I D 4 b. LEBENSVERSICHERUNGS-MATHEMATIK

VON

G. BOHLMANN

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur[1].

I. Kataloge. Encyklopädien.

Catalogue, Bibliothèque de l'Utrecht. 1. Ausg. Utrecht 1885. 4. Ausg. 1898.

Catalogue of the library of the institute of actuaries, London. Edinburgh 1894.

Insurance and actuarial society of Glasgow. Catalogue of books in library. Glasgow 1896.

Catalogue of the library of the faculty of actuaries in Scotland. Edinburgh 1899.

C. Walford, The insurance cyclopaedia. 1—5; 6, Heft 1; A — hereditary. London 1871—80.

II. Sterblichkeitstafeln[2].

Tables exhibiting the law of mortality deduced from the combined experience of 17 life assurance offices, London 1843 [17 E. G.].

The mortality experience of life assurance companies, collected by the institute of actuaries, London 1869 [20 E. G.].

Combined experience of assured lives (1863—1893), collected by the institute of actuaries and the faculty of actuaries in Scotland, London 1900. [Assured lives]. — Bd. 1. Whole-life assurances, males; Bd. 2. Whole-life assurances, females; Bd. 3. Endowment assurances and minor classes of assurance, male and female.

---

1) Die Versicherungslitteratur ist auf den meisten Bibliotheken nur sehr wenig vertreten. Viele Werke sind im Buchhandel vollständig vergriffen. Referent wurde durch das Entgegenkommen der Bibliothek der Lebensversicherungsgesellschaft „Utrecht" in Utrecht und der Kommerzbibliothek in Hamburg in dankenswertester Weise unterstützt. Das hier gegebene, so kurz wie möglich gefasste, Litteraturverzeichnis berücksichtigt nur die mathematischen Interessen; rein statistische Werke sind, soweit sie für den Mathematiker in Betracht kommen, in der Regel in den Anmerkungen an den einschlägigen Stellen angeführt. Vollständigere Litteraturzusammenstellungen geben die angeführten Kataloge und diejenigen der Kommerzbibliothek in Hamburg, deren Hauptkatalog von 1864 bis in die neueste Zeit fortgesetzt ist. Im Besonderen enthält der Katalog von 1900 auf p. 2532—2534 und p. 2541—2542 Bereicherungen.

2) Die den Titeln nachgesetzten eckigen Klammern kürzen die in der Praxis üblichen Benennungen für die einzelnen Tafeln ab. Es bedeutet:

17 E. G.	Tafeln der 17 englischen Gesellschaften,
20 E. G.	„ „ 20 „ „ ,
A. St.	Amerikanische Sterbetafel,
30 A. G.	Tafeln der 30 amerikanischen Gesellschaften,
23 D. G.	„ „ 23 deutschen „
4 F. G.	„ „ 4 französischen „ .

Die deutschen Lebensversicherungsgesellschaften legen ihrem normalen Todesfallgeschäft heutzutage die Tafeln der 17 E. G., die Tafeln M I der 23 D. G. oder andere hier nicht aufgeführte Tafeln zu Grunde. Vgl. *J. Neumann*, Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen, Berlin 1900, p. 487. Wegen Beurteilung der Tafeln vgl. Artikel I D 4 a, Nr. 8—11 und *E. Roghé*, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Neue Folge. Supplementheft 18 (1891).

Sh. Homans, Report exhibiting the experience of the Mutual Life Insurance Company of New York. New York (frühere Ausg. 1859). 1868 [A. St.].

Später:

W. Bartlett, On the mortality experience of the Mutual Life Insurance Company of New York. New York 1875.

L. W. Meech, System and tables of life insurance, Norwich, Conn. 1881. [30 A. G.]

A. Emminghaus, Mitteilungen aus der Geschäfts- und Sterblichkeitsstatistik der Lebensversicherungsbank für Deutschland zu Gotha. Gotha 1878. [Gothaer Sterbetafel.]

Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Kollegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin. Berlin 1883 [23 D. G.].

Tables de mortalité du comité des compagnies d'assurances à primes fixes sur la vie. Paris 1895 [4 F. G.].

Weitere Litteratur s. *C. Landré*, Mathem. techn. Kap. (s. Litt.-Verz. IV), p. 70, wo man auch Sterblichkeitstafeln für ganze Bevölkerungen angegeben findet. Die hier gegebene Zusammenstellung beschränkt sich auf normale Risiken einer Lebensversicherungsgesellschaft. Wegen Extrarisiken, im Besondern Rentnersterbetafeln vergleiche Nr. **5** dieses Berichtes.

III. Versicherungstechnische Hülfstafeln.

Zu 17 E. G. The principles and practice of life insurance. 1. Ausg. v. *N. Willey*, New York and Chicago 1872. 6. Aufl. 1892. — 4%.

Zu 20 E. G. Tables deduced from the mortality experience of life assurance companies, collected by the institute of actuaries. London 1872. — 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6%.

T. B. Sprague, Select life tables, London 1896. — $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4%.

R. P. Hardy, Valuation tables, London 1873. — 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$%.

F. J. C. Taylor, Tables of annuities and premiums. London 1884. — $3\frac{1}{4}$%. Schlusstabellen in: Institute of actuaries textbook, part II (siehe unter IV). — 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6%.

G. King and *W. J. H. Whittall*, Valuation and other tables. London 1894. — $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4%.

W. A. Bowser, Valuation tables. London 1895. — $3\frac{3}{4}$%.

E. Colquhoun, Valuation and other tables. London 1899. — $2\frac{1}{4}$%, $2\frac{3}{4}$%.

Zu A. St. The principles (s. o.) — 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$%.

Zu 30 A. G. L. W. Meech, System and tables of life insurance. — 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6, 7, 8, 9, 10%.

Zu 4 F. G. Tables de mortalité (s. o.). — $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, 4%. (Leider nicht nach Geschlechtern getrennt.)

Zu 23 D. G. J. Riem, Nettorechnungen auf Grund von Dr. Zillmer's ausgeglichener Sterbetafel der 23 deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften für normal versicherte Männer und Frauen, Basel 1898 (Preis 332 Mark!).

Für jede Sterbetafel: W. Orchard, Single and annual premiums. London 1850, 1856; *James Chisholm*, Tables for finding the values of policies. London 1885.

Weitere Litteratur findet man in den Anmerkungen zu den Nrn. **4, 5, 13.**

IV. Lehrbücher.

A. Zillmer, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. Berlin 1861. 2. verm. Aufl. 1887.
W. Karup, Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. Leipzig 1871, 1874, 1885.
E. Dormoy, Théorie mathématique des assurances sur la vie. 2. Paris 1878.
Institute of actuaries' textbook, part II, life contingencies, by *G. King*. London 1887, neue Ausgabe in Vorbereitung; dasselbe französisch:
Textbook de l'institut des actuaires de Londres, 2ième partie, opérations viagères. Brüssel, Paris, London 1894.
C. Landré, Wiskundige hoofdstukken voor levensverzekering. Utrecht 1893. Dasselbe deutsch mit Verbesserungen und Zusätzen:
C. Landré, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. Jena 1895.
H. Laurent, Théorie et pratique des assurances sur la vie, Paris 1896.
M. Cantor, Politische Arithmetik. Leipzig 1898.
H. Poterin du Motel, Théorie des assurances sur la vie. Paris 1899.

V. Aufgabensammlungen.

Th. G. Ackland and *G. F. Hardy*, Graduated exercises, with solutions. Part. II, London 1889.
J. Thannabaur, Berechnungen von Renten und Lebensversicherungen. Wien 1893.

VI. Monographien.

C. Bremiker, Das Risiko bei Lebensversicherungen. Berlin 1859.
A. Zillmer, Beiträge zur Theorie der Prämienreserve. Stettin 1863.
W. S. B. Woolhouse, On interpolation, summation and the adjustment of numerical tables. London 1865.
Th. Wittstein, Mathematische Statistik. Hannover 1867.
W. Lazarus, Über Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen. Hamburg 1867.
T. B. Sprague, A treatise on life insurance accounts. London 1874.
Th. Wittstein, Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften. Hannover 1885.
J. P. Janse, Over de constructie en afronding van sterftetafels. Diss. Amsterdam 1885.
C. Kihm, Die Gewinnsysteme mit steigenden Dividenden. Zürich 1886.
L. Lindelöf, Statistik undersökning af tillståndet i folkskollärarenes i Finland enke—och pupillkassa. Helsingfors 1890, 1893.
L. Lindelöf, Statistisk undersökning af ställningen i finska skolstatens pensionskassa. Helsingfors 1892.
E. Blaschke, Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen. Wien 1893.
J. Karup, Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener - Wittwen - Societät. Dresden 1893.
E. Blaschke, Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben. Wien 1895.
L. Lindelöf, Ställningen i finska civilstatens enke—och pupillkassa. Helsingfors 1896.
H. Onnen, Het maximum van verzekerd bedrag. Diss. Utrecht 1896.
M. Kehm, Über die Versicherung minderwertiger Leben. Jena 1897.

J. H. Peek, Toepassing der Waarschijnlijkheids-Rekening op Levensverzekering en Sterfte-Statistiek, Diss. Utrecht 1898.
Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas publiés par la société générale Néerlandaise d'assurances sur la vie. Amsterdam 1898.
K. Wagner, Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Jena 1898.
J. Karup, Die Reform des Beamtenpensionsinstituts der Mitglieder des Assekuranzvereins von Zuckerfabriken. Prag 1898.

Weitere Litteratur an den einschlägigen Stellen dieses Referates, deutsche speziell bei *K. Wagner* a. a. O., schwedische besonders in den Fortschritten der Mathematik.

Nur selbständig erschienene Schriften sind hier aufgeführt.

VII. Zeitschriften.

The assurance magazine Bd. 1—2. London 1850—52; fortgesetzt unter den Titeln: The assurance magazine and journal of the institute of actuaries. Bd. 3—12, London 1853—1866. Journal of the institute of actuaries. Bd. 13. London 1866—67. Journal of the institute of actuaries and assurance magazine. Bd. 14—24, London 1867—1884, Journal of the institute of actuaries. Bd. 25 ff., London 1884 ff. [Lond. Journal inst. act.].
Journal des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft 1. 2. Berlin 1870. 71. [Berl. Journal Kolleg. Lebensv.].
Journal des actuaires français. 1—9. Paris 1872—80. [Par. Journal act. franç.]
Assecuranz-Jahrbuch, her. v. *A. Ehrenzweig*, Wien 1880 ff. [Ehrenzweig].
Edinburgh, Transactions of the actuarial society, Edinburgh (1859 ff.), new series 1886 ff. [Edinburgh act. soc.].
Archief voor politieke en sociale rekenkunde, her. v. *D. Samot*, s' Gravenhage 1886—88. [Archief polit. rek.].
Bulletin trimestriel de l'institut des actuaires français, Paris 1891 ff. [Par. Bulletin. inst. act].
New-York, Papers and transactions of the actuarial society of America. New-York 1889 ff. [N. Y. Am. act. soc.].
Archief voor de verzekeringswetenschap, uitgegeven door de vereeniging van wiskundige-adviseurs. 's Gravenhage 1895 ff. [Archief verzekeringswet.].
Verhandlungen der internationalen Kongresse der Actuare: Premier congrès international d'actuaires. Documents. Bruxelles 1896. [Brüssel, Intern. Kongr.].
Transactions of the second international actuarial congress, London 1899. [London, Intern. Kongr.].
Die Verhandlungen des dritten Kongresses in Paris 1900 befinden sich im Druck.
Mitteilungen des Verbandes der österreichischen und ungarischen Versicherungstechniker, Heft I ff. Teschen, Wien 1899 ff.

Andere Fachzeitschriften, die vorwiegend den nichtmathematischen Interessen gewidmet sind, findet man in den angeführten Katalogen. Neugegründet ist die Zeitschrift:

Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, herausgegeben vom Deutschen Verein für Versicherungswissenschaft. 1, Heft 1 u. 2. Berlin 1901. [Berl. Zeitschrift vom Deutsch. Verein f. Versicherungswissensch.].

Zeitschriften allgemein mathematischen Charakters, die öfter versicherungsmathematische Arbeiten enthalten, sind: Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 1856 ff.; Hamburg, Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft 1873 ff.; Acta mathematica, Berlin-Paris-Stockholm 1882 ff.; Paris, Comptes rendus de l'académie des sciences 1835 ff.; Tidskrift for Matematik og Fysik, 3 Raekke, Kjöbenhavn 1871 ff.; Acta societatis scient. fennicae, Helsingfors 1870 ff.; Öfversigt af Finska Vet.-Soc. Förhandlingar, Helsingfors 1838 ff.; Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm 1845 ff.

I. Grundlagen.

1. Verhältnis der Lebensversicherung zu anderen Versicherungen. Es giebt keine mathematische Theorie des Versicherungswesens im allgemeinen. Von den vielen verschiedenen Versicherungsarten, die heutzutage betrieben werden, besitzt nur die Lebensversicherung eine ziemlich durchgearbeitete, in langjähriger Praxis erprobte, mathematische Grundlage. Bei der Invaliditäts-, Unfall- und Krankenversicherung[3]) sind die Anfänge zu einer solchen vorhanden. Im

---

3) *Invaliditätsversicherung:*

Deutschland: A. Wiegand, Die Sterblichkeits-, Invaliditäts- und Krankheitsverhältnisse bei Eisenbahnbeamten in den Jahren 1868—69. Berl. Journal Koll. Lebensvers. 2 (1871), p. 67. Vgl. auch I D 4 a, Fussnote 56. Fortsetzung davon: *G. Behm*, Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- u. Morbiditätsverhältnisse, Berlin 1876—1885. Fortsetzung davon: *H. Zimmermann*, Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse, Berlin 1886—1889. Fortsetzung davon: *A. Zillmer*, Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik, Berlin 1890. Stenographische Berichte über die Verhandlungen des Reichstags, 7. Legisl.-Per. IV. Session, Berlin 1888/89, Nr. 141, Beilage 1, p. 1094, Nr. 230, p. 1436. — 9. Legisl.-Per. IV. Session, Berlin 1895/97. Zu Nr. 696 p. 265 (nicht veröffentlicht). — 10. Legisl.-Per. I. Session, Berlin 1898/1900, Anlage Bd. I Nr. 93, p. 759; *O. Dietrichkeit*, Fundamentalzahlen. Elberfeld 1894. $3\frac{1}{2}\,\%$; *G. Friedrich*, Mathematische Theorie der reichsgesetzlichen Invaliditäts- und Altersversicherung, Leipzig 1895; *L. von Bortkiewicz*, Zeitschrift für Versicherungsrecht und -Wissenschaft 5 (1899), p. 563; *M. Gerecke*, Berl. Zeitschrift vom deutschen Verein für Versicherungswissensch. 1 (1901), p. 67.

Österreich: A. Caron, Die Berechnung der Beiträge bei der obligatorischen Arbeiterversicherung, Berlin 1881; *A. Caron*, Die Reform des Knappschaftswesens und die allgemeine Arbeiterversicherung, Berlin 1882; *J. Kaan*, Anleitung zur Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien, Wien 1888; *Ph. Falkowicz*, Der Pensionsfonds, Prag 1892.

Schweden: Arbetareförsäkringskomiténs betänkande, I. II. III., Stockholm 1888—1889; Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande I—IV, Stockholm 1892—1893; Kongl. Maj:ts nådiga proposition till Riksdagen No: 22, Bih. till Riksd. Prot., Stockholm 1895, 1 Saml., 1 Afd., 16 Häft; Kongl. Maj:ts nådiga proposition till Riksdagen No: 55, Bih. till Riksd. Prot., Stockholm 1898, 1 Saml. 1 Afd., 35 Häft.

Norwegen: Statistiske Oplysninger om Alders—og Indtaegtsforholde, Socialstatistik, Bind II, Bilag til den parlamentariske Arbeiderkommissions Indstilling, übrigen[4]) herrscht in den Kreisen der Praktiker vielfach die Ansicht, dass für die meisten anderen Versicherungszweige eine mathematische Theorie nicht nur entbehrlich, sondern auch geradezu unmöglich ist. Zugegeben kann werden: 1) Abgesehen von den eben genannten Versicherungen hat es für den Theoretiker grosse Schwierigkeiten, sich das für ihn erforderliche Material zu beschaffen. 2) Ohne eingehende statistische Unterlagen eine mathematische Behandlung des Versicherungswesens oder einzelner Gebiete desselben auf Grund eines universellen Wahrscheinlichkeitsschemas zu versuchen, wäre ein Unter-

---

Kristiania 1897; *E. Hanssen,* Statistiske Oplysninger om Invaliditetsforholde. Socialstatistik, Bind IV[2], Kristiania 1900.

