 1$ ausgedrückten Eigenschaften der Exponentialfunktion ist dabei die complexe Grösse ζ nur bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt. Diese unendlich vieldeutige Grösse wird der *Logarithmus* von z genannt, und durch das Zeichen $\zeta = \log z$ oder $\zeta = \lg z$ oder endlich $\zeta = \mathrm{l}\, z$ dargestellt. „*Hauptwert*“ des Logarithmus heisst der Wert von ζ, dessen imaginärer Bestandteil, geteilt durch i, grösser als $-\pi$ und kleiner als oder gleich $+\pi$ ist $\left(-\pi < \Re\left(\frac{\zeta}{i}\right) \leqq \pi\right)$. Der Hauptwert des Logarithmus einer reellen positiven Grösse ist reell und identisch mit dem *natürlichen* (Neper'schen) Logarithmus (I A 1, 3); der Hauptwert des Logarithmus einer negativen reellen Grösse hat den imaginären Bestandteil $i\pi$. Eine imaginäre Grösse, deren absoluter Betrag den Wert Eins hat, hat rein imaginäre Logarithmen und umgekehrt. Allgemeiner ist, sobald wir unter $\lg r$ irgend einen Wert des Logarithmus der positiven Grösse r verstehen,

$$\zeta \equiv \lg r + i\varphi \quad (\text{mod. } 2i\pi), \qquad \text{wenn} \tag{11}$$
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (r = |z|).$$

An Stelle der Congruenz tritt hier die Gleichung $\zeta = \lg r + i\varphi$, wenn man für die Amplitude φ, wie auch für den Logarithmus ζ deren Hauptwerte setzt. Für $r = 1$ ergiebt sich aus (11) die *Euler*'sche Gleichung

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{12}$$

die übrigens auch für complexe Werte des Argumentes φ Gültigkeit hat. (*Introductio in anal. inf.*; vgl. Anm. 1.)

Durch die zusammengehörigen Formeln

$$z_1\cdot z_2 = z_3, \quad \zeta_1 + \zeta_2 \equiv \zeta_3 \quad (\text{mod. } 2i\pi) \tag{13}$$

wird vermöge der Logarithmen die Multiplikation der complexen Grössen auf eine Addition zurückgeführt.

5. Darstellung der complexen Grössen durch Punkte einer Ebene. Das Rechnen mit den complexen Grössen lässt sich anschaulich auffassen, wenn man sich einer geometrischen Vorstellungsweise bedient[10]). Diese besteht einfach darin, dass man die complexe Grösse $z = x + iy$ durch den Punkt einer Ebene darstellt, der die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x und y hat. Die in § 4 eingeführten Grössen r und φ sind dann Polarcoordinaten (III B 2) desselben Punktes. (S. Fig. 1.) Die Summe zweier complexer Grössen, d. h. der Punkt, der dieser Summe entspricht, wird dann durch die aus der elementaren Mechanik bekannte Parallelogrammconstruction (Fig. 2) gefunden; eine Regel, die man als (geometrische) *Addition der Strecken* (*Vectoren* der englischen Mathematiker) bezeichnet (III B 3). Um das Produkt zweier complexer Grössen

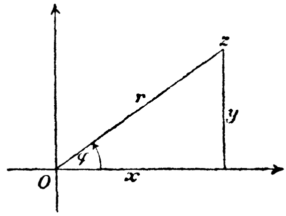

Fig. 1.

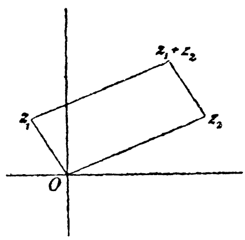

Fig. 2.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

10) Diese wurde bis vor kurzem *J. R. Argand* und *Gauss* zugeschrieben. Sie findet sich aber zuvor schon und zwar vollständig in einer 1797 der Dänischen Akademie eingereichten, 1798 gedruckten und 1799 erschienenen, aber erst neuerdings bekannt gewordenen Arbeit von *Caspar Wessel* (Om Directionens analytiske Betegning; reproduciert Arch. for Math. ok Nat. 18, 1896, sowie unter dem Titel: Essai sur la représentation de la direction, Copenhague 1897).

Gauss hat in seiner Dissertation (1799) die Darstellung der complexen Grössen durch Punkte einer Ebene benutzt, um daran gewisse Betrachtungen zu knüpfen, die dem heute als *Analysis situs* (III A 4) bezeichneten Gebiet angehören. Die geometrische Bedeutung der einfachsten Rechnungsoperationen wurde alsdann von *Argand* dargelegt (Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris 1806), und nach *Wessel* und *Argand* auch von einer Reihe anderer Geometer (s. die zweite Ausgabe von *Argand*'s Schrift von *J. Hoüel*, Paris 1874). *Gauss* benutzt sie im Druck nicht vor 1825 (Abhandlung über Kartenprojektionen, Astron. Abh. von *Schumacher*, Heft 3, Altona 1825; Werke 4, p. 189; *Ostwald*'s Klassiker Nr. 55, Leipzig 1874). Vgl. indessen *Gauss*' Brief an *Bessel* vom 18. Dez. 1811.

Andere Darstellungsweisen des Imaginären, hierhergehörige Betrachtungen über Doppelverhältnisse, die sogenannte geometrische Theorie des Imaginären, ferner Anwendungen auf Funktionentheorie, reelle Geometrie, Zahlentheorie und Mechanik werden in den diese Gegenstände behandelnden Artikeln der Encyclopädie zu besprechen sein.

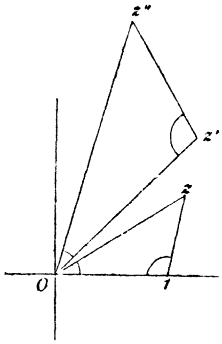

Fig. 3.

und

$$z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

darzustellen, drehe man die Strecke (r', φ') um den Winkel φ im positiven Sinn der Winkel, und vergrössere hierauf den Radius r' im Verhältnis $r:1$. Der so, mit Hülfe zweier ähnlicher Dreiecke, gefundene Punkt ist der, der das Produkt $z'' = zz'$ repräsentiert (Fig. 3).

Endlich wird der reciproke Wert von z in folgender Weise geometrisch bestimmt: Man unterwirft den Punkt z einer Transformation durch reciproke Radien (Inversion, III A 7) in Bezug auf den Kreis, der mit dem Radius Eins um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist, und sucht hierauf das Spiegelbild des gefundenen Punktes in Bezug auf die x-Achse: der so ermittelte Punkt ist der, der die complexe Grösse $z' = \frac{1}{z}$ repräsentiert (Fig. 4).

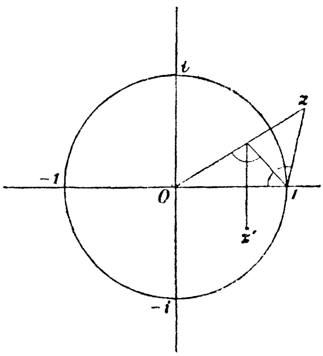

Fig. 4.

Hiernach kann man durch Construction das Bild einer jeden complexen Grösse ermitteln, die aus einer endlichen Anzahl von solchen durch die Operationen der Addition, Multiplikation und Division in endlicher Wiederholung entsteht.

6. Darstellung gewisser Transformationsgruppen mit Hülfe gewöhnlicher complexer Grössen. Die in Nr. 5 besprochene Deutung des Rechnens mit complexen Grössen durch geometrische, in einer Ebene auszuführende Operationen ist von Bedeutung geworden durch ihre zahlreichen Anwendungen in der Algebra, Funktionentheorie, Geometrie und mathematischen Physik. Wir bringen hier nur die Verwendung der gewöhnlichen complexen Grössen zur analytischen Darstellung gewisser *Transformationsgruppen* [s. durchweg Art. II A 6] einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zur Sprache.

Eine jede der Formeln

$$x' = x + a, \tag{14}$$

$$x' = ax, \tag{15}$$

$$x' = ax + b, \tag{16}$$

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0), \tag{17}$$

stellt, wenn man die Grössen $a, b, \ldots$ als Parameter, x als unabhängige, x' als abhängige Veränderliche auffasst, die sämtlichen Transformationen einer nach der Terminologie von *S. Lie* endlichen continuierlichen *Gruppe* [II A 6] vor. Deutet man x etwa als Abscisse eines Punktes in einer geraden Linie, so stellt die Formel (17) die reellen Transformationen der dreigliedrigen sog. allgemeinen projectiven Gruppe dieser einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit dar, und die Formeln (14) bis (16) liefern alle „Typen" continuierlicher Untergruppen dieser Gruppe: (16) die zweigliedrige Gruppe aller der Transformationen von (17), die einen bestimmten Punkt — den Punkt ∞ — in Ruhe lassen; (15) die eingliedrige Untergruppe, bei der zwei Punkte — 0 und ∞ — in Ruhe bleiben; (14) endlich die Ausartung der letzten Gruppe, alle Transformationen der Gruppe (17) enthaltend, die einzeln einen bestimmten Punkt — den Punkt ∞ — und keinen weiteren in Ruhe lassen. Entsprechendes gilt, wenn man den Grössen x und x', wie auch den Parametern $a, b, \ldots$ complexe Werte beilegt, und, wie es gebräuchlich ist, von *„imaginären"* Punkten der Geraden spricht [III A 1, 5; B 1]: die Formeln umfassen, in dieser allgemeineren Bedeutung, alle reellen und „imaginären" Transformationen der genannten Gruppen.

Lässt man $x, x', a, b, \ldots$ wieder complexe Grössen bedeuten, bedient man sich aber der unter (5) besprochenen Darstellung dieser Grössen durch die reellen Punkte einer Ebene, so dienen dieselben Formeln zur analytischen Darstellung anderer Gruppen, und zwar zunächst zur Darstellung der *reellen* Transformationen gewisser continuierlicher Gruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Offenbar umfasst (14) jetzt die Gesamtheit aller reellen sogenannten „Schiebungen", die Transformationen einer zweigliedrigen reellen Gruppe, bei denen ein jeder Punkt um eine Strecke von constanter Länge und Richtung fortgerückt wird; (15) stellt eine reelle zweigliedrige Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen dar, die Gesamtheit aller „eigentlichen" Ähnlichkeitstransformationen (Transformationen ohne Umlegung der Winkel) umfassend, bei denen der Anfangspunkt — der Punkt 0 — in Ruhe bleibt; (16) bedeutet die reellen Transformationen der viergliedrigen Gruppe *aller* eigentlichen Ähnlichkeitstransformationen, die entsteht, wenn man die Transformationen (14) und (15) zusammensetzt; (17) endlich umfasst die Gesamtheit aller reellen Punkttransformationen der Ebene, die Kreise in Kreise überführen und den Sinn der Winkel ungeändert lassen[11]).