Unfall- und Krankenversicherung: K. Heym, Die Kranken- und Invalidenversicherung, Leipzig 1863; *G. Zeuner,* Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. III. Unfallversicherung, Leipzig 1869; *K. Heym,* Anzahl und Dauer der Krankheiten, Leipzig 1878; *G. Behm*, Denkschrift betr. die Gefahrenklassen, Anlage zur Begründung eines Gesetzentwurfes betr. die Unfallversicherung. Stenogr. Berichte über die Verhandlungen des Reichstages. 5. Legisl.-Per. II. Session 1882/83. Bd. V, Nr. 19 Anlagen, p. 214; *A. Hazeland,* Statistiske Undersøgelser angaaende Ulykkestilfaelde under Arbeide i Aarene 1885 og 1886, Bilag til Arbeiderkommissionens Indstilling III, Kristiania 1889; *G. Friedrich*, Die berufsgenossenschaftlichen Gefahrentarife und ihr Genauigkeitsgrad. Ehrenzweig 12 (1891), Teil 2, p. 69; *A. Hazeland,* Forslag til Lov om Arbeideres Sygeforsikring, Arbeiderkommissionens Indstilling II, Kristiania 1892; *C. Moser,* Denkschrift über die Höhe der finanziellen Belastung betr. die Krankenversicherung, Bern 1893. Zweite Aufl. 1895; *C. Moser*, Versicherungstechnische Untersuchungen über die eidgenöss. Unfallversicherung, Bern 1895; *W. Sutton,* Sickness and mortality experience made by friendly societies, for the years 1856—1880, ordered by the House of Commons to be printed, London 1896. $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4%; *F. G. Hardy*, A treatise on friendly society valuations with tables, London. $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4% (im Druck); *W. A. Bowser*, Friendly societies' valuation and other tables, London 1896. Kapitaldeckung und Umlage bei der Arbeiter-Unfallversicherung in Österreich, herausgegeben vom Vorstande der Arbeiter-Unfallversicherungsanstalt für Niederösterreich, Wien 1899.

Im übrigen sei auf die Referate des 3. internationalen Kongresses der Aktuare in Paris (Litt.-Verz. VII), die Fortschritte der Mathematik und die Publikationen verwiesen:

Deutschland, Amtliche Nachrichten des Reichsversicherungsamtes, Berlin 1885 ff.
Schweden, Registrerade sjukkassors verksamhet, Stockholm 1892 ff.
Österreich, Amtliche Nachrichten des k. k. Ministeriums des Innern, betr. die Unfall- und Krankenvers. der Arbeiter, Wien 1888 ff.
Norwegen, Beretning fra Rigsforsikringsanstalten, Kristiania 1897 ff.

4) Eine Übersicht über das gesamte Versicherungswesen geben: *A. Chaufton*, Les assurances, 2. Paris 1884/86; *H.* u. *K. Brämer*, Das Versicherungswesen, Leipzig 1894. Eine Geschichte des Versicherungswesens zu geben sucht: *G. Hamon*, Histoire générale de l'assurance. Paris, ohne Jahr.

nehmen, das weder bei den Theoretikern, noch bei den Praktikern jetzt noch auf Interesse rechnen könnte. Das Referat beschränkt sich daher auf die Lebensversicherung und verweist den Leser im übrigen auf die in den Fussnoten dieser Nummer genannten Werke. Nur ausnahmsweise werden zum Vergleiche auch andere Versicherungsarten herangezogen.

2. Hypothesen, auf denen die Theorie beruht. Die mathematische Grundlage der Lebensversicherungsmathematik bildet die Wahrscheinlichkeitsrechnung[5]). Die zum Aufbau der Theorie erforderlichen Definitionen, Sätze und Axiome zerfallen in 2 Gruppen, allgemeine und spezielle. Sie lauten:

a. Axiome etc. aus der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung [I D 1, Nr. 2, 3, 4].

Definition I. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis E eintritt, ist ein positiver echter Bruch p, der E zugeordnet ist.

Axiom I. Ist E gewiss, so ist $p = 1$. Ist E unmöglich, so ist $p = 0$.

Definition II. Zwei Ereignisse schliessen sich aus, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sowohl E_1 als E_2 eintritt, gleich 0 ist[6]).

Axiom II. Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit, dass E_1, p_2 die, dass E_2, p die, dass eines der beiden Ereignisse E_1 oder E_2 eintritt; alsdann ist:

$$p = p_1 + p_2,$$

falls E_1 und E_2 sich ausschliessen.

Axiom III. Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 eintritt, p_2' die, dass E_2 eintritt, wenn man weiss, dass E_1 eingetreten ist, p die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl E_1 als E_2 eintritt. Alsdann ist:

$$p = p_1 p_2'.$$

Definition III. Sei unter sonst gleichen Bezeichnungen wie in Axiom III p_2 die Wahrscheinlichkeit, dass E_2 eintritt. Man sagt, dass E_1 und E_2 von einander unabhängig sind, wenn

$$p = p_1 p_2$$

ist[7]).

---

5) Dagegen *K. Wagner* a. a. O. (Litt.-Verz. VI), p. 154 unten: „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherung haben innerlich nichts miteinander zu schaffen." Zu den Axiomen vgl. *H. Poincaré,* Calcul prob., Paris 1896, p. 12ff.

6) Diese Definition erscheint zweckmässig, im gewöhnlichen Sinne brauchen sich die Ereignisse darum noch nicht auszuschliessen.

7) Mehrere Lebensversicherungsmathematiker bedienen sich auch der *Bayesschen* Regel (I D 1, Nr. 15), so namentlich *W. Lazarus*, Berl. Journal Koll. Lebensvers.

b. Spezielle Axiome etc. für die Sterbenswahrscheinlichkeiten [s. a. I D 4a, Nr. 8—11].

Axiom IV. Sei (x) ein Individuum einer Gesamtheit, das beim Alter x lebt; alsdann wird die Wahrscheinlichkeit, dass (x) beim Alter $x+m$ lebt, durch eine bestimmte Funktion von x und $x+m$, $p(x, x+m)$, gemessen, für alle positiven Werte x und m, die ein gewisses Grenzalter ω, das niemand überlebt, nicht überschreiten.

Axiom V. Sei $p(x, x+m)$ die Wahrscheinlichkeit, dass (x) beim Alter $x+m$, $p'(y, y+n)$ die, dass (y) beim Alter $y+n$ noch lebt. Alsdann sind diese beiden Wahrscheinlichkeiten von einander unabhängig für alle positiven Zahlen x, y, m, n, falls sie sich auf zwei verschiedene Individuen beziehen.

Hieraus folgt die Unabhängigkeit beliebig vieler Sterbens- und Ueberlebenswahrscheinlichkeiten, wenn diese sich auf lauter verschiedene Individuen beziehen.

Definition IV. Eine Gesamtheit Γ von Individuen besteht aus lauter gleichartigen Risiken, wenn für irgend zwei Individuen dieser Gesamtheit:

$$p(x, x+m) = p'(y, y+n)$$

ist, sobald $x = y$, $m = n$ ist.

Satz I. Jede Gesamtheit Γ von gleichartigen Risiken besitzt eine (fingierte) Absterbeordnung, d. h. zu ihr gehört eine Funktion l_x der kontinuierlichen Veränderlichen x, genannt die *Zahl der Lebenden des Alters* x, mit folgenden Eigenschaften[8]):

1) l_x ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt,
2) l_x nimmt mit wachsendem x nicht zu,
3) l_x ist nie negativ,
4) es ist $p(x, x+m) = \dfrac{l_{x+m}}{l_x}$.

3. Prinzipien, nach denen die Theorie auf die Erfahrung angewendet wird. Die Methoden, nach denen man die Axiome etc. der vorigen Nummer auf die Erfahrung anwendet, sind für den speziellen Fall der Sterblichkeitsmessung in Artikel I D 4a II auseinandergesetzt worden. Sie beruhen ebenso wie die Methoden der eigent-

---

1 (1870), p. 78. Ihre Einführung würde ein neues Axiom erforderlich machen. Dies wird hier vermieden durch das Prinzip II und das Postulat der Nr. **3** dieses Artikels.

8) Ursprünglich rechnete man mit der Funktion l_x ganz naiv, indem man — ohne das Bedürfnis einer Begründung zu fühlen — mit ihr wie mit den Zahlen der Lebenden einer wirklichen Generation operierte. Schon *Halley*'s Sterbetafel (1693) schilderte die Sterblichkeit durch die Dekremententafel der Lebenden (I D 4a, Nr. 8).

lichen Lebensversicherungsmathematik auf folgenden allgemeinen Prinzipien:

Prinzip I. Man greift eine gewisse Gesamtheit Γ von Individuen heraus, deren Risiken man als gleichartig postuliert.

Schreibt man für jedes Individuum der Gesamtheit zwei Zeitpunkte vor, zwischen denen es sterben soll, so ist die Wahrscheinlichkeit, die dieser Gruppierung von Todesfällen zukommt, durch die bisherigen Axiome bestimmt, daher auch der wahrscheinliche Wert f^0 irgend einer Funktion f dieser Zeitpunkte und ihre mittlere Abweichung $M(f)$ von ihrem wahrscheinlichen Werte[9]. Man gebraucht nun das

Prinzip II. In erster Annäherung kann man den Wert von f, der der beobachteten Gruppierung der Todesfälle entspricht, mit seinem wahrscheinlichen Werte f^0 identificieren[10].

Hierauf berücksichtigt man, dass der beobachtete Wert f von seinem wahrscheinlichen Werte f^0 im allgemeinen abweicht, schliesst aber Abweichungen von sehr geringer Wahrscheinlichkeit aus durch das:

Postulat. Beobachtet man *einen einzelnen* Wert von f, so weicht dieser von seinem wahrscheinlichen Werte f^0 um nicht mehr als das ν-fache von $M(f)$ ab.

Wie gross man ν wählt, ist willkürlich[11]. Wählt man $\nu = 3$, so identificiert man die praktische Gewissheit mit einer Wahrscheinlichkeit, die jedenfalls grösser als $1 - \frac{1}{\nu^2} = \frac{8}{9}$ ist[12] und gleich $\Theta\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}9973$ ist[13], wenn das *Gauss*'sche Fehlergesetz gilt[14].

9) Wahrscheinlicher Wert = mathematische Hoffnung I D 1, Nr. **16**. Mittlere Abweichung = mittlerer Fehler I D 2, Nr. 8.

10) Alle Lebensversicherungsmathematiker ausser dem Referenten, so *W. Lazarus* a. a. O., p. 79 bei der Sterblichkeitsmessung, *E. Blaschke*, (die Methoden der Ausgl. Litt.-Verz. VI) bei den Ausgleichungsproblemen, gehen von dem *wahrscheinlichsten* Werte aus.

11) *H. Laurent* nennt ν den Sicherheitskoeffizienten (coefficient de sécurité) Par. Journal act. franç. 2 (1873), p. 162.

12) Theorem von *Tschebycheff*, Journ. de math. (2) 12 (1867), p. 183, Zeile 1—6. [I D 1, Nr. **16**, Fussn. 156[a].] Im Wesentlichen dasselbe Theorem wurde später von *P. Pizzetti*, Genova Atti 1892, in einfacherer Form ausgesprochen: Vgl. *E. Czuber*, Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie, p. 154.

13) $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ ist in I D 4a, Nr. **2** mit P_x bezeichnet, das Integral $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$ in I D 2, Nr. **4** mit $\Psi(x)$.

14) Referent gestattet sich die Bezeichnung „Gauss'sches" Fehlergesetz, in-

Unter diese allgemeinen Prinzipien subsumieren sich die in I D 4a bereits gemachten und in diesem Referate noch zu machenden Anwendungen, wie folgt:

1) *Sterblichkeitsmessung* (I D 4a, Nr. 8—**11**). Man setzt f gleich der Anzahl T der Todesfälle in den einzelnen einjährigen Altersklassen und bestimmt so für alle ganzzahligen Werte a die Sterbenswahrscheinlichkeit q_a des a-jährigen (sc. für das $a+1^{\text{te}}$ Lebensjahr) mit ihrem mittleren Fehler.

2) *Theorie der Dispersion* (I D 4a, Nr. **5**—**7**). Man setzt f gleich der „direkt berechneten" mittleren Abweichung der einzelnen Sterbenswahrscheinlichkeiten einer Altersklasse und vergleicht es mit seinem wahrscheinlichen Werte, der „indirekt berechneten" mittleren Abweichung. Sodann setzt man f gleich der relativen Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Intervall von T beobachtet ist und vergleicht diese mit ihrem wahrscheinlichen Werte, der Wahrscheinlichkeit, die diesem Intervalle zukommt.

Die Theorie der Dispersion entscheidet darüber, ob die Hypothesen der Nr. **2** zu Konsequenzen führen, die mit den Beobachtungen übereinstimmen. Für die Verhältnisse der Lebensversicherung trifft dies mit praktisch ausreichender Genauigkeit zu (I D 4a, Nr. **6**, Fussnote 27).

3) *Berechnung der Prämien und Prämienreserven* (Nr. **7**—**13**). Man setzt f gleich der Einzahlung, die der Versicherte für seine Versicherung leisten müsste, wenn man den Zeitpunkt seines Todes kennte. Die wirklich von ihm geforderte Einzahlung (*Prämie*) ist, wenn sie auf einmal und sofort gezahlt wird (*einmalige Prämie*), der wahrscheinliche Wert von f. Die *terminlichen* (jährliche, halbjährliche u. s. w.) *Prämien* werden so bemessen, dass der wahrscheinliche Wert der Einzahlungen dem wahrscheinlichen Werte der Auszahlungen bei jeder einzelnen Versicherung gleichkommt. (*Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung.*) Der Überschuss des Kapitalwertes der für eine Gesamtheit noch zu leistenden Auszahlungen über die von ihr noch zu erwartenden Einzahlungen bildet das jeweilige Deckungskapital der betreffenden Gesamtheit. Sein wahr-

---

dem er dabei dem allgemeinen Usus folgt. Thatsächlich verdankt man das „Gauss'sche" Fehlergesetz *Laplace*. Vgl. *E. Czuber*, Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Leipzig 1899, p. 74. S. auch I D 4 a, Nr. **2**. Bedeutung für die Lebensversicherung gewinnt es infolge seiner Eigenschaft, als Resultante von unendlich vielen unabhängigen Elementarfehlergesetzen zu erscheinen. Vgl. *E. Czuber,* Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie p. 163 ff. und Fussnote **168** dieses Artikels.

scheinlicher Wert heisst die *Prämienreserve* dieser Gesamtheit zu dem betreffenden Zeitpunkte.

Folgende Sätze befreien hierbei vom Wahrscheinlichkeitsschema:

Satz II. Man denke sich an Stelle jedes Individuums i einer Gesamtheit L Personen, die zur selben Zeit und im gleichen Alter wie i die gleiche Versicherung wie i eingehen und die genau nach der Sterbetafel absterben (*fingierte Gesellschaft*). Alsdann ist der Kapitalwert der von der fingierten Gesellschaft geleisteten Einzahlungen gleich dem der an sie geleisteten Auszahlungen. Hieraus bestimmen sich die Prämien.

Satz III. Die Prämienreserve einer einzelnen Versicherung ist das jeweilige Deckungskapital der zugehörigen fingierten Gesellschaft, dividiert durch die Zahl L' der zum Zeitpunkte der Berechnung in ihr noch vorhandenen Personen. Dieses Kapital ist einerseits gleich dem Überschusse der zum Zeitpunkte der Berechnung in der fingierten Gesellschaft bereits geleisteten Einzahlungen über die bereits geleisteten Auszahlungen (*retrospektive Methode*), andererseits gleich dem Überschuss der zur selben Zeit noch zu erwartenden Auszahlungen über die noch zu erwartenden Einzahlungen (*prospektive Methode*). Die Prämienreserve einer Gesamtheit ist gleich der Summe der Prämienreserven der einzelnen Versicherungen[15]).

4) *Mittleres Risiko* (Nr. **19**—**21**). Man setzt f gleich dem Werte des Deckungskapitals zu einem bestimmten Zeitpunkte, das zurückgestellt werden müsste, wenn man die Gruppierung der Todesfälle von der betrachteten Gesamtheit kennte. Alsdann giebt das *mittlere Risiko* $M(f)$ einen Massstab für den *Sicherheitsfonds*, der gegen die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartenden Sterblichkeitsschwankungen zu schützen im Stande ist. Den Sätzen II und III zur Seite tritt:

---

15) Für den naiven Standpunkt (Fussnote 8) ist Satz II als unmittelbarer Ausdruck des Prinzips der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ein Axiom, nach welchem die Prämien als blosse Durchschnittswerte erscheinen, die nach der Regel de tri gefunden werden. Obwohl schon *A. de Moivre* (Annuities upon lives, London 1725) seine Rechnungen auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen stützte, so ist doch bis heutigen Tages die naive Auffassung in den Kreisen der Praktiker die herrschende geblieben (Fussnote 5). Die im Texte gegebene Darstellung geht auf *M. Kanner* zurück (Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 355 (vgl. Fussnote 150). Auf den Begriff der Prämienreserve wurde *F. Baily* (1813) geführt, indem er nach dem Rückkaufswert einer Police fragte. Er gelangte so zu der prospektiven Definition (Fussnote 84 a. a. O.). Die retrospektive Auffassung scheint zuerst *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 103—108 mathematisch begründet zu haben.

Satz IV. Man berechne für jedes Mitglied der zu einer einzelnen Versicherung gehörigen fingierten Gesellschaft die Differenz des thatsächlich zu dem betreffenden Zeitpunkte für seine Versicherung erforderlichen Deckungskapitals und der zu dem betreffenden Zeitpunkte für ihn vorhandenen Prämienreserve. Die Summe der Quadrate dieser Differenzen ist das L'-fache des Quadrates des mittleren Risikos der betreffenden Versicherung zum Zeitpunkte der Berechnung. Das Quadrat des mittleren Risikos einer Gesamtheit ist gleich der Summe der Quadrate der mittleren Risiken der einzelnen Versicherungen.

4. **Normale Risiken.** Männliche Personen, die nach vollständiger ärztlicher Untersuchung zu normalen Bedingungen auf den Todesfall versichert sind, bilden die *normalen Risiken* einer Lebensversicherungsgesellschaft. Alle übrigen heissen *Extrarisiken* oder *anomale Risiken* [16]). Erfahrungen über normale Risiken enthalten sämtliche Tafelwerke, die im Litteraturverzeichnis unter II angeführt sind; genannt seien die Tafeln H. M. (= healthy male) der 20 E. G., die M I (= männlich I) der 23 D. G., und die Grundzahlen A. F. H. (= assurés français, hommes) auf p. XXIV der 4 F. G.

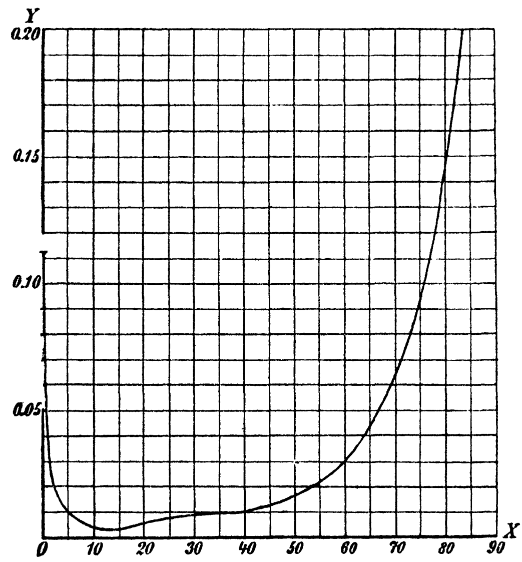

Fig. 1.

Die Sterblichkeitserfahrungen fehlen bei normalen Risiken in der Regel für die Kinderjahre. Die auf den Erfahrungen der 20 E. G. H. M.

16) Diese Definition findet sich nicht explicite in der Litteratur, dürfte aber dem herrschenden Sprachgebrauche annähernd entsprechen.

basierende Textbooktafel[17]) ergänzt diese durch die Erfahrungen *Farr*'s über die Sterblichkeit in den gesunden Distrikten Englands[18]). Die resultirende Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten $y = q_x$ ist für Demonstrationszwecke sehr geeignet und daher hier bis zum Alter 82 in Figur 1 wiedergegeben.

Die Figur stellt jedoch nicht die direkten Beobachtungen dar, sondern ausgeglichene und durch Interpolation ergänzte Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten (I D 4a, Nr. **11**; dieser Artikel Nr. **6**).

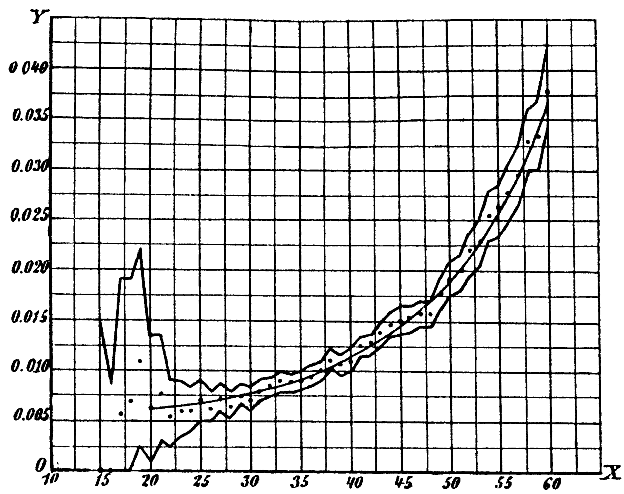

Fig. 2.

Das Verhältnis der wirklich beobachteten zu den ausgeglichenen Werten veranschaulicht an dem Material 23 D. G. M. I[19]) für die Alter 15—60 die Figur 2. Jene sind durch die diskontinuierliche Punktreihe, diese durch den kontinuierlichen Kurvenzug gegeben. Die durch das dreifache des mittleren Fehlers[20]) eines jeden q begrenzte und in der Figur durch die beiden gezackten Linien markierte

17) a. a. O. p. 494.

18) *W. Farr*, Lond. Phil. Trans. 149 (1859), p. 837. Resultate in *W. Farr*, English life table, London 1864. Vgl. I D 4a, Nr. **11**, Fussnote 50.

19) a. a. O. p. 102. Die ausgeglichene Kurve ist die von *W. Lazarus* berechnete (Ehrenzweig 6, 1885, Teil I, p. 12).

20) Ist, für irgend ein Alter x, R die Zahl der beobachteten Personen unter Risiko, q' das Verhältnis der für das $x+1^{\text{te}}$ Lebensjahr beobachteten Todesfälle zur Zahl R, q die gesuchte Sterbenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen, $p = 1 - q$, so hat man die quadratische Ungleichung $|q' - q| \leqq 3\sqrt{\frac{pq}{R}}$ nach der Unbekannten q aufzulösen. Der grösste und der kleinste dieser Werte q geben die beiden zur Abscisse x gehörigen Ordinaten der Fehlerzone.

„Fehlerzone“ schliesst die ausgeglichene Kurve hier vollständig ein. Hingegen weichen die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten von den beobachteten in der Regel schon in der dritten oder vierten Dezimale ab. Trotzdem muss man den Rechnungen der Praxis die fünfstelligen ausgeglichenen Werte zu Grunde legen, um hinreichend empfindliche und geglättete Prämientarife und Reservetabellen zu erzielen[21]).

Während die gewöhnlichen Sterbetafeln alle normalen Risiken als gleichartig (vergl. Prinzip I der Nr. 3) postulieren, hängt in Wirklichkeit die Sterblichkeit auch noch von sehr vielen anderen Umständen als dem Alter ab: so von der Höhe[22]) und Art[23]) der Versicherung, dem Berufe des Versicherten[24]), der Todesursache[25]) und vor allen Dingen auch von der Versicherungsdauer[26]). Die ärztliche Untersuchung bringt es mit sich, dass die Sterbenswahrscheinkeiten eines bestimmten Alters in den ersten 3—5 Versicherungsjahren stark wachsen[27]). Man nennt diese Erscheinung, die sich in ihren

---

21) Ausführliche Anweisung zur Berechnung von Tabellen giebt das Textbook (Litt.-Verz. IV), p. 379. Wegen numerischen Rechnens überhaupt vgl. die einschlägigen Artikel der Encyklopädie sowie die Lehrbücher: *J. Lüroth,* Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900 und *C. Runge,* Praxis der Gleichungen, Leipzig 1900.

22) *A. Emminghaus,* Mitteilungen aus der Geschäfts- und Sterblichkeits-Statistik der Lebensversicherungsbank für Deutschland zu Gotha. Weimar 1880, p. 71.

23) *G. H. Ryan,* Lond. Journal inst. act. 28 (1890), p. 225, vermutet eine niedrige Sterblichkeit bei gemischter Versicherung. Vergl. *E. McClintock,* N. Y. Am. Act. Soc. 3 (1893/94), p. 71. Dass dem in der That so ist, beweisen schlagend die Tafeln „Assured lives“ (1900) (siehe Litt.-Verz. II).

24) *A. Emminghaus,* a. a. O. p. 7, 13.

25) *A. Emminghaus*, a. a. O. p. 70. Erfahrungen der Stettiner Germania, Vereinsblatt für deutsches Versicherungswesen 25, Berlin 1897, p. 156. *Levi W. Meech,* System and tables (Litt.-Verz. II), p. 182.

26) Schon *J. A. Higham*'s Untersuchungen bei dem Material der 17 E G. (Lond. Journal inst. act. 1, Heft 3 (1851), p. 179) liessen darauf schliessen, dass die Sterbenswahrscheinlichkeiten eines festen Alters mit der Versicherungsdauer zunehmen.

27) Genauer untersuchte das Material der 17 E. G. und das der 20 E. G. H. M. *T. B. Sprague* im Jahre 1870, indem er für alle 5jährigen Altersklassen die Sterbenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Versicherungsjahre in Prozenten der nicht nach der Versicherungsdauer trennenden Sterbenswahrscheinlichkeiten der betreffenden Altersklasse berechnete (Lond. Journal inst. act. 15, p. 328). Er fand z. B. für die Altersklasse 36—40 bei dem H. M.-Material in den Versicherungsjahren 0, 1, 2, 3, 4—5 die Sterbenswahrscheinlichkeiten bezw. 40 %, 63 %, 85 %, 100 %, 106 % des normalen H. M.-Wertes und für die weiteren Versicherungsjahre beständig eine übernormale Sterblichkeit. Die Tafeln der 20 E. G. unterscheiden daher von den gewöhnlichen Sterbenswahrscheinlichkeiten der H. M. Leben, die nicht nach der Versicherungsdauer getrennt sind,

Grundzügen bei dem verschiedensten Material wiederholt, die *Selektion*. Die Vermutung, dass das vorzeitige Aufgeben der Police von Seiten des Versicherten die Sterblichkeit erhöhe, begleitete diese Untersuchungen[28]). Sie wurde später vielfach wiederholt; ein Nachweis für ihre Richtigkeit konnte bisher nicht erbracht werden[29]). Dem gewöhnlichen Brauche entsprechend sehen wir im folgenden von dem Einflusse der Selektion, so lange nicht das Gegenteil bemerkt ist, ab.

5. **Extrarisiken.** In der Definition der Extrarisiken (Nr. 4) liegt, dass sie eine sehr verzweigte Klasse bilden. Im allgemeinen gilt der Satz, dass die Sterblichkeit der Extrarisiken für die Gesellschaften ungünstiger ist als die der normalen Risiken. Eine verhältnismässig geringe Rolle spielen in der Praxis bis jetzt noch die Gefahren besonderer Berufe[30]), des Klimas[31]) und der minderwertigen (d. h. erblich oder durch Krankheit belastete) Leben[32]). Man sucht sich gegen sie

---

die H. M.(5) solcher Personen, die bereits 5 oder mehr Jahre versichert sind (Tables deduced (Litt.-Verz. III) p. 6 u. 114). In Ergänzung hierzu geben *T. B. Sprague's* select mortality tables (Lond. Journal inst. act. 21 1879, p. 229, 22 1881, p. 391, vgl. auch Litt.-Verz. III) für alle ganzzahligen Alter die Sterbenswahrscheinlichkeiten der H. M. in den Versicherungsjahren 0, 1, 2, 3, 4. Infolge der bei der Konstruktion der 17 E. G. und 20 E. G. eingeführten Altersfiktionen handelt es sich hier ebenso wenig wie bei den anderen Untersuchungen über Selektion um scharfe Versicherungsjahre, sondern um entsprechende Differenzen fingierter Alter (*E. Roghé*, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Neue Folge, Supplementheft 18 (1891), p. 102). Analoge Untersuchungen für die 23 D. G. M I stellte *W. Lazarus* an (Ehrenzweig 11 (1890), Teil 2, p. 3). Vergl. auch *Emminghaus* a. a. O. p. 30 und die Erfahrungen der Stettiner Germania a. a. O. p. 145. Eine zusammenfassende Darstellung der bisher über Selektion gemachten Erfahrungen und eine Vervollständigung derselben geben die Preisarbeiten von *J. Chatham* (Lond. Journal inst. act. 29 (1891), p. 81) und *E. McClintock* (N. Y. am. act. soc. 3 (1893/94), p. 61).

28) Vgl. *J. A. Higham*, a. a. O. p. 190; *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 15, p. 331—332.

29) Vgl. *J. Chatham*, a. a. O. p. 172, 173 und *E. McClintock* a. a. O. p. 97.

30) Verschiedene Aufsätze im Lond. Journal inst. act. (s. Index to vol. 1—20, London 1883, p. 50, 51; index 21—30, 1896, p. 32, 33; Lond. Journal inst. act. 33 [1897], p. 245; *James J. M'Lauchlan*, Edinb. act. soc. 4 [1899], p. 339). Zusammenfassende Referate wurden auf dem Pariser Kongress 1900 erstattet.

31) *Levi W. Meech*, a. a. O. p. 43; Sterblichkeitstafel der New-York life Insurance Company New-York für die amerikanischen Tropen bei *C. N. Jones*, Am. Act. Soc. 3 (93/94), p. 316, 317; vgl. auch die Indices des Lond. Journal inst. act. und N. Y. Am. Act. Soc., sowie *A. E. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 33 (1897), p. 285; *A. L.* 1898, p. 516. Zusammenfassende Referate wurden auf dem Pariser Kongress erstattet.

32) *E. Blaschke*, Denkschrift (s. Litt.-Verz. VI) bildet, gestützt auf eine Klassification der Todesursachen, 3 Gefahrenklassen und stellt für jede von diesen

durch reichlich hohe Extraprämien, Karenzzeit, Ablehnung der Versicherung überhaupt oder doch gewisser Versicherungsarten zu schützen. Bei Auswanderung in die Tropen nimmt die Sterblichkeit mit der Dauer des Aufenthaltes nach den ersten Jahren meist ab[33]). Analog fällt die Sterblichkeit der Reichsinvalidenrentner rapid in den ersten Jahren des Rentengenusses[34]).

Von besonderer Wichtigkeit sind die Extrarisiken, die durch die sogenannte Begräbnisgeldversicherung (Todesfallversicherung ohne vollständige ärztliche Untersuchung auf kleine Summen)[35]), die Leibrentner und durch die Versicherung von Frauen entstehen. Jede bessere Sterbetafel trennt jetzt die Geschlechter (so die 20 E. G. in H. M. und H. F., die 23 D. G. in M. und W., die Grundzahlen der 4 F. G. in H. und F). Nach den Erfahrungen M I und W I der 23 D. G. ist die Sterblichkeit der Frauen bis zum Alter 41 höher, dann niedriger als die der Männer[36]). Die Sterblichkeit der Leibrentner ist im allgemeinen niedriger als die von normal auf den Todesfall versicherten Personen[37]) und zwar scheint der Unterschied erheblicher bei den

---

(a. a. O. p. 46) eine nach *Makeham* ausgeglichene Sterbetafel her. — Die Tafeln II der 23 D. G. (a. a. O. p. 793) geben die Sterbenswahrscheinlichkeiten von nach vollständiger ärztlicher Untersuchung zu erhöhter Prämie versicherten Personen. Vgl. auch die 4. Gruppe der Erfahrungen der 20 E. G. (Litt.-Verz. II), die Indices des Lond. Journal inst. act. und *H. Westergaard*, Lond. Journal inst. act. 31 (1894), p. 375.

33) *A. E. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 33 (1897), p. 293, 294.

34) Denkschrift betreffend die Höhe und Verteilung der finanziellen Belastung aus der Invaliditätsversicherung. Deutscher Reichstag, 10. Legislatur-Periode, I. Session 1898/99, Nr. 93, Anlage p. 104.

35) Sterbetafel III der 23 D. G. a. a. O. p. 799. Über Sterbekassen existiert eine kolossale Litteratur, die hier ganz unberücksichtigt bleiben muss. Vgl. jedoch Fussn. 132.

36) a. a. O. p. 787, 789. — Dagegen hat die L.-V.-G. Germania, Stettin, mit der Versicherung von Frauen auf den Todesfall günstigere Erfahrungen gemacht. Vereinsblatt für deutsches Versicherungswesen 25 (1897), p. 142. Zwischen Frauen- und Witwen-Sterblichkeit unterscheidet *J. Karup*, Finanzlage (Litt.-Verz. VI).

37) Die wichtigsten Rentner-Sterbetafeln sind: *M. Deparcieux*, Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. Paris 1746; *John Finlaison*, Report on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities are founded. Ordered by the House of Commons to be printed 1829 (vgl. jedoch *E. Roghé* a. a. O. p. 23 ff.); *A. G. Finlaison*, Report and observations relating to tontines. Ordered by the house of Commons to be printed 1860; *A. J. Finlaison*, Report to the government annuities act 1882, London 1884. Lond. institute of actuaries' and Edinb. faculty of actuaries' joint mortality investigation, combined experience of life annuitants (1863—1893), London

Frauen als bei den Männern zu sein[38]). Der ärztlichen Untersuchung bei der Todesfallversicherung entspricht hier die *Selbstauswahl* der Versicherten. Daher ist die Erscheinung der Selektion auch im Leibrentengeschäft zu konstatieren[39]).

6. Ausgleichung und Interpolation. Die Ausgleichungsmethoden der Lebensversicherung[40]) suchen entweder die auszugleichenden Werte durch diejenigen einer einfachen analytischen Funktion zu approximieren oder sie operieren ohne eine solche. Diese unterscheiden sich nicht wesentlich von den allgemein üblichen Methoden: Man bedient sich mechanischer Hülfsmittel[41]), des graphischen Verfahrens[42]), der

---

1899. Die Tafeln IV der 23 D. G. (a. a. O. p. 513, 617, 737, 761) betreffen Versicherungen auf den Erlebensfall überhaupt. Speziell auf Renten bezieht sich die Deutsche Rentner-Sterbetafel, Vereinsblatt für Deutsches Versicherungswesen 19 (1891), p. 149. Ferner sind zu nennen: Die Tafeln der F. G.; R. F., Grundzahlen a. a. O. p. XVIII; Erfahrungen amer. Gesellschaften: *Rufus W. Weeks,* Am. act. soc. 2 (1891/92), p. 233. Alle diese Tafeln trennen nach Geschlechtern. Eine kritische Übersicht über die wichtigsten damals erschienenen Rentner-Sterbetafeln nebst Tabellen giebt: *B. Schmerler*, Die Sterblichkeits-Erfahrungen unter den Renten-Versicherten, Berlin 1893; *Thomas B. Macaulay,* Am. act. soc. 4 (95/96), p. 410. Weitere Litteratur bei *Landré, Schmerler* und in *Neumann*'s Jahrbuch.