11) Art. über Inversionsgeometrie, III A 7. — Es ist mir nicht bekannt, wer den letzten Satz gerade in dieser Form zuerst ausgesprochen hat. In der

Zu diesen als den einfachsten geometrischen Anwendungen complexer Grössen kommen noch andere ähnlicher Art. So stellen die Formeln (17) zusammen mit den Formeln

$$\bar{x}' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0), \tag{17b}$$

(worin $\bar{x}'$ die zu x' conjugiert-complexe Grösse bedeutet) die Gesamtheit *aller* reellen Punkttransformationen einer Ebene vor, die Kreise in Kreise überführen, die sechsgliedrige (sog. gemischte) Gruppe der *Möbius*'schen Kreisverwandtschaften; bei Beschränkung der Parameter a, b, c, d in (17) auf reelle Werte entstehen die reellen Transformationen einer dreigliedrigen Untergruppe, die bei Beschränkung von x auf Werte mit positivem imaginärem Bestandteil aufgefasst werden kann als die Gruppe der Bewegungen in einer Nicht-Euclidischen, sog. *Lobatschewsky*'schen Ebene [III A 1; B 1]. Lässt man für a, b, c, d nur ganzzahlige Werte zu, die in der Beziehung $ad - bc = 1$ stehen, so geht aus (17) eine Gruppe von unendlich vielen discreten Transformationen hervor, die in der Theorie der elliptischen Funktionen, insbesondere der sog. Modulfunktionen auftritt [II B 6a und c]. Versteht man ferner unter $f(x)$ irgend eine analytische Funktion der complexen Veränderlichen x [II B 1], so vermitteln die Formeln $x' = f(x)$ und $\bar{x}' = f(x)$ die allgemeinste conforme Abbildung einer Ebene auf sie selbst oder auf eine andere Ebene [II B 1 und III D 6]. Ferner steht nichts im Wege, z. B. in den Formeln (14) bis (17), nachdem beiderseits die reellen und imaginären Bestandteile gesondert sind, den nunmehr reellen Parametern und Veränderlichen nachträglich von neuem complexe Werte beizulegen: die Formeln (14) bis (17) können dann aufgefasst werden als eine symbolische Darstellung sämtlicher, nämlich aller reellen und „imaginären" Transformationen der zuvor besprochenen Gruppen.

Das Feld dieser Anwendungen erweitert sich noch, wenn man an Stelle der hier zu Grunde gelegten Deutung von ξ, η als Cartesischen Coordinaten irgend eine andere zulässige geometrische Deutung dieser Grössen setzt. Unter diesen wird vielfach verwendet eine Darstellung der complexen Grössen $x = \xi + i\eta$ durch Punkte einer Kugel, eine Abbildungsart, die aus der *Wessel-Argand*'schen durch stereographische Projektion hervorgeht [II B 1, 2 b, c; III A 7, B 2, 3]. Wir erwähnen den hierdurch vermittelten Zusammenhang der Eigenschaften der regulären Körper mit gewissen Problemen der Algebra und Funk-

---

Hauptsache rührt sein Inhalt wohl von *Möbius* her (Abhandlungen aus den Jahren 1853—58, Ges. Werke 2).

tionentheorie, und neuere Anwendungen auf ein Problem der Mechanik.[12])

Alle diese Anwendungen complexer Grössen und viele andere, wie z. B. die in der Theorie der Wärmeleitung und der Minimalflächen [III D 5, 6] haben das Gemeinsame, dass bei ihnen die Eigenschaft des Rechnens mit complexen Grössen als einer Erweiterung des gewöhnlichen Zahlenrechnens in den Hintergrund tritt, und dass diese Grössen als ein sogenannter *Algorithmus* oder *geometrischer Calcul* zur Zusammenfassung und formalen Vereinfachung mehrerer Formeln der analytischen Geometrie dienen. Es ist das eben der Gesichtspunkt, von dem aus die Einführung der nunmehr von uns zu betrachtenden sogenannten höheren complexen Grössen sich als fruchtbringend erwiesen hat.

7. **Allgemeiner Begriff eines Systems complexer Grössen.** An das geschilderte Rechnen mit Grössenpaaren schliesst sich naturgemäss ein solches mit Tripeln, Quadrupeln u. s. w. von Grössen; und zwar kann man, nachdem das Rechnen mit den gewöhnlichen complexen Grössen einmal begründet ist, einmal reelle, sodann aber auch gewöhnliche complexe Grössen zu Paaren, Tripeln u. s. w. zusammenstellen. Je nachdem man das Eine oder das Andere thut, ergeben sich zwei verschiedene Begriffe eines *„Systems complexer Grössen“* oder *„complexer Zahlen“*[13]).

Seien also $\varrho, a_1, a_2, \ldots a_n$ je nach der getroffenen Festsetzung entweder reelle oder gewöhnliche complexe Grössen, so wird man

---

12) *H. A. Schwarz,* J. f. Math. 75, p. 292 = Werke 2, p. 211. *F. Klein,* Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig 1884. *H. Weber,* Algebra II. Braunschw. 1896. *F. Klein* u. *A. Sommerfeld,* Theorie des Kreisels. Leipzig 1897.

13) Die zweite Ausdrucksweise ist die üblichere. Wir ziehen die erste vor, da diesen Gebilden auch eine der gewöhnlichen Theorie der ganzen Zahlen analoge *Zahlentheorie* zukommt. (Vgl. Anmerk. 52.) — Beide Begriffe gehen im wesentlichen zurück auf *Hamilton*, der in seinen Quaternionen und Biquaternionen bereits 1843 das nach den gemeinen complexen Grössen interessanteste Beispiel geliefert hat. Doch macht *H.* (Lectures, Preface) bei der Multiplikation eine Unterscheidung zwischen Operator und Operandus, die für die Anwendungen nicht nötig ist und die Klarheit der Darstellung beeinträchtigt. Diese Unterscheidung scheint zuerst von *H. Hankel* (a. a. O.) aufgehoben worden zu sein. Mathematiker englischer Zunge gebrauchen nach dem Vorgange von *B. Peirce* (vgl. Anm. 17) den Ausdruck *„Linear Associative Algebra“* für unseren Gegenstand, Einige verwenden auch das Wort Algebra im Pluralis. — Bei den verwandten Begriffsbildungen *Grassmann's* (s. Anmerk. 6) fehlt ein wesentliches Moment, nämlich die Zurückleitung der Produkte auf die Grössen des Systems selbst. — Wegen der vor *Hamilton* unternommenen Versuche, complexe Grössen mit mehr als zwei Einheiten einzuführen, s. *Hankel* a. a. O., § 28 Anm.

zunächst zwei n-tupel $(a_1, a_2, \dots a_n)$ und $(b_1, b_2, \dots b_n)$ nur dann als „gleich" gelten lassen, wenn $a_1 = b_1, \dots a_n = b_n$ ist. Es wird sodann die Addition zweier Grössen-n-tupel definiert durch die Formel

$$(a_1, a_2, \dots a_n) + (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots a_n + b_n),$$

ferner die Multiplikation eines n-tupels mit irgend einer Grösse ϱ durch

$$\varrho(a_1, a_2, \dots a_n) = (\varrho a_1, \varrho a_2, \dots \varrho a_n).$$

Aus diesen beiden Definitionen folgt, dass jedes System von n Grössen sich additiv mit numerischen Coefficienten aus n passend gewählten zusammensetzen lässt, z. B.

$$(a_1, a_2, \dots a_n) = a_1(1, 0, 0, \dots 0) + a_2(0, 1, 0, \dots 0) + \cdots$$

Solche in *in mannigfacher Weise auswählbare* n-tupel werden „*Einheiten*" genannt[14]), und (wie überhaupt beliebige n-tupel) durch einfache Zeichen, etwa durch $e_1, e_2, \dots$ dargestellt, so dass

$$(a_1, a_2, \dots a_n) = a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

geschrieben werden kann. Die Einheiten $e_1, \dots e_n$ bilden zusammen eine sogenannte *Basis* (*Dedekind*, *Molien*, vgl. Anm. 31, 45), ihre reellen oder gewöhnlichen complexen Coefficienten $a_1, \dots a_n$ heissen *Coordinaten* oder auch *Componenten* des n-tupels.

Der specifische Begriff eines (geschlossenen) „Systems complexer Grössen" ergiebt sich hieraus erst, wenn man neben die angeführten Operationen noch eine weitere, die sogenannte *Multiplikation* zweier n-tupel stellt. Diese kann an und für sich in verschiedener Weise erklärt werden[6]), man pflegt aber an sie, wofern man von einem „System complexer Grössen" spricht, heute ziemlich allgemein die folgenden Forderungen zu stellen:

I. Das „Produkt" oder „symbolische Produkt" ab zweier n-tupel a, b, oder, was nun dasselbe bedeuten soll, zweier aus den Einheiten $e_1, \dots e_n$ ableitbarer „complexer Grössen" a, b (s. oben) soll wieder ein n-tupel derselben Art, also eine aus denselben Einheiten ableitbare complexe Grösse sein.

II. Diese („symbolische") Multiplikation soll mit der Addition durch das „distributive Gesetz" verbunden sein:

$$(18) \qquad a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca.$$

III. Die Multiplikation soll das „associative Gesetz" erfüllen:

$$(19) \qquad (ab)c = a(bc).$$

Nicht allgemein verlangt wird das Bestehen des „commutativen Ge-

---

14) *Weierstrass* und andere gebrauchen den Ausdruck *Haupt*einheiten.

setzes“ $ab = ba$ für die als Multiplikation bezeichnete Verknüpfung, weshalb auch von den beiden Forderungen (18) keine eine Folge der anderen ist. Dagegen pflegt man als weitere Forderung hinzuzufügen:

IV. Die Multiplikation soll eine im allgemeinen umkehrbare Operation sein, es soll also im allgemeinen möglich sein, aus einer Gleichung der Form $ab = c$ die Grösse a sowohl als auch die Grösse b zu bestimmen, wenn im einen Fall b und c, im anderen a und c gegeben sind. Diese Forderung der Möglichkeit beider Arten von „*Division*“ ist äquivalent mit der anderen, dass eine complexe Grösse $e^0 = \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n$ vorhanden sein soll, die den beiden Gleichungen

$$e^0 a = a, \quad a e^0 = a \tag{20}$$

identisch (für alle Wertsysteme der Coordinaten $a_1, \ldots a_n$) genügt. —

Nach dem üblichen Sprachgebrauch ist also ein „*System complexer Grössen*“ erst dann vollkommen definiert, wenn die bei der Multiplikation zweier n-tupel oder Grössen $a = \sum a_i e_i$, $b = \sum b_i e_i$ anzuwendenden Rechnungsregeln bekannt sind. Die Bedingungen I und II werden in allgemeinster Weise erfüllt, wenn man setzt

$$e_i e_\varkappa = \sum_1^n {}_s \gamma_{i\varkappa s} e_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n), \tag{21}$$

und unter $\gamma_{i\varkappa s}$ reelle oder gewöhnliche complexe Grössen versteht. Die Bedingung III wird sodann erfüllt, wenn allgemein $(e_i e_\varkappa) e_l = e_i (e_\varkappa e_l)$ ist, wenn man also die n^3 Grössen $\gamma_{i\varkappa s}$ derart wählt, dass

$$\sum_1^n {}_s \gamma_{i\varkappa s} \gamma_{sjt} = \sum_1^n {}_s \gamma_{\varkappa js} \gamma_{ist} \tag{22}$$

wird $(i, \varkappa, j, t = 1, 2, \ldots n)$. Die letzte Forderung IV endlich deckt sich mit der anderen, dass keine der Determinanten [I B 1]

$$\left| \sum {}_i \gamma_{i\varkappa s} a_i \right|, \qquad \left| \sum {}_\varkappa \gamma_{i\varkappa s} a_\varkappa \right| \tag{23}$$

identisch (für jede Wahl der Grössen a_i) verschwinden soll.