38) *B. Schmerler,* a. a. O. p. 24.

39) *James Chatham,* Edinb. act. soc. 2 (1891), p. 27, berechnet die q_x für die einzelnen Versicherungsjahre; vgl. auch *Schmerler,* a. a. O. p. 12; zu *A. J. Finlaison* 1884 select tables bei *George King* and *William Whittall* (Litt.-Verz. III), $2\frac{1}{2}\%$ und 3%.

40) Die wichtigsten Ausgleichungsmethoden (I D 2) unter einem einheitlichen logischen Gesichtspunkte zusammenzufassen versucht die Monographie von *E. Blaschke,* Die Ausgleichungsmethoden der Lebensversicherung (Litt.-Verz. VI). Man vgl. auch *E. Blaschke*, Wien. Denkschr. math.-naturw. Kl., Bd. 54 (1888), p. 105, und *H. Bruns,* Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik, Phil. Studien 9 (1893), p. 1. Ausserdem existieren zahlreiche Arbeiten, speziell aus der Lebensversicherung, welche mehr die Praxis der Ausgleichung interessiert, die aber gleichwohl eine Übersicht über die verschiedenen Methoden geben. Genannt seien die Monographie von *Woolhouse*, *L. Lindelöf*, Mortaliteten i Finland, Helsingfors 1889, die Dissertation von *J. P. Janse* und besonders die historische Arbeit von *A. Quiquet*, Par. Bull. inst. act. 4 (1893), p. 151, ferner *C. L. Landré,* Math. techn. Kap. (Litt.-Verz. IV), p. 60, ders., Ehrenzweig 15 (1894), Teil 2, p. 30, sowie aus dem Lond. Journal inst. act. die Arbeit von *W. Sutton* a. a. O. 20 (1877), p. 170, 192, die auch den Einfluss der Ausgleichung auf die Werte der Prämien und Reserven untersucht, und *J. Sorley,* a. a. O. 22 (1880), p. 309.

41) *G. F. Salter,* N. Y. Am. act. soc. 3 (1893/94), p. 442.

42) In Verbindung mit rechnerischen Korrektionen verwendet dieses namentlich *T. B. Sprague* (Lond. Journal inst. act. 21 [1879], p. 445, 26 [1886], p. 77).

Bildung von Mitteln[43]) und Differenzen[44]), man setzt die ausgeglichene Funktion aus einzelnen Parabelstücken zusammen[44]) oder man benutzt die Methode der kleinsten Quadrate[45]), endlich kombiniert man auch die verschiedenen Methoden (*Woolhouse's* Methode der Superposition)[46]). Die Rechtfertigung für die Zulässigkeit eines Verfahrens erblickt man meist in seinem Erfolg im einzelnen Fall.

Der Lebensversicherung eigentümlich sind hingegen einige analytische Ausdrücke (sogenannte Sterblichkeitsgesetze, vgl. I D 4 a, Nr. **11**), durch die man die Zahl der Lebenden approximiert. Wir nennen nur das *Makeham*'sche *Gesetz*[47]) und seinen Vorläufer, das *Gom-*

---

43) Hierher gehören die von *John Finlaison* empfohlenen Methoden. Vgl. *John Finlaison,* Report on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities are founded. Ordered by the house of Commons to be printed 31. III. 1829; Memoir of the late *John Finlaison,* Lond. Journal inst. act. 10 (1862), p. 160; *H. A. Smith,* Lond. Journal inst. act. 13 (1866), p. 58.

44) Die Methode der Differenzenbildung und die der Benutzung von Parabeln sind nicht wesentlich von einander verschieden, wie denn überhaupt die im Texte unterschiedenen Kategorien sich nicht immer scharf trennen lassen. Vgl. auch die Artikel I D 3 und I E, sowie im Lond. Journal inst. act. die Arbeiten von *W. S. B. Woolhouse,* 12 (1865), p. 137; *P. W. Berridge,* 12 (1865), p. 220; *J. Karup*, London, Intern. Kongr. (1899), p. 31.

45) Approximiert man dabei stückweise durch ganze, rationale Funktionen, so entstehen die *Tschebyscheff*'schen Ansätze. Siehe I D 3, Nr. **14**. Den Spezialfall einer ganzen Funktion 2ten Grades bringt in eine sehr einfache Form *G. Eneström,* Stockh. Öfv. 50 (1893), p. 397. Ohne einen vorgegebenen analytischen Ausdruck operiert *G. Bohlmann,* Gött. Nachr. 1899, p. 260.

46) Der Name „Superposition" stammt vom Referenten. Die Methode besteht darin, dass durch die Endpunkte der Ordinaten l_{x-5}, l_x, l_{x+5} eine gewöhnliche Parabel (x) gelegt wird. Um nun das ausgeglichene l zu definieren, das einem bestimmten Alter a entspricht, markiert *Woolhouse* die Schnittpunkte der gegebenen Ordinate dieses Alters mit den Parabeln $(a-2)$, $(a-1)$, (a), $(a+1)$, $(a+2)$. Das gewöhnliche arithmetische Mittel der diesen 5 Schnittpunkten entsprechenden Ordinaten definiert das ausgeglichene l_a. Siehe *W. S B. Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 389; 21 (1878), p. 37, 57. Die Methoden von *Woolhouse* und *J. Finlaison* vereinigen *J. A. Higham,* 23 (1882), p. 335; 24 (1883), p. 44; 25 (1884), p. 15 (1885), p. 245; *Th. G. Ackland,* 23 (1882), p. 352.

47) *W. M. Makeham,* Lond. Journal inst. act. 8 (1860), p. 301. Das „Gesetz" schreibt nicht die Natur vor, sondern der Rechner. Schon *C. F. Gauss* († 1855) war im Besitze einer Sterblichkeitsformel, welche die Makeham's als speziellen Fall enthält und für das ganze Leben gelten soll (Gauss' Werke 8, Leipzig-Göttingen 1900, p. 155). Sie ist ihrerseits wieder ein spezieller Fall einer von *W. Lazarus* zu demselben Zwecke aufgestellten Gleichung (Über Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen, Hamburg 1867; übersetzt von *T. B. Sprague* im Lond. Journal inst. act. 18 (1873), p. 55, (1874), p. 212). Weitere Verallgemeinerungen sind hieran unter anderen von *A. Amthor* (Das Gompertz-

pertz'sche Gesetz [48]). Nach diesem bilden die Sterbensintensitäten (I D 4a, Nr. 8) μ_x, nach jenem ihre Differenzen eine wachsende geometische Reihe. In beiden Fällen ist:

$$\mu_x = \alpha + \beta\gamma e^{\gamma x}, \quad l_x = Ce^{-\alpha x - \beta e^{\gamma x}},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und C, α, β, γ positive Konstante bedeuten. Beim *Makeham*'schen Gesetz ist α nicht null, das *Gompertz*'sche Gesetz entsteht in dem Grenzfalle $\alpha = 0$. Das *Makeham*'sche Gesetz stellt die Sterblichkeitskurven normaler Risiken von einem Alter zwischen 20 und 30 an mit völlig ausreichender Genauigkeit dar und führt wie das *Gompertz*'sche zu grossen rechnerischen Vereinfachungen bei den verbundenen Leben (Nr. **13**). Es hat sich bei normalen Risiken [49]) allgemein, bei Extrarisiken [50]) vielfach bewährt.

Was die Bestimmung der Konstanten α, β, γ anlangt, so geschieht diese auf rechnerisch bequeme Weise teils aus drei Überlebenswahrscheinlichkeiten, die sich auf einen längeren Zeitraum (etwa 20 Jahre) erstrecken [51]), oder durch Kombination dieses Verfahrens mit dem der Superposition [52]) oder aus drei Summen der Logarithmen der Zahlen

---

Makeham'sche Sterblichkeitsgesetz, Festschrift der Kreuzschule in Dresden, Dresden 1874, p. 20) und *A. Quiquet* (Par. C. R. 106 (1888), p. 1465; 109 (1889), p. 794; Par. Bull. act. franç. 4 (1893), p. 97) geknüpft. Letztere Arbeit ist umfassend und subsumiert alle bisher aufgestellten Sterblichkeitsformeln unter einem einheitlichen Gesichtspunkte. Vgl. Fussn. 118. Die einschlägige deutsche Litteratur findet man bei *K. Wagner*, a. a. O. (Litt.-Verz.) p. 103 ff.

48) *Benj. Gompertz*, Lond. Phil. Trans., 1825, p. 513; *W. M. Makeham* zeigte (Lond. Journal inst. act. 13 [1867], p. 337 Zeile 20—16 v. u.), dass bei einer Trennung der Todesfälle nach Krankheitsursachen das *Gompertz*'sche Gesetz viel besser stimmt als ohne diese Unterscheidung.

49) Nach dem *Makeham*'schen Gesetz sind z. B. ausgeglichen die 17 E. G. (*Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 [1860], p. 408 unter Benutzung der Alter 10—90), die 20 E. G. H. M. (*Woolhouse* ebenda p. 408 unter Benutzung der Alter 10—90, *King* and *Hardy*, Textbook p. 84 für die Alter 28—101), die 23 D. G. M. I (*W. Lazarus*, Ehrenzweig 6 [1885], Teil 1 p. 12) für die Alter 20—89, die 4 F. G. A. F. (Tables de mortalité [Litt.-Verz. II] p. XXXII) für die Alter 23—103. Die resultierenden Werte für die α, β, γ schwanken bei Abrundung auf 3 Dezimalen zwischen $0{,}005 < \alpha < 0{,}007$; $0{,}001 < \beta < 0{,}003$; $0{,}079 < \gamma < 0{,}092$. Die Abweichungen der ausgeglichenen Werte von den beobachteten vergleichen mit dem mittleren Fehler der Sterbenswahrscheinlichkeiten bei den 20 E. G. H. M. *Makeham* im Lond. Journal Inst. Act. 28 (1890), p. 329, bei den 23 D. G. M. I *W. Lazarus* a. a. O. p. 20, 21.

50) Nach *Makeham* ausgeglichen sind z. B. die in Fussn. 31 erwähnte Tafel der New York Life für die amerikanischen Tropen, die Sterbetafeln von *E. Blaschke* in Fussn. 32 und die Rentnersterbetafeln der 4 F. G.

51) *C. F. McCay*, Lond. Journal inst. act. 22 (1879), p. 27.

52) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 403.

der Lebenden[53]). Deutsche und französische Lebensversicherungs-Mathematiker versuchten eine durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Ausgleichungsrechnung zu begründende Methode zu finden. So verlangt *M. Kanner*[54]) allgemein die Konstanten jedes Sterblichkeitsgesetzes so zu bestimmen, dass die resultierenden Werte der p_x und q_x das wahrscheinlichste Wertsystem bilden. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die *Makeham*'sche Formel führt zu transcendenten Gleichungen für die α, β, γ, die jedoch approximativ von *J. Karup* für die Erfahrungen der Gothaer Lebensversicherungs-Gesellschaft[55]), von *W. Lazarus* für 23 D. G. M I[56]) gelöst sind. Die Methode der kleinsten Quadrate benutzen die französischen Tafeln[57]).

Die Sterblichkeitskurven der Figuren 1 und 2 folgen dem *Makeham*'schen Gesetz, bei jener sind die Konstanten nach der dritten, bei dieser nach der vorletzten der soeben angegebenen Methoden berechnet (vgl. Fussn. 17, 19, 53).

Indem man die Gültigkeit des *Makeham*'schen Sterblichkeitsgesetzes nicht nur für ganzzahlige, sondern auch für alle Zwischenwerte postuliert, gewinnt man neben der Ausgleichung eine *Interpolation.* Zu ihr tritt eine *Extrapolation,* wenn man seinen Fortbestand auch jenseits des höchsten Alters der Sterbetafel bis ins Unendliche annimmt. Hat man kein Sterblichkeitsgesetz zu Grunde gelegt, so interpoliert man gewöhnlich bei den Zahlen der Lebenden. Würden diese einer einzigen ohne Unterbrechung wirklich beobachteten Generation angehören, so würden ihre Werte eine integrierbare Funktion bilden, deren ganzen Verlauf man beherrschte. Thatsächlich stellen sie lediglich eine rechnerische Hülfsfunktion dar, die man nur für die ganzzahligen Alter kennt und für deren Zwischenwerte man allein die aus Satz I folgenden Ungleichungen aufstellen kann. Man interpoliert zwischen ihnen linear (*Moivre*'sche Hypothese[58])) oder durch ganze Funktionen zweiten

53) *G. King* und *F. Hardy,* Lond. Journal inst. act. 22 (1880), p. 200. Nach diesem Verfahren ist die Textbooktafel (Fig. 1) für die Alter 28—101 hergestellt. Sie entspricht den Konstanten: $\alpha = 0{,}00619$, $\beta = 0{,}00105$, $\gamma = 0{,}09131$.

54) Berl. Journal Koll. Lebensvers. 2 (1871), p. 164.

55) Rundschau der Versicherungen 34 (1884), p. 309.

56) *W. Lazarus*, Ehrenzweig 6 (1885), Teil 1. p. 12. Auf diesen Konstanten beruht die Konstruktion der Fig. 2. Für sie ist $\alpha = 0{,}00480$, $\beta = 0{,}00343$, $\gamma = 0{,}07908$. Vgl. auch *W. Lazarus,* Die Bestimmung und Ausgleichung der aus Beobachtungen abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten. Bericht der math. Gesellsch. in Hamburg 1878, übersetzt ins Engl. Lond. Journal inst. act. 20 p. 410.

57) Tables de mortalité (Litt.-Verz. II) p. 29.

58) Nach *A. de Moivre* (Annuities upon lives, London 1725) ist die Kurve der l_x eine gerade Linie, welche beim Alter 86 die Abscissenachse schneidet.

oder höheren Grades und definiert so nicht nur die verlangten Zwischenwerte, sondern auch die Differentialquotienten von l_x bis zu der Ordnung, bis zu der man sie braucht (mechanische Differentiation[59]). In diesem Falle muss man jedoch darauf achten, dass man die Hypothese, nach welcher man interpoliert, im Laufe der Rechnung nicht wechselt.

II. Der Nettofonds.

7. Definitionen. Unter *Versicherungssumme* einer Lebensversicherung werde im weitesten Sinne diejenige Summe verstanden, welche der Versicherte vertragsmässig beim Eintreten des versicherten Ereignisses zu beanspruchen hat, mag sie nun einmal, wie bei der Kapitalversicherung auf den Todesfall, oder öfter, wie bei den Leibrenten gezahlt werden. Eine Versicherung *läuft ab,* wenn sowohl auf Seiten des Versicherten, als auf der der Gesellschaft alle Zahlungsverpflichtungen erlöschen, ohne dass die in der Police ausgemachten Zahlungsbedingungen verletzt worden sind. Die Zeit, die vom Beginn einer Versicherung bis zum Zeitpunkte der Berechnung verflossen ist, heisst die jeweilige *Versicherungsdauer* der betreffenden Police. Als Zeiteinheit werde das Jahr gewählt. Eine Police *verfällt,* wenn der Versicherte seine Zahlungen einstellt, ohne dass die Gesellschaft für die bereits von ihm geleisteten Zahlungen eine Entschädigung gewährt. Die Beiträge, welche die Versicherten einzahlen, heissen *Prämien* (vgl. Nr. 3), sie werden höchstens bis zum Tode gezahlt; reichen sie nicht aus (was bei einer guten Lebensversicherungsgesellschaft jetzt nicht mehr vorkommt), so treten zu ihnen noch *ausserordentliche Beiträge* der Versicherten (Gegenseitigkeitsgesellschaften) oder Aktionäre (Aktiengesellschaften). Derjenige Teil der Prämie, welcher bestimmt ist die Nettoausgaben zu decken, heisst die *Nettoprämie.* Die Prämie, welche der Versicherte wirklich zahlt, heisst die *Bruttoprämie.* Die Prämien sind der Versicherungssumme proportional, es genügt daher, sie für die

---

In dieser Ausdehnung ist die Hypothese natürlich unbrauchbar, für kurze Altersstrecken aber zulässig. In diesem Referate wird als *Moivre*'sche Hypothese durchgängig nur die Annahme bezeichnet, dass die Kurve der l_x zwischen zwei aufeinander folgenden ganzzahligen x geradlinig verläuft.

59) Vgl. I D 3, Nr. 8 Formel (16). In die Lebensversicherung wurden diese Methoden von *W. S. B. Woolhouse* eingeführt (Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 61), viel benutzt sind seine Ausdrücke für μ_x (ebenda 11 (1864), p. 323 unten und 324 oben, und 21 (1878), p. 64). Doch vermisst man überall eine Angabe der Hypothesen, die den Ableitungen zu Grunde liegen, und der Gültigkeitsbedingungen der Resultate.

Versicherungssumme 1 zu berechnen. Die Differenz zwischen Brutto- und Nettoprämie heisst der *Zuschlag,* er soll Deckung der Unkosten, Gewährung von Dividenden und eventuelle Anlage von Sicherheits- und Extrafonds' ermöglichen.

Zu den *Einnahmen* eines bestimmten Zeitraumes (z. B. eines Kalenderjahres) sollen nicht nur die innerhalb desselben eingehenden Beträge an Prämien, Zinsen[60]), Mieten u. s. w. gerechnet werden, sondern auch der Vermögensbestand zu Anfang des Jahres. Ebenso zählen zu den *Ausgaben* des Zeitraumes die sämtlichen innerhalb desselben an Versicherungssummen, Unkosten u. s. w. ausgezahlten Summen und der Bestand zu Ende des Jahres. Eine konsequente Buchung vorausgesetzt, ist in einer Periode die Summe der Einnahmen gleich der Summe der Ausgaben. Im Gegensatze zu den sogleich zu definierenden Nettoeinnahmen und -Ausgaben heissen die soeben erklärten Begriffe die *Bruttoeinnahmen* und *Bruttoausgaben.*

Zu den *Nettoeinnahmen* einer Periode zählen wir 1) die mathematische Prämienreserve (Nr. **3, 11, 16**) der betrachteten Gesamtheit zu Anfang des Zeitraumes, 2) die in ihm als Einnahme zu verzeichnenden Nettoprämien, 3) die rechnungsmässigen Zinseszinsen dieser beiden Summen. Dagegen bilden die *Nettoausgaben* der Periode 1) die in ihr gezahlten Versicherungssummen, 2) die rechnungsmässigen Zinseszinsen von diesen, 3) die mathematische Prämienreserve zu Ende des Zeitraumes. Diesmal ist die Summe der Nettoeinnahmen gleich dem Gewinn im Nettofonds plus der Summe der Nettoausgaben[61])[62]).

---

60) Was den Zinsfuss anlangt, so rechnen nach *J. Neumann,* Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen, 30. Jahrgang, Berlin 1900, p. 497, die deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften ihr normales Todesfallgeschäft jetzt zu 3 % oder $3\frac{1}{2}$ %. Dagegen bewegte sich im Jahre 1899 die wirklich erzielte durchschnittliche Verzinsung der Ausleihungen nach „Zustand und Fortschritte der deutschen Lebensversicherungsanstalten, 50. Jahrgang, Jena 1900", p. 71, bei den 27 dort aufgeführten Anstalten zwischen 3,72 % und 4,24 %.

61) Während die im Texte gegebene Erklärung der Bruttoeinnahmen und -Ausgaben über einen ziemlich allgemein geübten kaufmännischen Usus berichtet, nach welchem die Rechenschaftsberichte eingerichtet werden (vgl. z. B. den Runderlass des preussischen Ministeriums des Innern vom 8./3. 1892, Ministerialblatt für die innere Verwaltung 53 (1892), p. 154), hat die Einführung der Nettoeinnahmen und -Ausgaben eine lediglich theoretische Bedeutung und bleibt auch gültig, wenn die betrachtete Gesamtheit sich auf eine einzige Versicherung reduziert. Die Definitionen fussen auf den von *M. Kanner* eingeführten Begriffen, Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 355. Vgl. Fussnote 81. Verwertung finden sie Nr. **20** ff. dieses Artikels.

62) Amtliche Übersichten über die Lebensversicherungs-Unternehmungen

In Nr. 8 bis **13** sind, so lange nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, unter Einnahmen und Ausgaben immer Nettoeinnahmen und Nettoausgaben, unter Prämien immer Nettoprämien verstanden. Das allgemeine Resultat aller auf die Berechnung von Prämien und Prämienreserven sich beziehenden Untersuchungen möge gleich hier vorweg genommen werden: Die Berechnung aller dieser Grössen lässt sich immer auf die der einmaligen Prämien von jährlich zahlbaren Leibrenten zurückführen, die bei Versicherungen auf 1 Leben bis zum Tode, bei Versicherungen verbundener Leben (Nr. **13**) bis zum ersten Tode laufen.

8. Einmalige Prämien für Leibrenten. Die einmalige Nettoprämie (Nr. **3**, 3) einer Versicherung, auch *Wert* der betreffenden Versicherung genannt, ist allgemein der wahrscheinliche Wert (= mathematische Hoffnung) der entsprechend diskontierten Nettoauszahlungen (I D 1, Nr. **16**). Man berechnet sie nach Satz II der Nr. **3**.

(x) bezieht eine jährlich gleichbleibende Leibrente 1, wenn er von Ende des $x+m^{\text{ten}}$ bis Ende des $x+n-1^{\text{ten}}$ Lebensjahres jährlich, so lange er lebt, die Summe 1 erhält, dagegen vom Momente seines Todes an auf jede Auszahlung verzichtet. Ist $m=0$, so heisst die Rente pränumerando, ist $m=1$, so heisst sie postnumerando zahlbar. Ist $x+n=\omega$, das höchste Alter in der Sterbetafel, so heisst die Rente lebenslänglich zahlbar, ist $x+n<\omega$, so heisst sie tem-

---

ihres Landes geben: *Amerika,* Staat New York: Annual report of the superintendent of the New-York insurance department, New York 1860 ff. — *England:* Statements of account and of life assurance and annuity business. Ordered by the house of Commons to be printed, London 1872 ff. — *Frankreich:* Annuaire statistique de la France, 1 ff., Paris 1878 ff. — *Japan:* Résumé statistique de l'empire du Japon, Tokio 1887 ff. — *Schweden:* Försäkringsväsendet i riket, Stockholm 1887 ff. — *Schweiz:* Berichte des eidgenössischen Versicherungsamtes über die privaten Versicherungs-Unternehmungen in der Schweiz, Bern 1888 ff. — *Finnland:* Bidrag till Finlands officiela statistik XXII, Försäkringsväsendet, Helsingfors 1893 ff. — *Norwegen:* Statistisk Aarbog for Kongeriget Norge 14 ff., Christiania 1894 ff.; Meddelelser fra det statistiske Centralbureau 13 ff., Christiania 1895 ff. — *Deutschland:* Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich, Berlin 1896 ff.; Vierteljahrshefte zur Statistik des Deutschen Reiches, Berlin 1899. — *Dänemark:* Statistisk Aarbog, udgivet af Statens statistiske Bureau 1 ff., Kopenhagen 1896 ff. — *Ungarn:* Ungarisches statistisches Jahrbuch, Neue Folge 3 ff., Budapest 1896 ff. — *Österreich:* Amtliche Publikationen über den Stand des Versicherungswesens in den im Reichsrate vertretenen Königreichen und Ländern (Publikation steht unmittelbar bevor). — Eine internationale Übersicht giebt: The insurance year book, 2, New-York 1873 ff. und das Ehrenzweig'sche Jahrbuch.

porär, ist $m > 1$, so heisst sie aufgeschoben. Die einmalige Prämie für die lebenslänglich postnumerando zahlbare Leibrente von der jährlich gleichbleibenden Höhe 1 beträgt für das Eintrittsalter x:

$$(1) \qquad a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 + \cdots = \frac{N_x}{D_x},$$

und ist z. B. bei den Grundlagen des Textbook $3^1/_2\,\%$, Eintrittsalter 30, gleich 18,4. Dabei bezeichnet v das Kapital, welches die Zinsen in einem Jahre auf die Höhe 1 bringen sollen (bei $3^1/_2\,\%$ ist also $v = 1{,}035^{-1}$);

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

heisst die *diskontierte Zahl der Lebenden des Alters* x und es bedeutet:

$$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega.$$

Die Zahlen D_x und N_x sind für die meisten Sterbetafeln tabuliert (Litt.-Verz. III).

Der Wert der Postnumerando-Leibrente 1 ist um 1 kleiner als der der Pränumerando-Leibrente 1. Als Leibrente kommt jene allein in der Praxis vor, Pränumerando-Leibrenten sind die Prämien der Lebensversicherung, nur dass diese umgekehrt die Gesellschaft vom Versicherten bezieht[63]).

---

63) Die einmalige Prämie der lebenslänglichen Leibrente wurde allerdings nach einer anderen, aber ebenfalls einer korrekten Darstellung fähigen Methode bereits von *Joh. de Witt* berechnet (*Joh. de Witt,* Waerdije van Lijfrenten, s'Gravenhage 1671, Facsimile Haarlem 1879). Die Methode des Textes entwickelte *Halley* (Fussn. 8, p. 596). Vgl. *G. Eneström*, Stockholm, Förhandlingar 1896, p. 41, 157; derselbe, Archief verzekeringswet 3 (1897), p. 62 und *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1894, Teil III, 1 p. 43 ff. Der weitere Fortschritt bestand zunächst darin, dass man seit *Moivre* (Annuities upon lives, London 1725) unter Verwertung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Fussn. 15) nach den einmaligen Prämien für alle möglichen Versicherungskombinationen, namentlich auch bei verbundenen Leben (Nr. **13**) fragte. Freilich waren *Moivre*'s Entwickelungen durchaus auf seine Hypothese beschränkt (Fussn. 58). Die diskontierten Zahlen führte *J. N. Tetens* ein (Einleitung zur Berechnung der Leibrenten, 2 Bde., Leipzig 1785/86, Band 1, p. 88). Die Auffassung der Prämien als wahrscheinlicher Werte oder als mathematischer Hoffnung fusst auf den von *M. Kanner*, Deutsche Versicherungszeitung 1867, p. 355 gegebenen Entwickelungen (vgl. Fussn. 15), sie fand in die Lebensversicherung Eingang durch die Monographie von *Th. Wittstein,* Das mathematische Risiko (s. Litt.-Verz. VI), p. 3, Formel (4). Die dort ausgesprochene Forderung, dass sich die Einzelfälle bei der mathematischen Hoffnung ausschliessen müssen, wurde später vielfach wiederholt, ist aber für die Berechnung der Prämien ebenso lästig als überflüssig. Sie fehlt auch bei *J. Bertrand,* Calcul des probabilités, Paris 1888, p. 50/51. In der

Erhält (x) die lebenslängliche Leibrente 1 in $\frac{1}{r}$ jährlichen Raten zu je $\frac{1}{r}$, so nimmt die Pränumerando-Rente (erste Rate sofort zahlbar) mit r ab, die Postnumerando-Rente (erste Rate nach $\frac{1}{r}$ Jahr zahlbar) zu. Die einmalige Prämie der letzteren ist bei der *Moivre*schen Hypothese eine lineare Funktion von a:

$$(2) \qquad a^{(r)} = v_1^{(r)} \cdot a + v_2^{(r)},$$

deren positive Koeffizienten $v_1^{(r)}$, $v_2^{(r)}$ ausser von r nur vom Zinsfaktor abhängen[64]). Oft reichen die Näherungswerte aus:

$$v_1^{(r)} = 1,\ v_2^{(r)} = \frac{r-1}{2r}.$$

Ist l_x integrierbar, so entsteht für $r = \infty$ die kontinuierliche Leibrente[65]), deren einmalige Prämie:

$$(1) \qquad \bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{l_{x+z}}{l_x} v^z\, dz$$

zwischen a und $a + 1$ enthalten und bei Voraussetzung der *Moivre'*schen Hypothese leicht aus (2) durch Grenzübergang zu berechnen

---

Bezeichnungsweise hat sich Referent soweit als möglich der in England, Frankreich und Amerika adoptierten des Lond. institute of actuaries angeschlossen. Vgl. hierzu *A. Bégault* im Lond. Journal inst. act. 33 (1896), p. 1 sowie Lond. intern. Kongr. (1899), p 582—640 und die *Sprague*'sche Arbeit, die dem Pariser Kongress vorgelegt wurde. Hinsichtlich der Grösse N_x differiert die englische und amerikanische Bezeichnung. Wir wählen die erstere, vgl. Principles and practice (Litt.-Verz. III) 4th ed., p. 39. Numerische Tabellen für die D_x, N_x, a und ihre dekadischen Logarithmen findet man für alle im Litt.-Verz. unter II aufgeführten Sterbetafeln in den unter III genannten Tafelwerken.

64) Die resultierende Formel gab 1861 *R. Lobatto*, Amsterdam. Verh. 10 (1864), p. 199. Sie entspricht der Annahme, dass v^t den gegenwärtigen Wert der nach t Jahren zahlbaren Summe 1 auch für jedes nicht ganzzahlige t angiebt. Andere Annahmen führen zu komplizierteren Resultaten, vgl. *C. Landré,* Math. techn. Kap. (Litt.-Verz. VI), p. 182 ff. Die Näherungswerte $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{r-1}{2r}$ giebt für $r = 2$ und $r = 4$ *Th. Simpson*, Select exercises, London 1752, p. 283.

65) Die kontinuierliche Rente ist von *Th. Simpson* eingeführt (select exercises, London 1752, p. 324). Die übrigens auch von *H. Scheffler* (Sterblichkeit und Versicherungswesen, Braunschweig 1869) vertretene Methode der kontinuierlichen Variabeln wurde als Hülfsmittel zur Gewinnung von numerischen Approximationen von *W. S. B. Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 102 eingeführt und systematisch ausgebeutet.

ist[66]). Für $v = 1$ wird $\bar{a}$ gleich der ferneren mittleren Lebensdauer des (x) [I D 4a, Nr. 8].

Weniger einfach berechnet sich das Integral $(\bar{1})$ bei Zugrundelegung des *Makeham*'schen Gesetzes; es drückt sich alsdann durch eine hypergeometrische Reihe [II B 4] aus, die nur für nicht zu hohe Alter zur numerischen Berechnung unmittelbar brauchbar ist und in den Fällen divergiert, in welchen sich das Integral $(\bar{1})$ auf den Integrallogarithmus reduziert[67]).

Ausser den bisher betrachteten Renten treten noch *vollständige*[68]) und in arithmetischer Reihe *steigende*[69]) Renten auf. Diese spielen namentlich bei der Dividendenberechnung und bei Versicherungen mit Prämienrückgewähr eine Rolle, bei jener wird noch beim Tode ein Bruchteil der Jahresrate ausgezahlt, der der im Sterbejahre noch durchlebten Zeit proportional ist.

Die von *W. S. B. Woolhouse* gegebene Näherungsformel:[70])

$$(3) \qquad \bar{a} = a^{(r)} + \frac{1}{2r} - \frac{\mu + \delta}{12 r^2}$$

folgt aus der *Euler*'schen Summenformel (I E, Nr. **11**). Sie gilt, wenn die Sterbensintensität $\mu = \mu_x$ sich immer stetig ändert. $\delta = \log \frac{1}{v}$ heisst die *Verzinsungsintensität.* Unter *log* ist immer der *natürliche*

66) Das Ergebnis des Grenzüberganges, das man natürlich auch direkt durch partielle Integration erhält, steht bei *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 194, Formel (281).

67) Die fragliche Formel findet sich — allerdings in einer nicht sehr übersichtlichen Form — bei *E. Mc. Clintock*, Lond. Journal inst. act. 18 (1874), p. 242. Auf das Problem der numerischen Auswertung des Resultates wird zwar eingegangen, es wird aber ebensowenig wie durch eine frühere Arbeit von *Makeham* (Lond. Journal inst. act. 17 (1873), p. 305, 445), erledigt; vor allen Dingen deshalb nicht, weil die Gültigkeitsbedingungen der Formel und die Genauigkeitsgrenzen der Tabellen nicht genügend diskutiert werden. Eine zusammenhängende Darstellung der beiden Arbeiten giebt *J. J. M'Lauchlan,* Edinb. act. soc. 1 (1879), p. 44—59.

68) Den Wert der vollständigen Rente ermittelt unter Zugrundelegung der *Moivre*'schen Hypothese *T. B. Sprague* (Lond. Journal inst. act. 13 (1867), p. 363 Zeile 9), den allgemeinen Ausdruck stellt *R. H. van Dorsten* auf (Archief verzeker. 1 [1894], p. 110 Formel 15).

69) Die steigende Jahresrente drückt bereits *Tetens* durch geeignete diskontierte Zahlen aus, a. a. O. (Fussn. 63)) 1, p. 217, 222. *G. J. Lidstone* bemerkt, dass ihr Wert, wenn die n^{te} Zahlung die Höhe n hat, das Produkt von v und dem Differentialquotienten von a nach v ist (Lond. Journal inst. act. 31 (1893), p. 69).

70) *W. S. B. Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 105 letzte Zeile, p. 106 Gleichung (9). Vgl. I D 4 a, Fussn. 37.

Logarithmus zu verstehen. Aus (3) folgt die weitere Näherungsformel[71])

$$(4) \qquad a^{(r)} = a + \frac{r-1}{2r} - \frac{r^2-1}{12r^2}(\mu + \delta).$$

Setzt man r gleich dem reziproken Werte einer ganzen Zahl > 1, so wird aus (4) eine Formel der „abgekürzten Summation", welche a approximativ bestimmt[72]).

Geht man statt von der *Euler*'schen von der *Lubbock*'schen Summenformel[73]) aus, so entstehen analoge Formeln, welche Differenzen an Stelle der Differentialquotienten enthalten[74]). Diesen sämtlichen Näherungsformeln mangelt jedoch eine Abschätzung des Restgliedes. Der Praktiker beurteilt die Güte der Annäherung darnach, wie die verschiedenen Näherungsformeln unter einander übereinstimmen.

9. Einmalige Prämien für Todesfallversicherungen. (x) geht eine gemischte Versicherung (auch abgekürzte Versicherung auf den Todesfall genannt) ein, wenn er beim Tode, spätestens aber beim Alter $x + n$ (dem *Schlussalter* der Versicherung) ein Kapital von bestimmter Höhe s ausgezahlt erhält. Ist $x + n = \omega$, so entsteht die lebenslängliche Kapitalversicherung auf den Todesfall. Ist die Versicherungssumme s gleich 1, so wird die einmalige Prämie der letzteren:

$$(5) \qquad A = \frac{d_x}{l_x} v + \frac{d_{x+1}}{l_x} v^2 + \cdots = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}.$$

Sie ist z. B. bei Textbook $3\frac{1}{2}\,\%$ für das Eintrittsalter 30 gleich 0,343.