Sind diese beiden letzten Forderungen erfüllt, so haben die beiden Determinanten (23), als Funktionen der Grössen a_i, dieselben (im analytischen Sinne, II B 1) irreducibelen Teiler; sie verschwinden also für dieselben Wertsysteme dieser Grössen. Sind sie für ein bestimmtes Grössensystem $a_1, \ldots a_n$ von Null verschieden, so haben die beiden Gleichungen

$$ax = b, \quad ya = b \tag{24}$$

jede eine und nur eine Lösung x, y; und es wird insbesondere $x = y = e^0$, wenn $b = a$ (s. Gl. 20); sind jene Determinanten dagegen gleich Null, so giebt es immer von Null verschiedene Lösungen x, y der beiden Gleichungen

$$(25) \qquad ax = 0, \quad ya = 0.$$

a, x und y heissen dann „*Teiler der Null*“, nach *K. Weierstrass*, der übrigens auch die Null $(0, 0, \ldots 0)$ selbst noch unter diesen Begriff fasst. (Vgl. Anm. 30.)

Die Grösse e^0 nimmt innerhalb des betrachteten Systems complexer Grössen eine ähnliche Stellung ein, wie die Einheit unter den reellen Grössen. Sie ist deshalb die „Zahl Eins“ des Systems genannt worden, auch hat man den auf alles Mögliche angewendeten Ausdruck „Modul“ für sie ebenfalls vorgeschlagen. Wir werden sie *Haupteinheit* des Systems nennen. Unter dem *reciproken Wert* der Grösse a, dargestellt durch das Zeichen a^{-1}, verstehen wir sodann, sofern a kein Teiler der Null ist, die gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$(26) \qquad az = e^0, \quad za = e^0.$$

Die Lösungen der Gleichungen (24) werden nunmehr dargestellt durch

$$(27) \qquad x = a^{-1}b, \quad y = ba^{-1}.$$

Sind die Grössen a und b „*vertauschbar*“, d. h. besteht die Gleichung $ab = ba$, so sind diese Grössen x, y einander gleich. —

Der auseinandergesetzte Begriff eines Systemes complexer Grössen kann in der Weise erweitert werden, dass man die Forderungen I—III aufrecht erhält, die Forderung IV aber fallen lässt. Zu den besprochenen treten dann neue „*Systeme ohne Haupteinheit*“, auch mit einem die Vorstellung eines Grenzüberganges hervorrufenden und daher nicht ganz angemessenen Ausdruck „ausgeartete“ Systeme complexer Grössen genannt. In einem jeden solchen System ist bei jeder Wahl des Divisors immer mindestens eine Art der „Division“ eine unmögliche oder unbestimmte Operation.

8. **Typen, Gestalten, Reducibilität.** Aus den Darlegungen der vorigen Nummer geht hervor, dass alle Eigenschaften irgend eines besonderen Systems complexer Grössen völlig bestimmt sind durch das System der n^3 Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$. Je nachdem man nun von vorn herein gewöhnliche complexe oder nur reelle Grössen zu n-tupeln vereinigt hat, wird man nun auch für die Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ gewöhnliche complexe oder aber nur reelle Werte zulassen. Es ergiebt sich hieraus das eine oder andere der beiden Probleme: „Man soll alle Systeme von gewöhnlichen complexen [reellen] Grössen $\gamma_{i\varkappa s}$ finden, die den

Gleichungen (22) Genüge leisten, und ausserdem so beschaffen sind, dass keine der Determinanten (23) identisch verschwindet". — Diese Aufgaben lassen eine noch präcisere Fassung zu. Es sind nämlich zugleich mit irgend einem System complexer Grössen in gewissem Sinn bekannt alle die, die aus ihm durch eine Änderung der Basis $(e_1 \dots e_n)$, also durch andere Auswahl der Einheiten hervorgehen. Eine solche Änderung wird analytisch ausgedrückt durch eine lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante,

$$(26) \qquad c_i' = \sum^n c_{i\varkappa} e_\varkappa \qquad (i, \varkappa = 1, \dots n),$$

wobei die $c_{i\varkappa}$ im übrigen beliebige gewöhnliche complexe [reelle] Werte haben dürfen. Ferner ist mit einem gegebenen System zugleich bekannt das sogenannte *reciproke System* des ersten, ein System, das man erhält, wenn man je zwei Grössen $\gamma_{i\varkappa s}$ und $\gamma_{\varkappa i s}$ vertauscht. Man wird also alle diese durch einfache Transformationen auseinander hervorgehenden Systeme durch irgend eines unter ihnen repräsentieren können.

Wir rechnen zwei Systeme complexer Grössen zu demselben „*Typus*", wenn sie durch Vertauschung der Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ und $\gamma_{\varkappa i s}$, und ebenso, wenn sie durch eine lineare Transformation (26) mit *gewöhnlichen complexen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ aus einander hervorgehen. Wir sagen ferner, ein System mit reellen Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$, kürzer ein *reelles System complexer Grössen*, sei eine *reelle Gestalt* des Typus, dem es angehört; und wir betrachten zwei reelle Gestalten desselben Typus nur dann als verschieden, wenn sie *nicht* durch eine lineare Transformation (26) mit *reellen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ und etwanige Vertauschung von $\gamma_{i\varkappa s}$ mit $\gamma_{\varkappa i s}$ aus einander hervorgehen. Die obigen Aufgaben können nunmehr so formuliert werden:

„*Von jedem Typus von Systemen complexer Grössen mit n Einheiten einen Repräsentanten anzugeben.*"

„*Bei den Typen, die reelle Gestalten haben, von jeder Gestalt einen Repräsentanten anzugeben.*"

Hat ein Typus nur eine einzige reelle Gestalt, so wird man natürlich diese auch als Repräsentanten des Typus selbst wählen.

Das so gestellte Problem lässt eine weitere Vereinfachung zu. Hat man nämlich zwei Systeme complexer Grössen mit n und m Einheiten $(e_1 \dots e_n)$, $(\eta_1 \dots \eta_m)$, so geht aus ihnen ein neues mit $n+m$ Einheiten $e_1 \dots e_n$, $\eta_1 \dots \eta_m$ hervor, wenn man zu den Multiplikationsregeln $e_i e_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s$, $\eta_i \eta_\varkappa = \sum \delta_{i\varkappa s} \eta_s$ der einzelnen Systeme noch die weiteren $e_i \eta_\varkappa = \eta_\varkappa e_i = 0$ $(i = 1 \dots n,\ \varkappa = 1 \dots m)$ hinzufügt. Hieraus ergiebt sich ein Begriff der *Reducibilität* von Systemen complexer Zahlen, oder vielmehr, es ergeben sich zwei solcher Begriffe. Wir sagen, ein System complexer Grössen sei *„reducibel“* schlechthin, wenn vermöge einer linearen Transformation (26) mit *gewöhnlichen complexen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ die Einheiten einer Basis auf mehrere Schichten derart verteilt werden können, dass alle Produkte von Einheiten der einen Schicht mit denen aller übrigen Schichten gleich Null sind; wir nennen das System *irreducibel* im entgegengesetzten Falle. Wir nennen ferner ein System mit *reellen* Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ *„reell-reducibel“* oder *„reell-irreducibel“*, je nachdem sich eine solche in Schichten zerlegte Basis durch eine lineare Transformation (26) mit *reellen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ einführen lässt oder nicht. Ein jedes System complexer Grössen (mit Haupteinheit) kann nur auf eine Weise in irreducibele Systeme zerlegt werden, wenn man von der bei der Wahl der Basis eines jeden Teilsystemes noch vorhandenen Willkür absieht, und ebenso jedes reelle System nur auf eine Weise in reell-irreducibele Systeme. Die Eigenschaften der Reducibilität oder Irreducibilität kommen allen Systemen eines Typus, und soweit reelle Systeme in Frage kommen, allen Systemen derselben Gestalt eines Typus in gleicher Weise zu. Um die obigen beiden Aufgaben für einen bestimmten Wert der Zahl n vollständig zu lösen, hat man daher nur aufzuzählen:

I. *Alle Typen irreducibeler Systeme, bei denen die Zahl der Einheiten* $\leqq n$ *ist.*

II. *Alle verschiedenen reellen Gestalten dieser Systeme.*

III. *Alle reell-irreducibelen Gestalten von Typen reducibeler Systeme, bei denen die Zahl der Einheiten* $\leqq n$ *ist.*

Die Lösung der dritten unter diesen Aufgaben lässt sich auf die der ersten zurückführen. Ist $(\eta_1 \ldots \eta_m)$ die Basis eines irreducibelen Systemes mit den Multiplikationsregeln $\eta_i \eta_\varkappa = \sum \delta_{i\varkappa s} \eta_s$, so erhält man ein zweites System mit den m Einheiten $\vartheta_1 \ldots \vartheta_m$, wenn man setzt $\vartheta_i \vartheta_\varkappa = \sum \bar{\delta}_{i\varkappa s} \vartheta_s$, und unter $\bar{\delta}_{i\varkappa s}$ den conjugiert-complexen Wert von $\delta_{i\varkappa s}$ versteht. Setzt man sodann $\eta_i \vartheta_\varkappa = 0$, und führt man die neuen Einheiten

$$(27) \qquad e_\varkappa = \eta_\varkappa + \vartheta_\varkappa, \qquad e_\varkappa^* = i(\eta_\varkappa - \vartheta_\varkappa)$$

ein, so ist das so entstehende reducibele System mit der Basis $(e_1 \ldots e_m,\ e_1^* \ldots e_m^*)$ reell und reell-irreducibel; und man findet alle unter III verlangten Gestalten, wenn man für $(\eta_1 \ldots \eta_m)$ der Reihe nach je einen Repräsentanten eines jeden irreducibelen Typus setzt, dessen Basis $\frac{n}{2}$ oder weniger Einheiten enthält.

Es bleiben also zu lösen die Probleme I und II.

Es giebt ein einfaches *Kriterium der Reducibilität* eines vorgelegten Systemes complexer Grössen mit gewöhnlichen complexen oder auch reellen Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$: Bei jedem reducibelen [reellen und reell-reducibelen] System sind die Haupteinheiten der irreducibelen Teilsysteme solche Grössen, deren Quadrate ihnen selbst gleich sind, und die überdies mit allen Grössen des Systems vertauschbar sind. Ist umgekehrt in einem System mit n Einheiten $e_1 \ldots e_n$ eine von e^0 verschiedene Grösse [reelle Grösse] ε vorhanden, für die

$$(28) \qquad \varepsilon^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon e_\varkappa = e_\varkappa \varepsilon \qquad (\varkappa = 1 \ldots n),$$

so sind ε und $\eta = e^0 - \varepsilon$ die Haupteinheiten zweier (möglicher Weise wieder reducibeler) Teilsysteme; und diese Teilsysteme werden dadurch gefunden, dass man unter den Produkten $\varepsilon e_\varkappa$ und den Produkten $\eta e_\varkappa$ je ein System von linear-unabhängigen auswählt, und diese Grössen (deren Gesamtzahl gerade n beträgt) als neue Einheiten einführt[14]).