Dabei sind die diskontierten Zahlen $C_x = d_x v^{x+1}$ der Sterbenden $d_x = l_x - l_{x+1}$, sowie ihre Summen $M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega$ tabuliert (Litt.-Verz. III). Der Formel liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Versicherungssumme erst am Ende des Sterbejahres ausgezahlt wird.

---

71) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 106 Zeile 6 v. u.

72) *W. S. B. Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 11 (1864), p. 321 Formel (D). Eine zusammenhängende Darstellung der *Woolhouse*'schen Resultate findet man in der in der Fussn. 67 angeführten Arbeit von *M'Lauchlan.*

73) *J. W. Lubbock*, Cambridge Phil. Trans. 3 (1830), p. 323; vgl. *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 11 (1864), p. 309, Formel (A) und *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 18 (1875), p. 305. Vgl. auch I E, Nr. **11**, Fussn. 21.

74) Vgl. *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 22 (1879), p. 55.

Mehr der Wirklichkeit nähert sich die Annahme, dass die Versicherungssumme sofort beim Tode gezahlt wird. Die ihr entsprechende Prämie $\bar{A}$ ist, wenn man die Existenz der Ableitung l'_x von l_x voraussetzt, für $s = 1$:

$$(\bar{5}) \qquad \bar{A} = -\int_0^\infty \frac{l'_{x+z}}{l_x} v^z \, dz.$$

Partielle Summation führt A, partielle Integration $\bar{A}$ auf die einmaligen Prämien a und $\bar{a}$ der entsprechenden Leibrenten zurück. Die resultierenden Gleichungen:

$$(6) \qquad A = 1 - (1 - v)(1 + a),$$

$$(\bar{6}) \qquad \bar{A} = 1 - \delta \cdot \bar{a}$$

behalten ihre Gültigkeit, wenn A bezw. $\bar{A}$ die einmalige Prämie für die gemischte Versicherung, a bezw. $\bar{a}$ die einmalige Prämie für die temporäre Leibrente bedeuten. Natürlich müssen sich Leibrente und gemischte Versicherung auf die gleichen Eintritts- und Schlussalter und beide auf die Versicherungssumme 1 beziehen[75]).

Dem Brauche der Praxis entsprechend halten wir in diesem Referate an der Fiktion, dass die Versicherungssumme erst Ende des Sterbejahres gezahlt wird, im allgemeinen fest und beschäftigen uns nur ausnahmsweise mit den kontinuierlichen Ausdrücken[76]).

Nach ähnlichen Methoden findet man die einmaligen Prämien aller anderen Versicherungen auf 1 Leben. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf die im Litt.-Verz. unter IV genannten Lehrbücher und erwähnen nur, dass man komplizierte Versicherungen in einfachere zerlegt, deren Prämien zur Summe die Prämie der gesuchten Versicherung haben.

10. Sonstige Prämien. Sei A die einmalige Prämie irgend einer Versicherung, a der Wert der postnumerando Leibrente 1, welche

75) Die Formeln (5) und (6) giebt *R. Price*, Observations on reversionary payments, 3d ed. London 1773, p. 31. Die diskontierten Zahlen C_x und M_x hat aber erst *Tetens* (a. a. O. [Fussn. 63)] 1, p. 96). Die Gleichungen $(\bar{5})$ und $(\bar{6})$ stammen von *Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 115.

76) Thatsächlich zahlen die meisten Gesellschaften sobald wie möglich nach dem Tode. Die dem entsprechende Erhöhung (*Landré*, Math. techn. Kap. p. 102) von A nehmen aber die meisten Gesellschaften nicht vor, weil sie doch einen genügenden Aufschlag auf die Prämien legen. Ganz sicher geht man, wenn man annimmt, dass die Todesfälle alle zu Anfang des Sterbejahres stattfinden und A durch $A\frac{1}{v}$ ersetzt (französischer Usus).

ebenso läuft wie die Prämienzahlung, P die jährliche Prämie der Versicherung. Alsdann folgt aus dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung (Nr. **3**, 3):

$$(7) \qquad P = \frac{A}{1+a}.$$

Es ist also die Berechnung von jährlichen Prämien auf die von einmaligen zurückgeführt. Im besonderen folgt bei der gemischten Versicherung auf die Summe 1 aus (6):

$$(8) \qquad P = \frac{1}{1+a} - (1 - v),$$

wenn P die ganze Versicherungsdauer hindurch gezahlt wird[77]). Für Textbook $3\frac{1}{2}\,\%$, Eintrittsalter 30 ist z. B. die lebenslänglich zahlbare Jahresprämie für die Versicherung des Kapitals 1, zahlbar beim Tode, $P = 0{,}0176$.

Die Gleichung (7) gilt auch für gleichbleibende Prämienzahlung in Raten und überträgt sich auf gleichförmig steigende oder fallende Prämienzahlungen. Auch für Versicherungen mit Prämienrückgewähr ergiebt das Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung einfache Formeln zur Berechnung der Nettoprämien[78]).

Bei den Prämienzahlungen in Terminen ist jedoch zu bemerken, dass, wenn diese den Bruchteil eines Jahres betragen, die Lebensversicherungsgesellschaften die noch nicht gezahlten Raten vielfach nur *stunden*. In diesem Falle darf man zu ihrer Berechnung nicht (7) für eine entsprechende terminliche Rente a anwenden, sondern es erhöht sich die jährliche Nettoprämie P nur um soviel, als der durch die Ratenzahlung bedingte Zinsverlust beträgt. Sind dagegen die Termine Vielfache eines Jahres, so liefert die Formel (7) mit der den Terminen entsprechenden Rente a die den Versicherungsbedingungen adäquate Nettoprämie. Diese wird niedriger als das entsprechende Vielfache der Jahresprämie, die Differenz bedeutet den *Rabatt*, welcher wegen der Vorausbezahlung der Prämien auf die Nettoprämien theoretisch zu gewähren ist[79]).

Die *natürliche Prämie* erkauft die Versicherung jedesmal auf

---

77) Die Gleichung (7) giebt für Todesfall, lebenslängliche Prämie *R. Price*, Observations, 3d ed., p. 33; die allgemeine Methode wird korrekt auseinandergesetzt von *F. Baily*, The doctrine of life annuities and assurances 2, London 1813, 1, p. 348 ff.

78) Formeln für Nettoprämien bei Rückgewähr von Bruttoprämien findet man im Textbook p. 295—298. Die in den meisten Lehrbüchern allein behandelte Rückgewähr von Nettoprämien kommt in praxi überhaupt nicht vor.

79) Wegen der Formeln siehe *Landré*, Math. techn. Kap. p. 24.

1 Jahr. Bei der Todesfallversicherung auf die Summe 1 ist sie gleich vq_x und ändert sich also mit dem Alter im gleichen Sinne wie die Sterbenswahrscheinlichkeit (Nr. 4, Fig. 1). Sie ist z. B. bei Textbookgrundlagen $3\frac{1}{2}\%$ gleich 0,007 für das Alter 30, gleich 0,725 für das Alter 100.[80])

Sei m eine positive, ganze Zahl, V_m die Prämienreserve einer Versicherung von der Summe 1, m Jahre nach Beginn der Versicherung, ferner p'_m die Wahrscheinlichkeit, dass im m^{ten} Jahre die Versicherungssumme ausgezahlt wird, p''_m die Wahrscheinlichkeit, dass in ihm die Versicherung abläuft. Alsdann heisst $\Pi'_m = v(p'_m - p''_m V_m)$ die *Risikoprämie*, $\Pi''_m = vV_m - V_{m-1}$ die *Sparprämie* der betreffenden Versicherung für die Zeit von $m-1$ bis m. Sieht man von Ratenabzahlung ab, so ist die Summe von Π'_m und Π''_m gleich der zur Zeit $m-1$ gezahlten Prämie. Im besonderen ist bei den Todesfallversicherungen die Risikoprämie $\Pi'_m = vq_{x+m-1}(1-V_m)$ die natürliche Prämie für das *reduzierte Kapital* $s' = (1-V_m)$, ganz gleichgiltig, wie die Prämienzahlung P in Wirklichkeit erfolgt. Bei den Leibrenten mit einmaliger Prämie ist

$$\Pi'_m = v(p_{x+m-1} - q_{x+m-1}\,a_{x+m}).^{81})$$

---

80) Die natürliche Prämienzahlung ist von einigen amerikanischen Gesellschaften zum Geschäftsprinzip erhoben (vergl. *J. van Schevichaven,* Van leven en sterven, Utrecht 1896, deutsch von *H. Tarnke,* Leipzig und Wien 1898, p. 60). Sonst spielt sie in der Lebensversicherung nur eine geringe Rolle, wie überall da, wo die Gefahr mit der Dauer des Versicherungsvertrages steigt (wie z. B. auch bei der Invaliditätsversicherung). Dagegen ist die natürliche Prämienzahlung allgemein bei den Versicherungsarten adoptiert, bei denen das Entgegengesetzte gilt, wie z. B. bei den Sachversicherungen. Hier ist aber zu beachten, dass der Schaden zwischen 0 und seinem Maximum (hier die „Versicherungssumme" genannt) kontinuierlich variiert. Die Prämie wird also bei Sachversicherungen durch ein bestimmtes Integral mathematisch gegeben. Vgl. *Wittstein,* Das math. Risiko p. 16.

81) Die Begriffe Risikoprämie, Sparprämie, reduziertes Kapital sind rein theoretische und für die Ermittelung des Sterblichkeitsgewinnes (Nr. **17**) und des Risikos (Nr. **19** ff.) geschaffen. Sie sind hier im Texte in möglichster Allgemeinheit, in der Litteratur dagegen nur für spezielle Fälle entwickelt. Meist bezeichnet man $\frac{1}{v}\Pi'_m$ statt Π'_m als Risikoprämie. Implicite benutzt den Begriff der Risikoprämie (engl. cost of insurance) bereits *Sheppard Homans* bei der Herleitung seiner Kontributionsformel, Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 124 Zeile 6. Vgl. auch Nr. **17.** Als selbständige Grösse ist die Risikoprämie und das reduzierte Kapital von *M. Kanner* bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglich gleichbleibender Jahresprämie eingeführt, Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 355. Das Wort Risikoprämie gebraucht *Zillmer* (Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, 2. Aufl.

Bei *Rückversicherung* einer Todesfallversicherung wälzt die rückversicherte Gesellschaft jedes Risiko von sich ab, wenn sie die Reserve V_m selbst zurückstellt und verwaltet, dagegen bei der rückversichernden Gesellschaft das reduzierte Kapital s' versichert[82]). Von den eingehenden Prämien P_x verwendet sie dann die Sparprämie zur Reservebildung, die Risikoprämie zahlt sie an die rückversichernde Gesellschaft. Diese ändert sich ein wenig von Jahr zu Jahr; die ihr äquivalente einmalige Prämie ist unter dem Namen *Insurance value* von *Elizur Wright* eingeführt[83]). Sie mag *Wright's Versicherungswert* genannt werden.

11. Prämienreserve. Die Prämienreserve einer Gesamtheit ist gleich der Summe der Prämienreserven der einzelnen Versicherungen. Finden Ende des m^{ten} Versicherungsjahres sowohl Aus- als Einzahlungen statt, so werden erstere als bereits geleistet angesehen, letztere als noch zu leisten oder bereits geleistet, je nachdem die Reserve zu Ende des m^{ten} oder die zu Anfang des $m+1^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres berechnet werden soll. Die prospektive Methode (Nr. 3) liefert für die Reserve V_m zu Ende des m^{ten} Versicherungsjahres die 3 Fundamentalgleichungen:

$$(9)\qquad V_m = A_{x+m} - P_x \cdot (1 + a_{x+m}),\text{[84])}$$

$$(10)\qquad = (P_{x+m} - P_x) \cdot (1 + a_{x+m}),\text{[85])}$$

$$(11)\qquad = 1 - \frac{1 + a_{x+m}}{1 + a_x}.\text{[86])}$$

Dabei bedeutet x das Eintrittsalter, A_{x+m} die einmalige, P_{x+m} die jährliche, ebenso wie die noch zu erwartenden Prämienzahlungen

Berlin 1887, p. 179), *Kanner* sagt statt dessen a. a. O. „reduzierte Prämie". Die Sparprämie wird begrifflich von *A. Zillmer* eingeführt, Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 572, Spalte 1, Zeile 10 v. o. Das Wort ist entnommen *C. Landré*, Math. techn. Kap. p. 247. Tabellen der Risikoprämie für 17 E. G. 4% in Principles and practice, 4th ed., p. 171. Die Risikoprämie bei Leibrenten giebt in etwas abweichender Definition *G. H. Ryan*, Lond. Journal inst. act. 30 (1892), p. 189.

82) Ein anderes Verfahren schlägt *M. C. Paraira* vor, s. *C. Landré*, Math. techn. Kap., p. 343.

83) *E. Wright*, Savings bank life insurance, Boston 1872; s. auch Principles, 4th ed., p. 45.

84) *F. Baily*, The doctrine of life annuities and assurances, 2 Bde., London 1813, Teil 2, p. 458 (deutsch von *C. H. Schnuse*, Weimar 1839).

85) *J. Milne*, A treatise on the valuation of annuities and assurances, 2 Bde., London 1815, Teil 1, p. 283.

86) *D. Jones*, On the value of annuities, 2 Bde., London 1843 (deutsch von *K. Hattendorff*, Hannover 1859), Teil 1, p. 192.

zahlbare Prämie, für die sich (x) nach m Jahren die dann noch laufende Versicherung kaufen könnte, $1 + a_{x+m}$ den Wert der prän. Leibrente 1, welche ebenso läuft, wie die nach m Jahren noch zu erwartenden Prämienzahlungen. (9) und (10) gilt allgemein, (11) nur für die gemischte Versicherung und lebenslängliche Todesfallversicherung, wenn die Prämienzahlung die ganze Versicherungsdauer hindurch erfolgt. Bei einmaliger Prämienzahlung ist die jeweilige Reserve $V_m = A_{x+m}$ der Wert der noch laufenden Versicherung. Die Berechnung der Reserven ist so auf die von Prämien zurückgeführt. Im besonderen basiert auf (11) *J. Chisholm*'s Tafel[87]). Seiner Idee, (11) geometrisch zu interpretieren[88]), würden wohl *M. d'Ocagne*'s Methoden[89]) praktische Bedeutung verleihen können.

Ist $V_m < 0$, so ist $P_{x+m} < P_x$. In diesem Falle könnte also der Versicherte seine Police aufgeben und sich bei einer anderen Gesellschaft zu einer niedrigeren Prämie die noch laufende Versicherung kaufen, dadurch aber würde er der Gesellschaft einen Verlust $-V_m$ zufügen. Daher sind negative Reserven zu vermeiden. Der Praktiker ersetzt negative Reserven in der Bilanz meist durch Null.

Um V_m auch für nicht ganzzahlige m zu definieren, legt man in der Regel die *Moivre*'sche Hypothese und die Annahme zu Grunde, dass beim Tode die fällige Versicherungssumme zwar sofort zurückgestellt, aber erst Ende des Versicherungsjahres ausgezahlt wird (vgl. Nr. 9)[90]). Die Formeln (9) und (10) gelten für jedes positive m. Eine genügende Annäherung[91]) bei gebrochenem m liefert die lineare Interpolation zwischen der Anfangs- und Endreserve des betreffenden Versicherungsjahres[92]). Fasst man eine ganze Gruppe von Versicherungen zusammen[93]), so pflegt man den interpolierten Wert jeder individuellen

87) s. Litt.-Verz. III.

88) Litt.-Verz. III.

89) *M. d'Ocagne*, Nomographie, Paris 1899; *F. Schilling*, Über die Nomographie von M. d'Ocagne, Leipzig 1900.

90) Schon *Milne* berechnet (Fussn. 85) die Reserve zu einem beliebigen Zeitpunkte innerhalb des Versicherungsjahres. Genaue, den Annahmen entsprechende Formeln und einen Vergleich derselben mit verschiedenen Näherungsmethoden giebt *J. D. Mounier*, Archief verzeker. 2 (1895), p. 1.

91) *Mounier*, a. a. O. p. 22.

92) Die resultierende Formel steht in jedem Lehrbuch, so bei *Zillmer* (Litt.-Verz. IV), 2. Aufl., p. 160. Vgl. auch die Kurven, die die Änderung der Prämienreserve darstellen bei *H. A. Thomson*, Lond. Journal inst. act. 34 (1898), p. 8.

93) Um die hierdurch entstehende Additionsarbeit auf ein Minimum zu reduzieren, sind besondere Methoden erdacht. Vgl. die Lehrbücher von *Zillmer*, 2. Aufl., p. 161 ff., und *Landré* p. 288 ff., sowie *E. Blaschke*, Die Gruppenrechnung bei der Bestimmung der Prämienreserve, Wien 1886.

Reserve sogar mit der halben Summe ihres Anfangs- und Endwertes zu identifizieren[94]), mit einem mittleren Fehler, der bei Gleichmöglichkeit und Unabhängigkeit der Einzelfehler der Quadratwurzel aus der Anzahl der Summanden proportional ist[95]).