Ausser der eben geschilderten Operation des Nebeneinandersetzens der Einheiten zweier Systeme complexer Grössen giebt es noch ein anderes als „*Multiplikation zweier Systeme miteinander*“ bezeichnetes Verfahren, aus zwei solchen ein drittes herzuleiten[15]). Dieses besteht darin, dass man die formal gebildeten Produkte der Einheiten e_i, e_j' zweier Systeme als Einheiten $\eta_{ij} = e_i e_j' = e_j' e_i$ eines neuen Systems auffasst, und, wenn $e_i e_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s$, $e_i' e_\varkappa' = \sum \gamma_{i\varkappa s}' e_s'$ angenommen wird, die Produkte von zweien der neuen Einheiten gemäss der Formel

$$(29) \qquad \eta_{i\varkappa} \cdot \eta_{lm} = \sum_{s,t} \gamma_{i\varkappa s} \gamma_{lmt}' \cdot \eta_{st}$$

auf diese Einheiten zurückführt.

Das Verfahren kommt darauf hinaus, dass man als Coordinaten $a_1 \ldots a_n$ einer Grösse eines vorgelegten Systems statt reeller oder *gewöhnlicher* complexer Grössen überhaupt Grössen *irgend* eines be-

---

14) Vgl. hierzu *E. Study*, Gött. Nachr. 1889, p. 237; die obigen Begriffsbildungen und Problemen zu Grunde liegende Anschauungsweise rührt von *S. Lie* her [II A 6]; das Kriterium der Reducibilität von *G. Scheffers*, Math. Ann. 39 (1891), p. 293. Dort wird der Begriff des Typus etwas anders gefasst, als im Texte, aber ebenso wie hier bei *S. Lie* u. *Scheffers*, Cont. Gruppen, Leipzig 1893.

15) Obige Ausdrucksweise braucht *Scheffers* a. a. O. Die Operation selbst ist schon von *W. K. Clifford* in ausgedehntem Masse verwendet worden: Am. J. of Math. 1 (1878), p. 350 = Math. Papers (London 1883) Nr. 30. Vgl. dazu *H. Taber*, Am. J. of Math. 12 (1890), p. 337, insbesondere § 25. Die zuletzt genannte Abhandlung ist besonders geeignet zur Orientierung über die eigentümliche Anschauungsweise und Terminologie der englisch-amerikanischen Mathematiker.

stimmten zweiten Systems nimmt. Der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des als „Produkt“ (Compound) bezeichneten, abgeleiteten Systems und den Eigenschaften der beiden gegebenen Systeme ist nicht einfach. Doch ergeben sich mehrere für Anwendungen besonders geeignete Systeme complexer Grössen gerade auf diese Weise.

9. Systeme mit zwei, drei und vier Einheiten. Wir erläutern die Begriffsbildungen der vorigen Nummer durch Aufzählung aller möglichen Systeme complexer Grössen mit zwei, drei oder vier Einheiten.

Systeme mit zwei Einheiten.

Es giebt nur drei reelle Systeme mit zwei Einheiten, die sämtlich das commutative Gesetz der Multiplikation befolgen. Die zugehörigen Multiplikationsregeln sind, nach geeigneter Wahl der Basis, diese:

$$(30)\qquad e_0^2 = e_0\,,\quad e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1\,,\quad e_1^2 = e_0\,,$$

$$(31)\qquad e_0^2 = e_0\,,\quad e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1\,,\quad e_1^2 = -e_0\,,$$

$$(32)\qquad e_0^2 = e_0\,,\quad e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1\,,\quad e_1^2 = 0\,. \quad ^{16})$$

Von diesen ist nur das letzte, das aus den beiden ersten durch einen Grenzübergang hergeleitet werden kann, irreducibel. Das zweite System (31) ist das der gewöhnlichen complexen Grössen; es ist *reducibel, aber reell-irreducibel* nach der Definition der Nr. 8. Es geht in das erste System (30) über durch die imaginäre Substitution $e_0' = e_0$, $e_1' = ie_1$. Die Systeme (30) und (31) sind also zwei verschiedene reelle Gestalten eines und desselben Typus (während (32) einen anderen Typus repräsentiert). Die erste dieser Gestalten, (30), ist reell-reducibel; denn führt man die neuen Einheiten $e_1' = \frac{1}{2}(e_0 + e_1)$, $e_2' = \frac{1}{2}(e_0 - e_1)$ ein, so erhält man die Multiplikationsregeln:

$$(30\text{b})\qquad e_1'^2 = e_1',\quad e_1' e_2' = e_2' e_1' = 0\,,\quad e_2'^2 = e_2'.$$

Das System der gewöhnlichen complexen Grössen tritt hiernach in der allgemeinen Theorie der complexen Grössen an zwei verschiedenen Stellen auf. Bei Aufzählung der Typen irreducibeler Systeme erscheint es als das einzige System mit *einer* Einheit ($e_0^2 = e_0$); bei Aufzählung der reellen und reell-irreducibelen Systeme erscheint es unter den Systemen mit *zwei* Einheiten.

Von Systemen mit drei und vier Einheiten zählen wir nur die

16) *S. Pincherle* nach Vorlesungen von *Weierstrass*, Giorn. di mat. 18 (1880), p. 205, wo allerdings das dritte System nicht ausdrücklich aufgeführt wird, und *A. Cayley,* Lond. Math. Proc. 15 (1883—84), p. 185.

irreducibelen und reell-irreducibelen auf[17]). Wir stellen ihre Multiplikationsregeln in Gestalt quadratischer Tafeln zusammen. e_0 bedeutet in jedem Falle die Haupteinheit; der Wert des Produktes $e_i e_\varkappa$ ist in der Horizontalreihe enthalten, die links e_i, und in der Verticalreihe, die oben $e_\varkappa$ enthält.

(33) *Irreducibele Systeme mit drei Einheiten.*

$$\text{I.}\ \begin{array}{ccc} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{II.}\ \begin{array}{ccc} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_0 & e_2 \\ e_2 & -e_2 & 0 \end{array}, \qquad \text{III.}\ \begin{array}{ccc} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \end{array}.$$

(34) *Irreducibele Systeme mit vier Einheiten.*

$$\text{I.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{II.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_2 & e_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & e_3 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{III.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & e_3 & 0 \\ e_2 & -e_3 & ce_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{IVa.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{IVb.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & -e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{V.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{VIa.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -e_0 \end{array}, \qquad \text{VIb.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_3 & e_2 \\ e_2 & -e_3 & e_0 & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 \end{array}, \qquad \text{VIIa.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{VIIb.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_3 & e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & -e_2 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{VIII.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{IX.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_2 & e_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & -e_3 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{X.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & -e_2 & 0 & 0 \end{array}; \quad \begin{array}{l} 2e_0' = e_0 + ie_1, \\ 2e_1' = e_2 + ie_3, \\ 2e_2' = e_0 - ie_1, \\ 2e_3' = e_2 - ie_3. \end{array} \right\}$$

17) *E. Study*, Gött. Nachr. 1889, p. 237. Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 283. Verwandte Untersuchungen hatte bereits 1870 *B. Peirce* angestellt: Am. J. of Math. 4 (1881) p. 97. Indessen ist dieser Autor nicht zu einer erschöpfenden Aufzählung der Systeme mit drei und vier Einheiten gelangt.

Die Typen sind durch römische Ziffern unterschieden, die verschiedenen Gestalten eines und desselben Typus durch diesen angehängte Indices a, b. Das zuletzt (ohne Nummer) angeführte System repräsentiert die einzige reell-irreducibele Gestalt eines reducibelen Typus, die bei vier Einheiten vorkommt. Es wird zerlegt durch Einführung der neuen Einheiten e_i'. Jedes dieser Systeme, mit Ausnahme von II, kann durch Einführung neuer Einheiten in sein reciprokes System übergeführt werden. I, IV, V und X haben das commutative Gesetz der Multiplikation. Die Tafel III stellt unendlich viele verschiedene Typen dar, entsprechend den verschiedenen Werten des Parameters c, darunter alle bei vier Einheiten vorhandenen Typen ohne reelle Gestalt, entsprechend den imaginären Werten von c. VIa ist das von *Hamilton* 1843 entdeckte System der *Quaternionen*. VIa und VIIa gehen in die Gestalten VIb und VIIb über durch die imaginäre Substitution

$$e_0' = e_0, \quad e_1' = ie_1, \quad e_2' = ie_2, \quad e_3' = -e_3,$$

ebenso IVa in IVb durch Einführung von $e_2' = ie_2$ an Stelle von e_2.

10. Specielle Systeme mit n^2 Einheiten. Bilineare Formen. Besonders untersucht worden ist eine Klasse von Systemen complexer Grössen mit einer quadratischen Zahl von Einheiten, die aus der Theorie der linearen Transformationen entspringt. Durch jedes System von n^2 reellen oder gewöhnlichen complexen Grössen $a_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1 \dots n)$ — also durch eine (quadratische) sogenannte *Matrix* $\| a_{i\varkappa} \|$ [Art. I B 1 b] — ist eine *lineare Transformation*

$$(35) \qquad y_\varkappa = \sum_1^n {}^i a_{i\varkappa} x_i \qquad (\varkappa = 1 \dots n)$$

bestimmt (deren Determinante $|a_{i\varkappa}|$ hier nicht notwendig als von Null verschieden vorausgesetzt wird), und ebenso eine *bilineare Form* [I B 1 b]

$$(36) \qquad A = \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^\varkappa a_{i\varkappa} x_i u_\varkappa .$$

Führt man nun die zu einer zweiten Matrix von n^2 Elementen $\| b_{i\varkappa} \|$ oder einer bilinearen Form B gehörige lineare Transformation nach der ersten aus, so entsteht eine neue lineare Transformation, zugehörig zu der Matrix $\| c_{i\varkappa} \|$ und der bilinearen Form C, wobei

$$(37) \qquad c_{ij} = \sum_1^n {}^\varkappa a_{i\varkappa} b_{\varkappa j},$$

$$(38) \qquad C = \sum \sum c_{ij} x_i u_j = \sum_\varkappa \frac{\partial A}{\partial u_\varkappa} \frac{\partial B}{\partial x_\varkappa} .$$

Die Regel, wonach hier aus zwei Matrices oder bilinearen Formen eine dritte hergeleitet wird, nennt man „*Zusammensetzung*", „*Composition*" oder auch „*Multiplikation*" der Matrices oder bilinearen Formen. Man drückt den Inhalt der Formel (38) durch die symbolische Gleichung

$$(39) \qquad A \cdot B = C$$

aus, und nennt die Form C das — in der Reihenfolge A, B genommene und von $B \cdot A$ zu unterscheidende — (sog. symbolische) *Produkt* von A und B. Offenbar ist diese Regel ganz identisch mit der Multiplikationsregel eines Systems complexer Grössen mit n^2 Einheiten $e_{i\varkappa}$. Setzt man

$$(40) \qquad e_{i\varkappa} e_{lm} = 0 \quad (\varkappa \neq l), \qquad e_{i\varkappa} e_{\varkappa l} = e_{il},$$

so sagen die obigen Formeln dasselbe aus, wie die Gleichung

$$(41) \qquad \left(\sum a_{i\varkappa} e_{i\varkappa}\right)\left(\sum b_{i\varkappa} e_{i\varkappa}\right) = \sum c_{i\varkappa} e_{i\varkappa}. \text{ [18]}$$

Es gelten daher auch alle bei dem Rechnen mit einem System complexer Grössen überhaupt anzuwendenden Regeln insbesondere für das Rechnen mit bilinearen Formen, soweit man auf solche keine anderen Operationen als die Addition, die Multiplikation mit numerischen (reellen oder gewöhnlichen complexen) Grössen, und die oben definierte Multiplikation zweier bilinearer Formen miteinander anwendet[19]. Aber auch umgekehrt lassen sich die in der Theorie der

---

18) Für den Fall $n = 3$ wird das obige System complexer Grössen von Mathematikern englischer Zunge als System der *Nonionen* bezeichnet. S. darüber *C. S. Peirce*, Johns Hopkins Circular, Baltimore 1882, Nr. 22; *J. J. Sylvester* ebenda Nr. 27. Vgl. auch Anm. 15. — Im allgemeinen Falle brauchen *Sylvester* u. A. für den besonderen Zweig der Algebra, der von der Zusammensetzung bilinearer Formen handelt, den Ausdruck *Universal Algebra.*

19) Die Zusammensetzung der Matrices ist so alt, als die Theorie der linearen Transformationen selbst; das obige specielle System complexer Grössen tritt auf, wo immer man es mit linearen Transformationen zu thun hat. Das Wesentliche an der im Text dargelegten Auffassung liegt aber darin, dass der ganze Complex von n^2 Grössen $a_{i\varkappa}$ als etwas Einheitliches angesehen und durch ein solches *Zeichen* dargestellt wird, das dem distributiven und associativen Gesetz der „Multiplikation" einen formal einfachen und leicht zu handhabenden Ausdruck verleiht. Diese Auffassung findet sich angedeutet schon bei *Hamilton* (Lectures), klar und deutlich bei *Cayley* (Lond. Trans. v. 148 [1858], 1859, p. 17 = Coll. Math. Papers 2, p. 475); *Cayley* muss daher wohl als Begründer dieser Theorie angesehen werden. Nach *Cayley* haben viele Mathematiker sich derselben Begriffsbildungen bedient. Für uns kommen insbesondere in Betracht Arbeiten von *Edm. Laguerre* (Ec. Polyt. t. 25, 1867, p. 215), *G. Frobenius* (J. f. Math. 84, 1878, p. 1 — die gründlichste Untersuchung über diesen Gegenstand —), *Sylvester* (Johns Hopkins Circular, Baltimore 1883, Nr. 27, 1884, Nr. 28; Am.

bilinearen Formen gewonnenen Sätze auf beliebige Systeme complexer Grössen anwenden. Die Multiplikationsregeln eines solchen Systems sind nämlich selbst nichts anderes als der Ausdruck für die Regeln der Zusammensetzung gewisser *specieller* bilinearer Formen: setzt man, von irgend einem vorgelegten System mit n Einheiten und mit den Multiplikationsregeln $e_i e_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s$ ausgehend

$$(42) \qquad A_i = \sum_{s,t} x_s \gamma_{sit} u_t \qquad (i = 1 \ldots n),$$

so folgt $A_i A_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} A_s$.[20]) Die oben betrachteten speciellen Systeme mit n^2 Einheiten enthalten also, wenn man die Zahl n unbestimmt lässt, alle anderen. Offenbar kann man in derselben Weise aus jeder linearen Schaar bilinearer Formen, sofern die Produkte von je zwei Formen der Schaar selbst angehören, ein System complexer Grössen mit oder ohne Haupteinheit herleiten. So stimmt das System (40) selbst im Falle $n = 2$ mit den *Quaternionen* in ihrer zweiten reellen Gestalt VIb überein, wie man erkennt, wenn man statt der Produkte $x_i u_\varkappa$ die vier ebenfalls linear-unabhängigen Formen

$$(43) \qquad \begin{array}{ll} A_0 = x_1 u_1 + x_2 u_2, & A_1 = - x_1 u_2 - x_2 u_1 \\ A_2 = - x_1 u_1 + x_2 u_2, & A_3 = x_2 u_1 - x_1 u_2 \end{array}$$

als „Einheiten" einführt[21]); dieselbe Multiplikationstafel VIb ergiebt sich aber nach Obigem u. a. auch, wenn man das folgende System von vier bilinearen Formen

$$(44) \qquad \begin{array}{ll} B_0 = x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3, & B_1 = x_0 u_1 + x_1 u_0 - x_2 u_3 - x_3 u_2, \\ B_2 = x_0 u_2 + x_1 u_3 + x_2 u_0 + x_3 u_1, & B_3 = x_0 u_3 + x_1 u_2 - x_2 u_1 - x_3 u_0 \end{array}$$

zu Grunde legt. —

Unter den (symbolischen) *Potenzen* A, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ u. s. w. einer bilinearen Form

$$A = \sum_1^n {}_{i,\varkappa}\, a_{i\varkappa} x_i u_\varkappa$$

J. of Math. 6, 1884, p. 270), *Ed. Weyr* (Monatsh. f. Math. 1889, p. 187) und *H. Taber* (Am. J. of Math. 12, 1890, p. 337; 13, 1891, p. 159). Da die genannten Autoren zum Teil unabhängig von einander gearbeitet haben, so haben die Hauptsätze in dieser Theorie mehrere Entdecker.

20) *Ed. Weyr,* Prag. Ber. v. 25. Nov. 1887. In anderer Form ist der Satz zuvor schon von *C. S. Peirce* ausgesprochen worden (Mem. of the Am. Acad. of Arts and Sciences 9, 1870. Am. J. of Math. 4, 1881, p. 221). Vgl. dazu Johns Hopkins Circular Nr. 13 (1882), Nr. 22 (1883).

21) *Laguerre* a. a. O. p. 230. *Cayley,* Math. Ann. 15 (1879), p. 238. *B.* u. *C. S. Peirce*, Am. J. of Math. 4 (1881); Johns Hopkins Circ. Nr. 22 (1883). *Cyp. Stéphanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 299.

befinden sich höchstens n linear-unabhängige, d. h. solche, zwischen denen keine für alle Wertsysteme der Grössen x_i, u_i gültige lineare Gleichung mit numerischen (reellen oder gewöhnlichen complexen) Coefficienten (Funktionen der $a_{i\varkappa}$) stattfindet. Rechnet man, wie gebräuchlich, zu diesen Potenzen als nullte die sogenannte „*Einheitsform*“

$$(45) \qquad E = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n, \text{[22]}$$

so kann man immer die n^{te} Potenz von A durch die vorausgehenden Potenzen ($A^0 = E$, $A^1 = A$, A^2, A^3, ... A^{n-1}) ausdrücken. Man bildet zu diesem Zweck, unter r einen unbestimmten Parameter verstehend, die Determinante der bilinearen Form $r \cdot E - A$,

$$(46) \qquad \varphi(r) = |rE - A| =$$
$$= r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n r^0 = (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n),$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades von r mit reellen oder gewöhnlichen complexen Coefficienten. Ersetzt man nun in dem Ausdruck von $\varphi(r)$ r durch A, d. h. r^0 durch $E = A^0$, r^1 durch A, r^2 durch das (symbolische) Quadrat von A, u. s. w., so findet sich $\varphi(A) = 0$.[23]) Der Ausdruck $\varphi(r)$ wird, unter Entlehnung eines Ausdruckes von *Cauchy*, nach *Frobenius* die „*charakteristische Funktion*“ der Form A genannt; die Gleichung $\varphi(r) = 0$ heisst entsprechend die „*charakteristische Gleichung*“[24]). Diese Gleichung ist die Gleichung niedrigsten Grades, der die Form A genügt, so lange die Grössen $a_{i\varkappa}$ unbestimmt sind. Die Gleichung niedrigsten Grades, der eine Form A mit irgendwie specialisierten Coefficienten $a_{i\varkappa}$ genügt,

$$(47) \qquad \psi(A) = A^p + \mathfrak{a}_1 A^{p-1} + \cdots + \mathfrak{a}_p A^0 = 0 \qquad (p \leqq n),$$

wird von *Weyr* die „*Grundgleichung*“, von anderen die „*reducierte charakteristische Gleichung*“ der Form A (oder der Matrix $\|a_{i\varkappa}\|$) genannt. Um die zugehörige ganze Funktion $\psi(r)$ zu bilden, bestimme man den grössten gemeinsamen Teiler $\vartheta(r)$ aller Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $|rE - A|$. Es ist dann

22) Diese Bezeichnung nach *Frobenius*. Die entsprechende Matrix wird *Einheitsmatrix* oder *Scalarmatrix* genannt. Die entsprechende complexe Grösse des Systems (40) ist die Haupteinheit dieses Systems.

23) Dieser Hauptsatz der Theorie ist von *Cayley* (a. a. O.) behauptet und an einem Beispiel ($n = 3$) verificiert worden. Bewiesen haben ihn *Laguerre, Frobenius, Ed. Weyr* u. *H. Taber* (s. Anmerk. 19), ausserdem *M. Pasch* (Math. Ann. 38, 1891, p. 48), *A. Buchheim* (Lond. M. S. Proc. 16, 1885, p. 63), *Th. Molien* (Math. Ann. 41, 1893, p. 83), endlich *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601. Der principiell einfachste Beweis ist der zweite von *Frobenius*.

24) Bei *Sylvester* u. a. heisst die Gleichung (46) „*latent equation*“, ihre Wurzeln $r_1 \ldots r_n$ heissen „*latent roots*“ (der Matrix $\|a_{i\varkappa}\|$).

(48) $$\psi(r) = \frac{\varphi(r)}{\vartheta(r)}\,{}^{25)}.$$

Bei beliebigen Systemen complexer Grössen bilden Grad und Beschaffenheit der niedrigsten algebraischen Gleichung, der eine allgemein gewählte Zahl a eines bestimmten Systems genügt, eines der Hülfsmittel, deren man sich zur Klassifikation dieser Gebilde bedient[17]). Der bei jedem vorgelegten System völlig bestimmte Grad p dieser Gleichung wird nach *Scheffers* „*Grad*", nach *Molien* „*Rang*" des Systems genannt; die Gleichung $\psi(a) = 0$ selbst heisst bei *Scheffers* die „*charakteristische Gleichung*", bei *Molien* die „*Ranggleichung*" des Systems[26]). So hat bei dem System (40) mit n^2 Einheiten der Rang den Wert n, und die Gleichung $\varphi(r) = 0$ (46) ist die Ranggleichung dieses Systems. Von den irreducibelen Systemen mit drei Einheiten (33) hat I den Rang 3, II und III haben den Rang 2; von denen mit vier Einheiten (34) hat I den Rang 4, II—V haben den Rang 3, VI—X den Rang 2. Die Ranggleichung der Quaternionen (34, VIa) z. B. lautet, wenn $a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ gesetzt wird,

$$r^2 - 2a_0 \cdot r + (a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) = 0. \text{ —}$$

Die linke Seite der Ranggleichung eines reducibelen Systems ist gleich dem Produkt aus den linken Seiten der Ranggleichungen seiner einzelnen irreducibelen Bestandteile. Es lassen sich daher alle Systeme complexer Grössen mit n Einheiten angeben, deren Rang den grössten möglichen Wert n erreicht. Ihre irreducibelen Bestandteile haben einzeln wiederum die genannte Eigenschaft, und alle, die aus der gleichen Zahl m $(\leqq n)$ von Einheiten gebildet sind, gehören einem einzigen Typus an; die Multiplikationsregeln eines solchen irreducibelen Systems mit den Einheiten $e_0 \dots e_{m-1}$ lassen sich auf die Form bringen:

(49) $$e_i e_\varkappa = e_{i+\varkappa} \quad (i + \varkappa \leqq m - 1), \qquad e_i e_\varkappa = 0 \quad (i + \varkappa > m - 1).^{27)}$$

11. Specielle Systeme mit commutativer Multiplikation. Die zuletzt betrachteten Systeme complexer Grössen mit n Einheiten bilden

25) *Frobenius*, J. f. Math. 84; andere Beweise sind gegeben worden von *Ed. Weyr* (a. a. O.) und von *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601.