Die so approximierte Reserve lässt sich behufs bequemerer Rechnung in zwei Summanden zerlegen: 1) Das arithmetische Mittel aus den Reserven zu Ende des laufenden und des vorhergehenden Versicherungsjahres und 2) die halbe Prämieneinnahme für das laufende Versicherungsjahr. Der erste Summand bedeutet weiter gar nichts als eine Zahl, die in einer bestimmten Spalte in den Geschäftsbüchern der Bank an einer bestimmten Stelle steht, wird aber trotzdem von manchen Gesellschaften ihre Prämienreserve genannt; diese bezeichnen dann den zweiten Summanden als *Prämienüberträge* (im Sinne von *unverdienter Prämie*).

Wird die Prämie in anderen als jährlichen Terminen gezahlt, so stellen die meisten Lebensversicherungsgesellschaften gleichwohl die der jährlichen Prämie entsprechende Reserve zurück und bringen den etwaigen Rest in die Prämienüberträge.

Sind die Termine Bruchteile eines Jahres, die als gestundet gelten, so ist dies Verfahren nur eine korrekte Konsequenz der in Nr. **10** eingeführten gestundeten Prämien. Sind die Termine Vielfache eines Jahres, so ist die dieser Zahlung entsprechende Prämienreserve eine andere als die der jährlichen Prämie entsprechende thatsächlich zurückgestellte Reserve. Die Differenz (*Prämienüberträge* im Sinne von *vorausbezahlter Prämie*) ist näherungsweise gleich der Summe der vorausbezahlten Jahresprämien[96]).

Unter allen Umständen bilden also die Prämienüberträge, mag es sich um die unverdienten oder vorausbezahlten Prämien handeln, denjenigen Posten, der zu der in den Geschäftsberichten als solcher ausgegebenen Prämienreserve addiert werden muss, um die der Prämienzahlung wirklich entsprechende Prämienreserve zu erhalten. Die Prämienreserve der Geschäftsberichte möge *die kaufmännische Prämienreserve*, die nach Satz III konsequent berechnete Grösse die *mathematische Prämienreserve* genannt werden (vgl. Nr. **16**).

---

94) *Zillmer,* 2. Aufl., p. 160.

95) Zusatz des Referenten.

96) *Zillmer*, a. a. O. (Litt.-Verz. IV), p. 171, 172. In richtiger Erkenntnis der im Texte geschilderten Sachlage kommt neuerdings bei einigen Gesellschaften der Posten Prämienüberträge in ihren Rechenschaftsberichten überhaupt nicht mehr vor.

12. Abhängigkeit der Prämien und Reserven von den Rechnungselementen. Mit wachsendem Zinsfuss nehmen die einmaligen Prämien ab[97]), ebenso bei gleichbleibenden terminlichen Prämienzahlungen die Prämien aller Versicherungen auf den Erlebensfall (einschliesslich derer mit Rückgewähr der Nettoprämien) und die Prämien und Reserven der gemischten Versicherung, wenn die Prämie durch die ganze Versicherungsdauer gezahlt wird und mit dem Eintrittsalter zunimmt[98]).

Wachsen die Sterbenswahrscheinlichkeiten aller Alter von einem bestimmten Alter an, so nehmen von diesem Alter an die einmaligen Prämien bei den Erlebensfallversicherungen ab, bei den Todesfallversicherungen auf eine konstante Versicherungssumme zu, die durch die ganze Versicherungsdauer in gleicher Höhe zahlbare Jahresprämie der gemischten Versicherung nimmt zu. Dagegen kann die Prämienreserve dieser Versicherung bei durchweg wachsenden Sterbenswahrscheinlichkeiten sowohl zu- als abnehmen[99]). Im besonderen gelten für diese Versicherung, solange die Prämien mit dem Alter wachsen, die Sätze:

Satz V. Ist der Betrag, um welchen die Sterblichkeit die Prämie erhöht, ein konstanter Bruchteil der Versicherungssumme, so nimmt die Reserve ab[100]), ist er ein konstanter Bruchteil der Prämie selbst, so nimmt die Reserve zu[101]), ist er eine lineare homogene Funktion von Prämie und Versicherungssumme, so kann die Reserve sowohl wachsen als abnehmen, als konstant bleiben[102]).

Unterscheidet man die Sterblichkeit nach der Versicherungsdauer (Nr. 4), so ergiebt das Material 20 E. G. H. M. bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämie ungefähr bis zum Alter 40

---

97) *Th. J. Searle,* Lond. Journal inst. act. 28 (1890), p. 192, entwickelt a nach Potenzen von 10 $\left(\frac{1}{v} - 1\right)$ und berechnet die ersten 30 Koeffizienten für die H. M.-Tafel.

98) *Mac Fayden,* Lond. Journal inst. act. 17 p. 89, *Sutton* 17 p. 227, weitergehende Untersuchungen bei *T. B. Sprague* 21 (1878), p. 94.

99) Dieser von *T. B. Sprague* (Lond. Journal inst. act. 11 [1863], p. 90) bewiesene Satz wurde ebenso wie der folgende durch Diskussion der hypothetischen Methode (Nr. 16) gefunden, ohne zunächst mit einer höheren Sterblichkeit direkt in Verbindung gebracht zu werden. Das geschah erst durch *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 21 (1878), p. 77.

100) *C. Jellicoe,* Lond. Journal inst. act. 10 (1863), p. 330.

101) *R. Tucker,* Lond. Journal inst. act. 10 (1863), p. 320.

102) *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 93; *J. Meikle,* Lond. Journal inst. act. 23 (1882), p. 385. Weitere Sätze giebt *G. Schärtlin,* Ehrenzweig 11 (1890), Teil 2, p. 14.

höhere, später niedrigere Prämien[103]) und in der Mehrzahl der Fälle höhere Reserven[104]).

13. Verbundene Leben. Eine Versicherung auf verbundene Leben hängt vom Leben und Sterben einer Gruppe von Personen ab (Witwenrente, Waisenpension). Sind $x, y, z, \ldots$ die Eintrittsalter der einzelnen Personen der Gruppe, so werde diese durch $(x, y, z, \ldots)$, ihre Anzahl durch m bezeichnet. Die grundlegende Versicherung ist die Rente bis zum ersten Tode:

$(x, y, z, \ldots)$ kauft durch eine einmalige Prämie $a = a_{xyz\ldots}$ eine jährlich postnumerando zahlbare Leibrente 1, die mit dem ersten Tode erlischt. Die Prämie (Axiom IV und V der Nr. 2):

$$(12) \qquad a = \sum_1^\infty {}_h \frac{l_{x+h}\, l_{y+h} \ldots}{l_x\, l_y \ldots} v^h$$

ist für 2 Leben und alle ganzzahligen Alter über 9 nach der H. M.-Tafel[105]), für 2 bis 4 Leben und alle Gruppen gleichen Alters nach der Textbooktafel[106]) berechnet. Die einmaligen Prämien irgend einer anderen Versicherung werden wegen Axiom IV und V lineare Funktionen der (eventuell auch aufgeschoben und temporär zu denkenden) Renten bis zum ersten Tode[107]). Die jährlichen Prämien und Prämienreserven berechnen sich nach denselben Prinzipien wie bei einfachen Leben (Nr. 8 bis 12). Die einmalige Prämie $a_y - a_{xy}$, für die der Mann (x) seiner Frau (y) eine jährlich zahlbare Witwen-

---

103) *G. King*, Lond. Journal inst. act. 20 (1877), p. 245; *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 20 (1877), p. 105, 21 (1879), p. 229, 22 (1881), p. 391, 407.

104) *G. King*, Lond. Journal inst. act. 20 (1877), p. 247, Tabelle R; *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 22 (1881), p. 410. Die Tafeln von *J. Chisholm* (Litt.-Verz. III) lassen die nach *Sprague*'s select mortality table (Litt.-Verz. III) berechneten Prämien und Reserven für die wichtigsten Versicherungsarten ermitteln.

105) Tables deduced (Litt.-Verz. III), 3, $3\frac{1}{2}$, 4 %, p. 139. Für Government Life Annuitants: *A. J. Finlaison*, Joint-life annuity tables, London 1895, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$ %. — Versicherungen auf verbundene Leben hat vor *Moivre* (Fussn. 63) schon *Johan de Witt* betrachtet. *G. Eneström*, Archief verzekeringswet 3 (1898), p. 263.

106) Textbook p. 510 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6 %.

107) *C. J. Malmsten*, Act. math. 1 (1882), p. 63, giebt die fraglichen Reductionsformeln für konstante Versicherungssummen; *L. Lindelöf*, Act. math. 3 (1883), p. 97, behandelt auch einen Fall von veränderlichen Versicherungssummen. Wegen der Reduktion der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten vgl. Textbook Kap. II u. IV. Eine allgemeine Regel zur Aufstellung der Formeln für eine grosse Klasse von Renten (rentes de simple survivance) giebt *A. Quiquet*, Par. C. R. 111 (1890), p. 337.

rente 1 kauft, basiert auf der Annahme, dass die erste Rate Ende des Sterbejahres des Mannes und nur dann gezahlt wird, wenn die Frau zu diesem Zeitpunkt noch lebt[108]). Sie unterscheidet nicht zwischen Männer- und Frauensterblichkeit[109]).

Gilt das *Makeham*'sche Gesetz, so bestehen die Sätze:

Satz VI. Es seien $(x, y, \ldots)$ und $(w, w, \ldots)$ zwei Gruppen von gleichviel Leben, für welche $\mu_x + \mu_y + \cdots = \mu_w + \mu_w + \cdots$ ist. Alsdann ist $a_{xy\ldots} = a_{ww\ldots}$[110]).

Satz VII. $a_{xy\ldots}$ ist gleich dem Werte der entsprechenden Leibrente a_{u_1} eines einzelnen Lebens u_1 bei dem Diskontierungsfaktor v_1, wenn:

$$e^{\gamma u_1} = e^{\gamma x} + e^{\gamma y} + \cdots, \quad v_1 = e^{-(m-1)\alpha} \cdot v.$$ [111])

Die Umkehrung von Satz VI lautet:

Satz VIII. Ist für alle Alter $(x, y, \ldots)$ und ein passendes Alter w immer $a_{xy\ldots} = a_{ww\ldots}$, so folgt daraus die Gültigkeit des *Makeham*schen Gesetzes, wenn $w - x$ nur von den Differenzen der $x, y \ldots$ abhängt[112]).

Die auf 3 Leben bezogene Rente a_{xyz} der Formel (13) führt auf die entsprechende für zwei Leben zurück die:

Simpson'sche *Regel.* Sei $x < y < z$. Man bestimme ein Hülfsalter w so, dass $a_w = a_{yz}$, dann ist näherungsweise $a_{xyz} = a_{xw}$.[113])

Sie giebt im allgemeinen zu grosse Werte[114]) und wäre dann[115]) und nur dann[116]) exakt, wenn das *Gompertz*'sche Gesetz gälte.

---

108) Die Formel giebt bereits *Moivre*, Annuities upon lives, 3^d ed. London 1750, p. 19. Genauere Formeln in den Lehrbüchern. In Raten zahlbare und vollständige (Nr. 8) Witwenrenten behandelt u. a. *C. Landré* in Archief verzeker. 1 (1895), p. 371, II (1897), p. 115.

109) Zwischen Männer- und Witwen-Sterblichkeit unterscheidet *J. Karup*, a. a. O. (Litt.-Verz. VI) p. 113, 114.

110) *W. M. Makeham*, Lond. Journal inst. act. 8 (1860), p. 301.

111) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 401.

112) Die Behauptung ist oft, wenn auch nicht immer hinreichend präcis ausgesprochen, vgl. *Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 402, Textbook p. 208.

113) *Th. Simpson*, Select exercises for young proficients in the mathematics, London 1752, separate ed. 1791, p. 25.

114) *J. Milne*, A treatise on the valuation of annuities and assurances, London 1815, Bd. 2, p. 720. — Eine Verschärfung gab durch passende Abrundung von w *J. Milne* a. a. O. 1 p. 299 und durch Mittelbildungen *J. Meikle* (veröffentlicht von *J. J. M'Lauchlan*, Edinb. act. soc. 1 [1879], p. 36). Weitere Ausführungen bei *M'Lauchlan* a. a. O. p. 31.

115) *A. de Morgan*, Lond. phil. Mag. 15 (1839), p. 337.

116) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 10 (1862), p. 128 beweist, dass

Eine zweite, aber für beliebig viele Leben geltende Näherungsformel setzt die Rente a gleich der entsprechenden a_w eines Hülfsalters w, dessen Sterbensintensität $\mu_w = \mu_x + \mu_y + \cdots$ ist. Sie würde dann und nur dann exakt sein, wenn das *Gompertz'*sche Gesetz gälte[117]).

In den Sätzen VI bis VIII ruht die *praktische* Bedeutung der Gompertz'schen und Makeham'schen Formeln für die Tabulierung der Rentenwerte: Die Funktionen $a_{xyz\ldots}$ reduzieren sich auf solche von weniger Veränderlichen. Derselben Eigenschaft erfreuen sich auch alle an *Gompertz* und *Makeham* anknüpfenden verallgemeinerten Sterblichkeitsgesetze. Jene Eigenschaft kann daher, wenn hinreichend präzisiert, zur Definition einer allgemeinsten Sterblichkeitsformel dienen[118]).

III. Der Bruttofonds.

14. Zuschläge und Unkosten. Die durch den Abschluss einer Versicherung entstehenden Unkosten heissen *erste* oder *Erwerbs-Unkosten*, die übrigen *dauernde* Unkosten. Zu jenen gehören die Abschlussprovision, die der Agent für den Abschluss der Versicherung erhält (beim Todesfallgeschäft 0—2½% der Versicherungssumme und mehr), das Honorar für die ärztliche Untersuchung bei Todesfallversicherungen, Stempelausgaben, Reisespesen, zu diesen die Inkassoprovision, die der Agent beim Einkassieren der Prämien

---

das Gompertz'sche Gesetz gelten muss, wenn die Summen, durch welche sich a_w und a_{xy} darstellen, *gliedweise* übereinstimmen. Dass hieraus der Satz des Textes folgt, bemerkt *M'Lauchlan* a. a. O. p. 34. Verallgemeinerungen bei *J. Bertrand*, Par. C. R. 106 (1888), p. 1042, *A. Quiquet*, ebenda p. 1465.

117) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 399. Durch passende Begriffsbildungen ist es *Woolhouse* gelungen, sehr allgemeine Relationen zwischen den Prämien aufzustellen, die sich ebenso einfach für beliebig viele wie für 1 Leben aussprechen lassen. Im Besonderen führte ihn die konsequente Benutzung der kontinuierlichen Variabeln zu einfachen Verallgemeinerungen der in Nr. 8 und 9 entwickelten Formeln. Namentlich ist auf folgende Stellen in *Woolhouse's* Arbeiten im Lond. Journal inst. act. aufmerksam zu machen: 11 (1864), p. 322; 15 (1869), p. 105; (1870), p. 409.

118) Diese Beziehungen aufgedeckt zu haben, ist das Verdienst von *A. Quiquet*. Er sucht eine Funktion der Lebenden l, für welche sich die Wahrscheinlichkeit, dass m Personen $(x, y, z, \ldots)$ nach der Zeit h noch leben, als Funktion von $m' < m$ Veränderlichen und von h darstellt. Diese Forderung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die Ableitung der Sterbensintensität μ einer linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und von der Ordnung m' genügt. *A. Quiquet*, Par. Bull. act. franç. 4 (1893), p. 101, 111. Vgl. Fussnote 47.

bekommt (beim Todesfallgeschäft 2—3% der Jahresprämie), und die Verwaltungskosten. Den Unkosten entsprechend unterscheidet man bei dem in der Bruttoprämie P' steckenden Zuschlag $\alpha P'$ einen ersten Zuschlag $\alpha_1 P'$ und einen zweiten $\alpha_2 P'$. Jener soll gerade die ersten Unkosten aufbringen, soweit sie nicht durch eine besondere *Policengebühr* gedeckt werden, während der zweite Zuschlag, weil auch für Sicherheitsfonds und Gewinn bestimmt, normaliter die dauernden Unkosten erheblich übersteigt. Ist P die Nettoprämie, so ist $P' = P + \alpha P'$ und $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Die Höhe des α kann man für jede einzelne Police aus den Tarifen der Gesellschaft entnehmen, nachdem man die den Rechnungsgrundlagen der Gesellschaft entsprechende Nettoprämie ausgerechnet hat. Wie allerdings die Tarife zustande kommen, ist eine andere Frage. Theoretiker haben mehrfach vorgeschlagen[119]), die Zuschläge genau nach dem Risiko einer Versicherung (Nr. **19** ff.) abzustufen, was aber in der Praxis nur ganz im Rohen geschieht. Übrigens sind die Zuschläge sehr verschieden, je nachdem es sich um Tarife mit oder ohne Gewinnbeteiligung handelt. So nimmt z. B. die Kölner Concordia, die nach 23 D. G. M. I $3^1/_2$% rechnet, für die lebenslänglich gleichbleibende Jahresprämie der Todesfallversicherung beim Eintrittsalter 30, $P' = 0{,}0210$ für Versicherungen ohne und $P' = 0{,}0251$ für Versicherungen mit Gewinn pro Einheit der Versicherungssumme, was einem Zuschlag von $100\alpha = 8{,}6$ bezw. 23,5% der Bruttoprämie zur Nettoprämie $P = 0{,}0192$ entspricht[120]). Neuerdings bringt *J. D. Mounier* die Frage in Verbindung mit *Daniel Bernoulli*'s Wertlehre, indem er den moralischen Wert (I D 1, Nr. **17**) untersucht, den eine Versicherung für den Versicherten hat[121]). Die Forderung, dass dieser nicht negativ wird, ergiebt wiederum eine obere Grenze für den Zuschlag, welche in erster Annäherung dem Quadrate des mittleren Risikos der Versicherung (Nr. **19**) direkt und dem Vermögen des Versicherten umgekehrt proportional ist[122]). Hieraus

---

119) So *Th. Wittstein*, Das math. Risiko (Litt.-Verz. VI), p. 30. Einen Vergleich der Zuschläge mit dem mittleren Risiko führt an einigen Beispielen durch die Dissertation von *H. Onnen* (Litt.-Verz. VI), p. 61. Eine Arbeit von *J. H. Peek*, welche eine genaue Abstufung der Zuschläge nach dem durchschnittlichen Risiko für die einzelnen Versicherungsarten durchführt, soll demnächst in der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft erscheinen.