26) *Scheffers*, Math. Ann. 39 (1891), p. 293, *Molien*, ebenda 41 (1893), p. 83. — Die „charakteristische Gleichung eines Systems" ist nicht zu verwechseln mit der „charakteristischen Gleichung" einer Grösse a des Systems, der Gleichung $\varphi(r) = 0$, die zu der entsprechenden bilinearen Form gehört.

27) *Study*, Gött. Nachr. 1889, p. 62 und Monatsh. f. Math. 2 (1890), p. 23. Andere Beweise bei *Scheffers*, Math. Ann. 39, p. 293, und bei *G. Sforza*, Giorn. di mat. 32—34 (1894—96), pp. 293, 80, 252.

eine sehr specielle Klasse unter denen, die das commutative Gesetz der Multiplikation befolgen. Unter ihnen sind die einfachsten die Systeme, deren irreducibele Bestandteile nur je eine Einheit enthalten; also die zu dem Typus

$$(50)\qquad e_i^2 = e_i\,, \quad e_i e_\varkappa = 0 \qquad (i \neq \varkappa,\ i, \varkappa = 1, 2 \ldots n)$$

gehörigen Systeme. Auf diese Systeme, und ihre verschiedenen nach dem Satz in Nr. 8 ohne weiteres anzugebenden reellen Gestalten ist man gekommen durch eine Untersuchung über den inneren Grund der ausgezeichneten Stellung, die wir dem System der gemeinen complexen Grössen zuschreiben. Man hat dabei angeknüpft an eine Stelle bei *Gauss*[3]), der in Aussicht gestellt hatte, die Frage zu beantworten: „*Warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können*". Bedenkt man, dass die heute auf vielfältige Weise verwendeten gewöhnlichen complexen Grössen doch hauptsächlich und ursprünglich *nur* deshalb in die Analysis eingeführt worden sind, weil man mit ihrer Hülfe gewissen Sätzen allgemeine Gültigkeit und anderen eine einfachere Ausdrucksweise geben konnte, so entsteht die Frage, ob der Erweiterungsprocess, der von dem Gebiete der reellen Grössen in das Gebiet der gemeinen complexen Grössen führt, hiermit abgeschlossen ist, oder ob nicht das genannte Bedürfnis zu ferneren in gleichem Sinne berechtigten Erweiterungen des Gebietes der „allgemeinen Arithmetik" Anlass giebt.

Um die Zeit 1863 hat *Weierstrass* in einer an der Universität Berlin gehaltenen öffentlichen Vorlesung „über complexe Zahlgrössen" den Satz bewiesen, dass bei einem jeden (nach unserer Terminologie) reellen System complexer Grössen mit commutativer Multiplikation ein Produkt $a \cdot b$ verschwinden kann, ohne dass einer der Faktoren verschwindet, es sei denn, dass das betrachtete System nur eine Einheit ($e_0^2 = e_0$) enthält, oder mit dem aus zwei Einheiten gebildeten System der gemeinen complexen Grössen zusammenfällt[28]). Ein ähnlicher Satz gilt, nach *Frobenius* und *C. S. Peirce*, auch dann, wenn man das commutative Gesetz der Multiplikation nicht fordert: zu den genannten beiden Systemen kommen dann noch die reellen Quaternionen (VIa)[29]). Wenn man es also für unzulässig erklärt, dass eine

---

28) Nach mündlicher Mitteilung von *H. A. Schwarz*. Vgl. auch *E. Kossak*, Elemente der Arithmetik (Berl. 1882, Friedr. Werd. Gymn. Progr.). Ein von *H. Hankel* veröffentlichter Satz (a. a. O.) ist in dem oben angeführten enthalten.

29) *Frobenius*, J. f. Math. 84 (1878), p. 59. *C. S. Peirce*, Am. J. of Math 4 (1881), p. 225.

algebraische Gleichung (z. B. $ax + b = 0$) mit von Null verschiedenen Coefficienten unendlich viele Wurzeln haben kann, und wenn man auch das commutative Gesetz der Multiplikation nicht verletzen will, so bleiben zulässig nur die gewöhnlichen complexen Grössen. —

Etwas geringere Anforderungen an die in der „allgemeinen Arithmetik" zulässigen Grössen hat *Weierstrass* in einer Veröffentlichung aus dem Jahre 1884 gestellt[30]). Er betrachtet auch hier nur Systeme mit commutativer Multiplikation, ohne dabei von vornherein die Existenz einer Haupteinheit (nach unserer Terminologie) anzunehmen. Da in jedem solchen System eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten alle aus einem und demselben Teiler der Null durch Multiplikation mit irgend welchen Grössen des Systems hervorgehen, unendlich viele Wurzeln haben kann, so stellt er die Frage nach allen den Systemen, bei denen *nur* solche besondere Gleichungen unendlich viele Wurzeln zulassen. Diese Frage wurde von ihm unter Zuziehung mehrerer weiterer Voraussetzungen, und von *R. Dedekind*[31]) allgemein dahin beantwortet, dass nur die verschiedenen reellen Gestalten des Typus (50) diese Eigenschaft besitzen. *Dedekind* zeigte ausserdem, dass diese Systeme vor allen anderen durch das Nicht-Verschwinden der aus den Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ gebildeten Determinante

(51) $$\left|\sum_{r,s} \gamma_{i\varkappa s}\gamma_{rsr}\right|$$

ausgezeichnet sind. Bei dieser Art der Fragestellung ergeben sich also ausser dem System der gemeinen complexen Grössen noch andere, aber nur triviale Systeme, nämlich solche, deren Rechnungsregeln lediglich Wiederholungen der Rechnungsregeln sind, die schon bei den reellen und den gewöhnlichen complexen Grössen vorkommen. Aus diesem Grunde erklärt *Weierstrass* die genannten Systeme zwar nicht für unzulässig, aber für überflüssig. Anderer Ansicht ist *Dedekind.* Er zeigt, dass die innerhalb der Theorie der gewöhnlichen complexen Grössen auftretenden und längst eingebürgerten algebraischen Zahlen (I C 4) bei geeigneter Auffassung genau dieselben Eigenschaften darbieten, wie die Grössen der Systeme (50). Nach ihm sind also diese Systeme weder unzulässig, noch überflüssig, sie entbehren aber des Charakters der Neuheit. — Dasselbe lässt sich übrigens noch

30) Gött. Nachr. 1884, p. 396 u. ff. Dazu *H. A. Schwarz*, ebenda p. 516, *O. Hölder* 1886, p. 241, *J. Petersen* 1887, p. 489. Vgl. Anm. 14.

31) Gött. Nachr. 1885, p. 141, u. 1887, S. 1. Dazu *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601. *D. Hilbert,* Gött. Nachr. 1896, p. 179. *Study,* ebenda 1898, p. 1.

in einem anderen Sinne behaupten. Auch gewisse längst untersuchte Systeme bilinearer Formen unterscheiden sich nur in der Bezeichnung von den Systemen (50), und namentlich ist die von *Weierstrass* und seinen Nachfolgern behandelte Reduktion eines „zulässigen" Systems auf die Basis $(e_1 \ldots e_n)$ (Reduktion auf die „Teilgebiete" nach *Weierstrass*) eine aus der Theorie der bilinearen Formen wohlbekannte Operation[32]).

Eingehendere Untersuchungen über die möglichen Typen von Systemen mit commutativer Multiplikation liegen zur Zeit noch nicht vor. Eine gewisse Einsicht in die Struktur dieser Systeme wird eröffnet durch mehrere Sätze von *G. Scheffers* und *Th. Molien* (a. a. O.), sowie durch einen von *G. Frobenius*[32]) aufgestellten Satz: „Sind A und B zwei miteinander vertauschbare bilineare Formen (oder auch vertauschbare Grössen irgend eines Systems), so sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Form $\lambda A + \mu B$ lineare Funktionen der Parameter λ und μ." —

L. Kronecker hat umfangreiche, sehr abstrakt gehaltene Untersuchungen angestellt über den Zusammenhang der Systeme mit commutativer Multiplikation mit der von ihm begründeten Theorie der Modulsysteme [I B 1 c]. Er geht von der Bemerkung aus, dass die linken Seiten der Definitionsgleichungen

$$e_i e_\varkappa - \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s = 0 \qquad (\gamma_{i\varkappa s} = \gamma_{\varkappa i s})$$

nach Ersetzung der Einheiten e_i durch unbestimmte Grössen y_i ein Modulsystem bilden, und er zeigt, dass umgekehrt jedes Modulsystem von bestimmter besonderer Beschaffenheit zur Entstehung eines Systems complexer Grössen Anlass giebt[33]).

12. Complexe Grössen und Transformationsgruppen. Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Zusammenhangs der Systeme complexer Grössen mit gewissen *Transformationsgruppen* (vgl. Nr. **6**). Fasst man in den durch die Multiplikationsregeln (21) irgend eines Systems complexer Grössen näher erklärten Gleichungen

$$x' = ax, \quad x' = xb \tag{52}$$

die Coordinaten x_i der complexen Grösse x als unabhängige Veränderliche auf, die Coordinaten x_i' von x' als abhängige Veränderliche, endlich die Coordinaten a_i und b_i der Grössen a und b als Parameter, so stellt jede der beiden Gleichungen (52) eine continuierliche und zwar

32) *Study,* Gött. Nachr. 1889, p. 265. Vgl. *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601.

33) Berl. Ber. 1888, I. p. 429, 447, 557, 595; II. p. 983.

n-gliedrige Gruppe von linearen Transformationen vor[34]), eine Untergruppe der von *S. Lie* so genannten linearen homogenen Gruppe [II A 6]; andere Gruppen — Untergruppen der sog. allgemeinen linearen Gruppe — werden in entsprechender Weise dargestellt durch die Gleichungen:

$$(53) \quad x' = x + c, \quad x' = ax + c, \quad x' = xb + c, \quad x' = axb + c.$$

Führt man in die Gleichungen der letzten und umfassendsten unter diesen Gruppen (durch eine nicht-lineare Transformation) neue Veränderliche ein, so erhält man neue Gruppen, bei denen an Stelle des commutativen Gesetzes der Addition und des distributiven und associativen Gesetzes der Multiplikation gewisse Funktionalgleichungen treten. *Fr. Schur* hat gezeigt, dass auch umgekehrt jede Gruppe, deren Transformationen diesen Funktionalgleichungen genügen, durch Einführung von geeigneten Veränderlichen und Parametern in die Form $x' = axb + c$ gesetzt werden kann[35]).

Die beiden projektiven n-gliedrigen Gruppen (52) bilden, nach der Terminologie von *S. Lie*, ein Paar von einfach-transitiven, sogenannten reciproken Gruppen [II A 6]. Sie sind aber nur *specielle* Gruppen dieser Art, da sie (mindestens) eine eingliedrige Untergruppe ($a = \lambda e^0$, $b = \lambda e^0$) mit einander gemein haben. Fasst man jedoch, abweichend von der oben gemachten Annahme, die Veränderlichen x_i, x_i' wie auch die Parameter $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ als Verhältnisgrössen (sogenannte *homogene* Grössen) auf, so verschwindet dieser specielle Charakter: Man erhält *jeden* „Typus" von Paaren reciproker projektiver Gruppen eines Raumes von $n - 1$ Dimensionen, und jeden Typus nur einmal, wenn man an Stelle des oben unbestimmt gelassenen Systems complexer Grössen der Reihe nach Repräsentanten eines jeden Typus von Systemen mit n Einheiten setzt[36]). Es ist also zugleich mit den unter Nr. 7 und Nr. 8 besprochenen Problemen ein bestimmtes Problem aus der Theorie der Transformationsgruppen gelöst.

Umfassendere Anwendungen der Systeme complexer Grössen auf die Theorie der Transformationsgruppen ergeben sich aus der besonderen analytischen Darstellung der — zufolge der getroffenen Festsetzung — $(n-1)$-gliedrigen reciproken Gruppen $x' = ax$, $x' = xb$.

---

34) Zuerst bemerkt von *H. Poincaré*: Par. C. R. 99 (1884), p. 740. Vgl. zu dieser Arbeit *Lie* u. *Scheffers* a. a. O. p. 621.

35) Math. Ann. 33 (1888) p. 49.

36) *Study,* Leipz. Ber. 1889, p. 177 = Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 283. *Lie* und *Scheffers*, Cont. Gruppen (Leipzig 1893) Kap. 21; siehe wegen der allgemeinen Theorie der reciproken Gruppen *Lie* und *Engel*, Theorie der Transformationsgruppen I (Leipzig 1888), Kap. 21. Vergleiche überall Art. II A 6.

Diese Gruppen sind nämlich zugleich ihre eigenen Parametergruppen. Führt man nach den obigen Transformationen die folgenden aus: $x'' = a'x'$, $x'' = x'b'$, so folgt $x'' = a''x$, $x'' = xb''$, wo

$$(54) \qquad a'' = a'a, \quad b'' = bb';$$

diese Gleichungen haben aber wiederum die Form (52). Sagen wir (mit *Study*) allgemein, dass bei einer bestimmten Darstellung einer r-gliedrigen continuierlichen (oder auch sog. gemischten) Gruppe durch $r+1$ homogene Parameter *bilineare Zusammensetzung der Parameter* stattfindet, wenn die Parameter der aus zwei Transformationen S_1 und S_2 der Gruppe zusammengesetzten Transformation S_1S_2 ganze homogene lineare Funktionen der Parameter von S_1 sowohl als von S_2 sind, so folgt: „Jede $(n-1)$-gliedrige continuierliche Gruppe, die gleichzusammengesetzt ist mit einer — oder mit mehreren — der aus Systemen complexer Grössen hergeleiteten $(n-1)$-gliedrigen Gruppen (52), ist einer Darstellung durch n homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung — oder mehrerer solcher Darstellungen — fähig.“ Da unter den Gruppen (52), sobald $n > 3$ ist, nicht alle möglichen Zusammensetzungen $(n-1)$-gliedriger Gruppen auftreten, so erfreuen sich nur verhältnismässig wenige continuierliche Gruppen dieser besonders einfachen Art der Parameterdarstellung; der Kreis dieser Gruppen erweitert sich aber bedeutend, wenn man auch überzählige Parameter zulässt[37]).

Zu den zuletzt betrachteten Kategorieen von continuierlichen Gruppen gehören insbesondere auch mehrere Gruppen, die — auf andere Weise als oben geschehen — aus Systemen complexer Grössen selbst hergeleitet sind[36]). Wir heben hervor die von je $2n-m-1$ und $n-m$ wesentlichen (nicht homogenen) Parametern abhängigen Gruppen

$$(55) \qquad x' = axb, \quad x' = b^{-1}xb,$$

wobei m die Zahl der linear-unabhängigen Grössen des betrachteten Systems ist, die mit allen übrigen vertauschbar sind. Die zweite dieser Gruppen ist die *adjungierte Gruppe* der $(n-1)$-gliedrigen Gruppen $x' = ax$, $x' = xb$. Bilineare Zusammensetzung der Parameter besteht ferner für die sog. gemischten Gruppen, die aus den Gruppen (55) durch Hinzufügung der Transformation $x' = x^{-1}$ hervorgehen, sobald der Rang des betrachteten Systems complexer Grössen gleich zwei ist. Endlich gehören hierher auch die unter (53) aufgeführten Gruppen,

37) Ob *jede* continuierliche Gruppe auf diese Weise dargestellt werden kann, hängt von der Entscheidung der noch offenen Frage ab, ob es projektive Gruppen von jeder beliebigen Zusammensetzung giebt.

wie man erkennt, wenn man die letzte $(3n-m)$-gliedrige Gruppe in einer der beiden Formen

(56) $$x' = \alpha^{-1}(x\beta + \gamma), \quad x' = (\alpha x + \beta)\gamma^{-1}$$

schreibt, ferner die aus einem System mit commutativer Multiplikation abgeleitete $3n$-gliedrige Gruppe

(57) $$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \text{ —}$$

Unter die zuletzt angestellten Betrachtungen subsumieren sich eine Reihe von Anwendungen, die man von speciellen Systemen complexer Grössen gemacht hat.

Identificiert man das zu Grunde gelegte System complexer Grössen mit dem System der *Hamiltonschen Quaternionen* (34, VIa), so sind die beiden Gruppen $x' = ax$ und $x' = xb$ dreigliedrig, und können gedeutet werden als die beiden Gruppen collinearer Transformationen des Raumes, die die eine oder andere Schaar von Erzeugenden der imaginären, aber zu einem reellen Polarsystem gehörigen Fläche 2. Grades

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

in Ruhe lassen [III C 4], oder auch als die beiden Gruppen sogenannter *Schiebungen* eines Nicht-Euclidischen („elliptischen“) Raumes [III A 1]; die sechsgliedrige gemischte Gruppe $x' = axb$, $x' = ax^{-1}b$ umfasst alle eigentlichen und uneigentlichen collinearen Transformationen, die die genannte Fläche in sich selbst überführen, oder die Gesamtheit der *Bewegungen* und sog. *Umlegungen* (Transformationen mit symmetrischer Gleichheit aller Figuren) des genannten Raumes. Die dreigliedrige gemischte Gruppe $x' = a^{-1}xa$, $x' = a^{-1}x^{-1}a$ endlich besteht aus allen den collinearen Transformationen der genannten Fläche, die den Punkt allgemeiner Lage $x = e_0$ in Ruhe lassen; $x' = a^{-1}xa$ ist also bei der zweiten Auffassung die Gruppe aller *Drehungen* um einen festen Punkt des Nicht-Euklidischen Raumes[38]). Dieselben Transformationsformeln $x' = a^{-1}xa$ und $x' = a^{-1}x^{-1}a$ lassen sich aber, bei Deutung der Quotienten $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{x_2}{x_0}$, $\frac{x_3}{x_0}$ als rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten, auch auffassen als analytische Darstellung der Drehungen und Umlegungen um einen festen Punkt des gewöhnlichen (Euklidischen) Raumes; sie decken sich vollständig mit den von *Euler* angegebenen Formeln zur Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme, während die zur Zusammensetzung der

38) Z. T. nach *Cayley*, J. f. Math. 50 (1855), p. 312 = Coll. Math. Papers 2, p. 214. Vgl. auch *F. Klein*, Math. Ann. 37 (1890), p. 544.

Parameter der Gruppe $x' = a^{-1}xa$ dienende Gleichung $a'' = aa'$ — das sogenannte Multiplikationstheorem der Quaternionen — mit den von *O. Rodrigues* angegebenen Formeln zur Zusammensetzung der *Euler*'schen Parameter identisch ist[39]).

In den verschiedenen Lehrbüchern der Quaternionentheorie kommen die besprochenen gruppentheoretischen Thatsachen gar nicht oder nur in unvollkommener Weise zum Ausdruck. Es muss daher hervorgehoben werden, dass die Brauchbarkeit der Quaternionen für Zwecke der Geometrie und mathematischen Physik auf eben diesen Thatsachen und auf der Bedeutung beruht, die namentlich der Gruppe der (Euklidischen) Drehungen um einen festen Punkt bei vielen Untersuchungen zukommt[40]). Wo die genannten Gruppen, oder mit ihnen isomorphe Gruppen nicht auftreten, da können auch die Quaternionen nur geringen Nutzen bringen; und hierin liegt der Grund dafür, warum gewisse Anwendungen des Quaternionencalcüls (z. B. die auf die Geometrie der Kegelschnitte) einen etwas gekünstelten Eindruck machen und zu wenig befriedigenden Ergebnissen geführt haben. Allgemein lässt sich sagen, dass das Anwendungsgebiet der Systeme höherer complexer Grössen ziemlich beschränkt ist.

Von ferneren geometrischen Anwendungen von Systemen complexer Grössen erwähnen wir eine Darstellung der elfgliedrigen continuierlichen Gruppe der eigentlichen Ähnlichkeitstransformationen in einem vierfach ausgedehnten Raume durch die Formeln (56) mit Hülfe der Quaternionen[41]), die Darstellung der sog. gemischten Gruppe der Bewegungen und Umlegungen in der Euklidischen Ebene wie auch im Raume durch Parameter mit bilinearer Zusammensetzung[41]), endlich eine Untersuchung von *R. Lipschitz* über die lineare Transformation einer Summe von n Quadraten in ein Vielfaches ihrer selbst[42]). Die zuletzt genannten Transformationen bilden eine bei ungeraden Werten von n continuierliche, bei geraden Werten von n aus zwei continuierlichen Schaaren bestehende (also „gemischte") Gruppe, deren allgemeine Transformation von $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ homogen auftretenden Parametern abhängt [III C 7]. *Lipschitz* gelangt, unter Verwendung über-

39) *Euler,* Novi Comm. Petrop. 20, p. 217. *O. Rodrigues,* Journ. de Math. 5 (1840), p. 380. *Cayley,* Phil. Mag. 26 (1845), p. 141 = Coll. Math. Pap. 1, p. 123.

40) S. die genauere Formulierung bei *Study,* Math. Papers from the Chicago Congress, New York 1896, p. 376. Vgl. auch *H. Burkhardt*, „Über Vectoranalysis", Deutsche Math.-Vrg. 5 (1896), p. 43, sowie *Klein* und *Sommerfeld,* Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, I § 7.

41) Chicago Papers a. a. O. *Study,* Math. Ann. 39 (1891), p. 514.

42) Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn 1886. Vgl. Nr. 14.

zähliger Parameter, zu einer Darstellung sämtlicher Transformationen der genannten Gruppe durch Parameter mit bilinearer Zusammensetzung, indem er von gewissen Systemen complexer Grössen ausgeht, die, als Verallgemeinerungen der Quaternionen, bereits von *Clifford* aufgestellt worden waren[43]). Das erste dieser Systeme wird von 2^n Einheiten $\iota_\alpha, \iota_{\alpha\beta}, \iota_{\alpha\beta\gamma}\ldots$ gebildet; es ist, wenn die Haupteinheit mit ι_0 bezeichnet wird, definiert durch die Multiplikationsregeln

$$(58)\qquad \begin{gathered} \iota_1^2 = \iota_2^2 = \cdots = \iota_n^2 = -\iota_0, \quad \iota_\alpha\iota_\beta = -\iota_\beta\iota_\alpha = \iota_{\alpha\beta}, \\ \iota_{\alpha\beta}\iota_\gamma = \iota_\alpha\iota_{\beta\gamma} = \iota_{\alpha\beta\gamma}, \quad \ldots, \quad \iota_1\iota_2\iota_3\ldots\iota_n = \iota_{123\ldots n} \\ (\alpha \mp \beta \mp \gamma \mp \cdots); \end{gathered}$$

das zweite, in der genannten Untersuchung verwendete (von dem ersten übrigens nur durch die Zahl der Einheiten und die Wahl der Basis unterschiedene) System mit einer 2^{n-1} Einheiten umfassenden Basis besteht aus ι_0 und den eine gerade Anzahl von Indices ($\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma\delta$, ...) tragenden Einheiten des ersten Systems.

Die zur linearen Transformation einer Summe von n Quadraten in ein Vielfaches ihrer selbst dienenden Formeln sind, abgesehen von einer wie es scheint unvermeidlichen Unsymmetrie, vollkommen analog der von uns schon besprochenen Lösung des Problems in den Fällen $n=3$ und $n=4$; sie zeigen überdies, wie man alle solchen Transformationen mit rationalen Zahlencoefficienten finden kann.

13. Klassifikation der Systeme complexer Grössen. Den Zusammenhang der Systeme complexer Grössen mit der Theorie der Transformationsgruppen haben *G. Scheffers*[44]) und *Th. Molien*[45]) zur Klassifikation der genannten Systeme benutzt. *Scheffers* teilt, an Sätze von *Lie* und *Engel* anknüpfend, die Systeme complexer Grössen in „*Nicht-Quaternionsysteme*“ und „*Quaternionsysteme*“. Bei den Systemen der ersten Klasse lassen sich die n Einheiten einer geeigneten Basis auf zwei Gruppen $e_1 \ldots e_r$, $\eta_1 \ldots \eta_s$ $(r+s=n)$ verteilen, derart, dass $e_i^2 = e_i$, $e_i e_\varkappa = 0$ ist, dass das Produkt von irgend zweien

43) Am. J. of Math. 1 (1878), p. 350 = Coll. Papers (London 1882) Nr. 30, wo bereits die Entstehung der obigen Systeme durch den in Nr. 8 besprochenen Multiplikationsprocess angegeben wird. S. auch Coll. Papers Nr. 43. Neuerdings ist auch *R. Beez* auf diese Systeme gekommen in einer leider verschiedenes Irrtümliche enthaltenden Arbeit: Z. f. Math. u. Phys., Jahrg. 41 (1896), p. 35, 65.

44) Math. Ann. 39 (1891), p. 293; 41 (1893), p. 601.

45) Über Systeme höherer complexer Zahlen. Diss. Dorpat = Math. Ann. 41 (1893), p. 83; ebenda 42 (1893), p. 308. Vgl. ferner Dorp. Ber. 1897, p. 259. Der letzte Aufsatz enthält eine Anwendung der Systeme complexer Grössen auf die Theorie gewisser Gruppen von *discreten* linearen Transformationen.

der Einheiten η nur von den Einheiten η mit höherem Index abhängt, und dass alle Produkte der Einheiten e_i mit einer Einheit η_j Null sind, mit Ausnahme von zweien, für die man $e_\varkappa \eta_j = \eta_j e_\varkappa = \eta_j$ hat. Bei allen diesen Systemen, und bei ihnen allein, sind die Wurzeln der Ranggleichung lineare Funktionen der Coordinaten einer Grösse des Systems[46]). Die Quaternionsysteme lassen sich, wie indessen erst durch *Molien* klar gestellt worden ist, so schreiben, dass das System der *Hamilton*'schen Quaternionen (34, VIa oder VIb) unter den Einheiten der Basis vorkommt. Zu ihnen gehören fast alle die Systeme, die in den unter Nr. **12** besprochenen Anwendungen hervorgetreten sind. Alle Quaternionsysteme, die die Quaternionen so enthalten, dass die Haupteinheit der Quaternionen zugleich Haupteinheit des Gesamtsystems ist, gehen nach *Scheffers* aus den *Hamilton*'schen Quaternionen durch „Multiplikation" (s. oben unter Nr. 8) mit irgend einem anderen System complexer Grössen hervor. Anwendungen dieser Theorie bilden die Bestimmung aller Typen von Systemen complexer Grössen mit n Einheiten, deren Rang gleich zwei oder gleich $n-1$ ist, und im wesentlichen auch derer, deren Rang gleich $n-2$ ist, und insbesondere die Bestimmung aller *Typen von Systemen mit fünf Einheiten*[47]), ferner die Bestimmung aller Quaternionsysteme bis zu *acht* Einheiten. Es giebt bei vier und sieben Einheiten je ein irreducibeles System dieser Art, und bei acht Einheiten drei, darunter ein schon von *Clifford* angegebenes System[48]), eine von dessen verschiedenen Arten von *Biquaternionen*, dasselbe System, das zur Parameterdarstellung der Bewegungen im Euklidischen Raume dient[41]).

Molien führt eine Reihe neuer Begriffe ein, von denen wir nur einige der wichtigsten anführen können, darunter den des *begleitenden Systems* eines gegebenen. Ein solches wird von den Einheiten $e_1 \dots e_r$ einer geeignet gewählten Basis $(e_1 \dots e_r \dots e_n)$ gebildet, wenn die Produkte $e_i e_\varkappa$ für $i, \varkappa \leq r$ sich durch $e_1 \dots e_r$ selbst ausdrücken lassen, alle anderen Produkte zweier Einheiten aber durch $e_{r+1} \dots e_n$. Hat ein System complexer Grössen kein kleineres begleitendes System, so heisst es *„ursprünglich"*. *Alle ursprünglichen Systeme werden durch die unter*

46) Der Satz umfasst den unter Nr. **11** angeführten Satz von *Frobenius* (s. Anm. 31). *Scheffers* benutzt jedoch nicht ausschliesslich algebraische Hülfsmittel.

47) Die vom Range zwei und vier sind auch von *H. Rohr* angegeben worden: Über die aus 5 Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme. Diss. Marburg 1890.

48) Lond. Math. Proc. 4 (1873), p. 381 = Coll. Papers, London 1882 Nr. 20; ebenda Nr. 42.

Nr. **10** *betrachteten Systeme mit* n^2 *Einheiten erschöpft.* Darin liegt zugleich der gruppentheoretische Satz, dass diese Systeme die einzigen sind, deren entsprechende (im vorliegenden Falle $(n^2 - 1)$-gliedrige) Gruppen $x' = ax$, $x' = xb$ *einfach* sind [II A 6]. Allgemein lässt sich die Basis so wählen, dass als begleitende Systeme μ von einander unabhängige ursprüngliche Systeme auftreten, die zusammengenommen ein μ irreducibele Bestandteile enthaltendes (also, wenn $\mu > 1$, reducibeles) begleitendes System bilden.

Verwandten und zum Teil desselben Inhalts ist eine Untersuchung von *E. Cartan*, über die zur Zeit nur vorläufige Mitteilungen (ohne Beweise) vorliegen[49]). Wir heben daraus hervor die Bestimmung aller *Gestalten* ursprünglicher Systeme. Nur die mit $4m^2$ Einheiten haben — so lässt sich *Cartan's* Behauptung ausdrücken — mehrere reelle Gestalten, und zwar zwei verschiedene. Die eine ist die uns schon bekannte (40), die andere wird erhalten, wenn man das System (40) mit m^2 Einheiten bildet, und es mit den *Hamilton*'schen Quaternionen (VIa) „multipliciert" (s. Nr. 8). Zu den „ursprünglichen" Systemen *Molien's* kommen bei Beschränkung auf reelle Systeme noch andere, die man als reell-ursprüngliche Systeme bezeichnen könnte, Systeme ohne *reelle* begleitende Systeme. Diese werden nach *Cartan* von $2n^2$ Einheiten gebildet; sie werden erhalten, wenn man die Systeme (40) mit dem reellen System der gewöhnlichen complexen Grössen multipliciert. Die Gesamtheit aller reell-ursprünglichen Systeme entsteht also, nach *Cartan*, wenn man die Reihe der Systeme (40) erstens mit dem aus einer Einheit bestehenden System, zweitens mit dem System der gemeinen complexen Grössen, drittens mit den Quaternionen „multipliciert".

14. Ansätze zu einer Functionentheorie und Zahlentheorie der Systeme höherer complexer Grössen. Nur ein sehr bescheidener Anfang liegt vor von Untersuchungen, die eine Ausdehnung von Sätzen der gewöhnlichen Funktionentheorie [II B 1; vgl. II A 7b] auf beliebige Systeme complexer Grössen zum Ziel haben. *Ed. Weyr* hat die Bedingung dafür angegeben, dass eine Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ convergiert, in der die Coefficienten a_ν gewöhnliche complexe Grössen sind, x aber eine Grösse eines beliebigen Systems bedeutet. Er findet, dass die Wurzeln $r_\varkappa$ der charakteristischen Gleichung (46) dem Convergenzgebiete der gewöhnlichen Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ angehören müssen[50]). *G. Scheffers* hat einige hierher gehörige Betrachtungen über Systeme mit commuta-

49) Par. C. R. vom 31. Mai und 8. Juni 1897.

50) Bull. des Sciences Math. 2me sér. 11 (1887), p. 205.

tiver Multiplikation angestellt[51]). Er gelangt zu einer Definition der „analytischen" Funktionen im Gebiete eines solchen Systems und zur Darstellung dieser Funktionen durch Potenzreihen $f(x) = \sum c_\nu x^\nu$; die Operationen des Differentiierens und Integrierens gestalten sich im wesentlichen wie in der gewöhnlichen Funktionentheorie.

Die Gleichung $x' = f(x)$ definiert eine continuierliche *unendliche Gruppe*, und zwar erhält man auf diese Weise alle solche Gruppen, bei denen die Fortschreitungsrichtungen um einen Punkt „allgemeiner Lage" herum durch eine einfach-transitive (also $(n-1)$-gliedrige) Gruppe von vertauschbaren projektiven Transformationen transformiert werden. Die grössten endlichen continuierlichen Untergruppen einer solchen Gruppe sind die $3n$-gliedrigen Gruppen (57) und die mit ihnen gleichberechtigten.

Auch zu einer *Zahlentheorie* der Systeme complexer Grössen ist erst ein Anfang gemacht. Nur die gerade in dieser Hinsicht einen Ausnahmefall darstellenden Hamilton'schen Quaternionen sind bis jetzt untersucht worden, von *Lipschitz*[42]), und — eingehender und auf anderer Grundlage — von *Hurwitz*[52]) (I C).

Nachtrag. Aus Aufzeichnungen, die sich im Nachlass von *Gauss* vorgefunden haben, geht hervor, dass er im Jahre 1819 oder 1820 schon im Besitz der *Hamilton*'schen Quaternionen und ihrer Anwendung zur Darstellung und Zusammensetzung der Drehungen (und Ähnlichkeitstransformationen) um einen festen Punkt gewesen ist, und dass er auch das Multiplikationstheorem der Quaternionen schon in Gestalt eines Produkts

$$(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD)$$

geschrieben hat. S. Gött. Nachr. 1898, p. 8, und ebenda *F. Klein*: Geschäftliche Mittheilungen p. 3.

51) Leipz. Ber. 1893, p. 828; 1894, p. 120.
52) Gött. Nachr. 1896, p. 314.