120) Eine jährliche Übersicht über die Tarife der deutschen Gesellschaften und ihre Dividendensysteme giebt *J. Neumann*, Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen, Berlin 1878 ff.

121) Archief verzekeringswet. 1 (1894), p. 17, 77, 145.

122) A. a. O. p. 150 ff. Die a. a. O. aus Formel (18) p. 32 folgende Beziehung zum Risiko wird von *Mounier* merkwürdigerweise gar nicht erwähnt.

folgt aber nicht, dass es moralisch ist, jemandem um so mehr Geld abzunehmen, je weniger er hat, sondern dass umgekehrt der allgemein adoptierte Grundsatz, die Höhe der Prämie nicht vom Vermögen des Versicherten abhängig zu machen, sich auch vom Standpunkte der *Bernoulli*'schen Wertlehre als sehr vernünftig erweist, weil danach die Versicherung für den Versicherten im allgemeinen einen um so höheren Wert hat, je weniger er bemittelt ist.

Eine obere Grenze für die Tarifprämie P', die bei Versicherungen mit geringem Maximalrisiko (Nr. **19**), wie denen auf den Erlebenfall, sehr tief liegen kann, ergiebt sich durch die *Maximalprämie*[123]). Um diese zu finden, unterscheide man alle bei einer Versicherung denkbaren Fälle und berechne den Wert, den in jedem von ihnen die nach den Versicherungsbedingungen zahlbare Nettoprämie haben würde, wenn der betreffende Fall immer einträte. Alsdann ist der grösste dieser Werte die Maximalprämie. Bei der Aussteuerversicherung, wo ein Kapital beim Erleben des Schlusstermins gezahlt wird, ist diese so niedrig, dass die Tarife der Praxis sie vielfach überschreiten und daher streng genommen unzulässig sind.

Für Versicherungen mit wachsender Prämienreserve, zu denen die normalen Todesfallversicherungen gehören, hat *Zillmer* ein Maximum für die ersten Unkosten einer Versicherung durch die Bedingung festgelegt, dass die eingegangenen Einnahmen an ersten Zuschlägen auch dann die Erwerbskosten decken, wenn der Versicherte sich vorzeitig von der Versicherung zurückzieht. Von dem etwa durch eine besondere Policengebühr gedeckten Teile der Erwerbskosten ist dabei natürlich abzusehen.

Reserveprämie heisst die Summe von Nettoprämie und erstem Zuschlag. *Zillmer'sche Reserve* heisst der Überschuss des Wertes der noch laufenden Versicherung über den Wert der noch zu erwartenden Reserveprämien. Ist P_{x+1} die nach den Versicherungsbedingungen zahlbare Nettoprämie, für die sich der Versicherte (x) ein Jahr nach seinem Eintritt die nun noch laufende Versicherung kaufen könnte, P_x die wirklich gezahlte Nettoprämie des (x), so ist $P_{x+1} - P_x$ *Zillmer's Maximum des ersten Zuschlags.* Das entsprechende *Maximum der ersten Unkosten* ist gleich der (notwendig positiven) Differenz von P_{x+1} und der natürlichen Prämie des ersten Versicherungsjahres. Es steigt mit dem Eintrittsalter und kann namentlich bei niedrigerem x für jede einzelne Police in praxi nicht immer ein-

123) Diesen Begriff benutzte Referent mehrfach mit Vorteil bei Vorlesungen und Gutachten.

gehalten werden. So ergeben z. B. bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglich gleichbleibender Jahresprämie und dem Eintrittsalter 30 die Textbooktafeln bei einem Zinsfuss von $3^1/_2\,\%_0$ nur $1\,\%_0$ der Versicherungssumme als Maximum der ersten Unkosten. Thatsächlich kommt es aber auch nur darauf an, dass die Erwerbskosten des Zugangs in summa die von *Zillmer* gesetzte Grenze nicht überschreiten [124]).

Der Bruchteil α_2 der Prämie, der den zweiten Zuschlag ergiebt, ist für die verschiedenen Versicherungsarten sehr verschieden. Jedenfalls muss normaliter die Bedingung erfüllt sein, dass der Wert aller für einen Versicherungsbestand gezahlten zweiten Zuschläge die auf seinen Anteil entfallenden dauernden Unkosten überschreitet. Bei Versicherungen mit sehr geringem Risiko, wie den Aussteuerversicherungen, ist das aus dieser Ungleichung sich ergebende Minimum für α grösser als das oben aus der Maximalprämie abgeleitete Maximum. Derartige Versicherungen sind daher wenig lebensfähig, wie denn in der That die Aussteuerversicherungen neuerdings einfach durch Spareinlagen (preussischer Beamtenverein, Hannover) oder durch Versicherungen mit erhöhtem Risiko (Militärdienst- und Brautaussteuerversicherungen) ersetzt werden.

Nach den vorstehenden Regeln ist auch die Höhe der Unkosten eines Geschäfts zu beurteilen; doch muss hier an Stelle der exakten Rechnung eine umsichtige Schätzung von Mittelwerten treten, da die Geschäftsberichte nicht alle Einzelheiten bringen können und genaue Rechnungen auch zu zeitraubend sein würden. Allerdings muss man verlangen, dass die Prämieneinnahme für die verschiedenen Versicherungsarten und für das alte und neue Geschäft getrennt angegeben wird und dass analog die ersten und dauernden Unkosten sich aus den Berichten ermitteln lassen. Statistiken, die, ohne auf diese Trennung Rücksicht zu nehmen, lediglich die Gesamtunkosten eines Jahres mit der Prämieneinnahme desselben vergleichen, verfolgen in der Regel besondere Tendenzen [125]).

15. Der Rückkaufswert. Stellt jemand seine Prämienzahlung ein und verzichtet dafür auf die ursprünglich ausbedungenen Ver-

---

124) Die Sätze des Textes wurden, wenn auch in etwas anderer Form, in der Schrift: *A. Zillmer*, Beiträge zur Theorie der Prämienreserve, Stettin 1863 (Litt.-Verz. VI), entwickelt. Ein Referat über diese Arbeit gab in England *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 411. Vgl. Fussn. 130.

125) Vgl. *A. Amthor*, Ehrenzweig 20 (1899), Teil 2, p. 3. Vgl. auch *A. Zillmer*, Ehrenzweig 3 (1882), Teil 2, p. 207.

sicherungsleistungen, so heisst die bare Abfindung, welche ihm die Gesellschaft dafür zu zahlen hat, der *Rückkaufswert* der Police. Mathematisch wird dieser durch die jeweilige Nettoprämienreserve plus dem Gewinnanteil (Nr. **17, 18**) gegeben, der zu dem betreffenden Zeitpunkte auf die Police entfällt. Dabei ist jedoch die durch den Rückkauf bedingte Verringerung des Versicherungsbestandes und die damit im allgemeinen verbundene Erhöhung des relativen Risikos (Nr. **21**), sowie der Kostenwert der durch den Rückkauf entstehenden Arbeit ebenfalls in Rechnung zu ziehen. Bei der Todesfallversicherung haben die hohen Abschlussprovisionen der Praxis häufig zur Folge, dass für die ersten Jahre der Versicherung ihr mathematischer Rückkaufswert negativ wird. Die Gesellschaften verlangen aber dann meistens kein Reugeld für die Aufgabe der Police, sondern vergüten nur in den ersten 3—5 Jahren einer Versicherung nichts zurück (*Verfall* oder *Storno* einer Police), dafür zahlen sie später in der Regel erheblich weniger als den mathematischen Rückkaufswert, meist auch sehr viel weniger als die Nettoprämienreserve zurück. *Elizur Wright* empfiehlt, einen bestimmten Prozentsatz (z. B. bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglich gleichbleibender Jahresprämie $8\,\%_0$) des jeweiligen *Wright*'schen Versicherungswertes (Nr. **10**) als *Rückkaufsspesen* (surrender charge) abzuziehen[126]).

Statt des Rückkaufswertes in bar wird auch eine äquivalente *prämienfreie Police* auf eine gekürzte Versicherungssumme oder Versicherungsdauer ausgestellt. Bei den Bezeichnungen der Formel (10), Nr. **11**, ist die gekürzte Versicherungssumme gleich $\left(1 - \frac{P_x}{P_{x+m}}\right)s$, wenn nach m Jahren die Prämienzahlung eingestellt wird[127]). Sie ist näherungsweise der Zahl der bereits gezahlten Prämien proportional. Im Falle einer prämienfreien Police spricht man von einer *Reduktion* der Versicherung, von einer *Umwandlung*[128]) dann, wenn — ohne dass die Prämienzahlung eingestellt wird, — die ursprünglich ausbedungene Versicherung durch eine äquivalente andere ersetzt wird. Der jeweilige Rückkaufswert giebt zugleich eine obere Grenze für die Höhe, bis zu welcher *Darlehen* auf die Police gewährt werden können.

---

126) *E. Wright*, Savings bank life insurance, Boston 1872. Vgl. *Sh. Homans*, N. Y. Am. act. soc. 2 (1891/92), p. 5 u. 6. Wegen des Einflusses der Selection vgl. Nr. **4**. Den Einfluss des Aufgebens einer Police auf das Risiko untersucht *F. Hausdorff*, Leipz. Ber. 1897, p. 540.

127) Gültigkeitsbedingungen bei *J. B. Cherriman*, Lond. Journal inst. act. 21 (1879), p. 298.

128) Tabellen hierzu: *H. W. Manly*, Tables on the basis of HM 3, $3\frac{1}{2}$, $4\,\%_0$. London, ohne Jahr.

16. Die Bilanz. Aus der Bilanz einer Gesellschaft soll in erster Linie zu ersehen sein, ob diese am Ende der Geschäftsperiode solvent ist. Im folgenden wird als Geschäftsperiode in der Regel das Kalenderjahr angenommen, was der gewöhnliche Fall ist. Eine Versicherungsgesellschaft heisst *solvent*, wenn ihr Vermögen ausreicht, um unter den von ihr adoptierten Versicherungsbedingungen ihre Verpflichtungen dauernd zu erfüllen. Setzt man eine genügende Dotierung der etwa erforderlichen Sicherheits- und Extrafonds' voraus, so ist die Solvenz dann und nur dann gewährleistet, wenn das vorhandene Vermögen mindestens den wahrscheinlichen Wert des Deckungskapitals für die künftigen Verpflichtungen erreicht. Dieses ist gleich dem Überschuss der künftig zu erwartenden Bruttoausgaben über die zu erwartenden Bruttoeinnahmen, das ist die *Bruttoprämienreserve.* Versteht man unter *Unkostenreserve* den Überschuss der zu erwartenden Unkosten über die zu erwartenden Einnahmen an Zuschlägen, so ist allgemein die Bruttoprämienreserve eines Bestandes gleich seiner Nettoprämienreserve plus seiner Unkostenreserve. Diese letztere spaltet sich wieder in eine *Reserve für erste Unkosten* plus einer *Reserve für dauernde Unkosten*, welche Begriffe sich wohl von selbst erklären.

Sind die Prämientarife einer Gesellschaft genügend individualisiert, so dass jedes Risiko eine seiner Gefahr entsprechende und seinen Anteil an den Unkosten deckende Prämie zahlt, so ist das fragliche Deckungskapital unabhängig von dem künftigen Zugang und gleich der Bruttoprämienreserve des zum Zeitpunkte der Bilanz vorhandenen Bestandes allein. Bei natürlicher Prämienzahlung (Nr. **10**, Fussn. 80) ist diese näherungsweise gleich der halben Prämieneinnahme des laufenden Versicherungsjahres plus den für spätere Jahre bereits vorausbezahlten Prämien. Dabei sind beim Eingange der Prämien bereits gezahlte Unkosten in Abrechnung zu bringen. Der erste Summand dieser Formel giebt die Prämienüberträge im Sinne von unverdienter Prämie, der zweite diejenigen im Sinne der vorausbezahlten Prämie (Nr. **11**).

Die oben definierte Unkostenreserve lässt sich ihrer Natur nach nicht genau berechnen. Die Bestimmung des Deckungskapitals verlangt daher, nicht zu hoch gegriffene obere Grenzen für sie zu finden, die zu Bedenken keinen Anlass geben. Sieht man von der früher mannigfach geübten, jetzt wohl ganz verlassenen *hypothetischen Methode*[129]) ab, so kommen hierfür wesentlich nur zwei Vèrfahren in Betracht: die *Nettomethode* und die *Zillmer'sche Methode.*

129) Diese bestand darin, dass man aus den Bruttoprämien einer bestimm-

Beiden gemeinsam ist, dass sie die Reserve für zweite Unkosten durch Null ersetzen. Die Nettomethode substituiert auch für die Reserve der ersten Unkosten den zu grossen Wert Null, und mithin an Stelle der Bruttoprämienreserve einfach die Nettoprämienreserve. Die *Zillmer*'sche Methode hingegen stellt die Reserve für erste Unkosten mit ihrem vollen negativen Werte in Rechnung, vereinigt dieselbe mit der Nettoprämienreserve zur *Zillmer*'schen Reserve (Nr. **14**) und stellt diese als Deckungskapital in die Bilanz ein. Ihre Anwendbarkeit ist an die Bedingung geknüpft, dass bei irgend einer Versicherung etwa auftretende negative *Zillmer*'sche Reserven immer durch Null ersetzt werden. Unter dieser Beschränkung, die dem *Zillmer*schen Maximum (Nr. **14**) der Erwerbskosten entspricht, ist das Verfahren einwandsfrei in allen den Fällen, in denen es die Nettomethode ist. Überlegen ist die *Zillmer*'sche Methode der Nettomethode aber dadurch, dass sie imstande ist junge Gesellschaften, die nicht von vornherein über grössere Kapitalien verfügen, in die Höhe zu bringen; alte Gesellschaften, die schon grosse Überschüsse angesammelt haben, können sie leicht entbehren. Bei der Nettomethode decken nämlich die Überschüsse des alten Geschäftes die Erwerbskosten für das neue; bei der *Zillmer*'schen Methode werden diese von den neuen Versicherten selbst allmählich amortisiert[130]).

Die Reserve für dauernde Unkosten darf aber nur so lange durch Null ersetzt werden, als Null ihre obere Grenze ist. Diese Bedin-

---

ten Versicherungsart (z. B. Todesfall, lebenslänglich gleichbleibende Jahresprämie) rückwärts eine „hypothetische" Sterbetafel berechnete, deren Nettoprämien die thatsächlichen Bruttoprämien waren. Hierauf wurden die Formeln (9)—(11) in den mannigfachsten Formen der Berechnung der Bruttoreserve zugrunde gelegt. Dass hierdurch keine obere Grenze für das gesuchte Deckungskapital gefunden werden kann, lehren die Sätze der Nr. **12**, die sich auch historisch aus der Kritik dieser Methode entwickelt haben.

130) Die Methode ist entwickelt in der oben genannten Schrift: „*A. Zillmer*, Beiträge" (Litt.-Verz. VI). Wegen der Einwendungen, die man gegen sie erhoben hat, vgl. den gegnerischen Aufsatz von *C. Heym*, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Neue Folge 5 (1882), p. 207.

Gegen *T. B. Sprague*'s Vorschlag (London Journal inst. act. 15 [1870], p. 427) die Reserve noch weiter zu kürzen und P_{x+1} durch P_{x+2} oder allgemein P_{x+n} zu ersetzen, ist an sich nichts einzuwenden, nur muss man darauf achten, dass 1) nie eine negative Reserve zurückgestellt wird, 2) die Kürzung niemals höher wird, als es der Wert der den wirklich gezahlten Unkosten entsprechenden Reserve für erste Unkosten zulässt und dass 3) nicht höhere Abschlussprovisionen gezahlt werden, als es die Prämienzuschläge vertragen.

Die Aufsichtsbehörden verhalten sich der *Zillmer*'schen Methode gegenüber sehr misstrauisch.

gung ist allerdings im Durchschnitt beim Todesfallgeschäft erfüllt, wo nur die im ganzen verschwindenden Fälle von einmaliger oder abgekürzter Prämienzahlung eine Ausnahme bilden. Anders liegt es dagegen beim Rentengeschäft; hier muss das Zurückstellen einer entsprechenden Unkostenreserve neben der vollen Nettoreserve gefordert werden [131]).

Bisher war bei der Bestimmung des Deckungskapitals angenommen, dass jedes Risiko die ihm zukommende Prämie zahlt. Das ist jedenfalls nicht der Fall, wenn bei Lebens- und ähnlichen Versicherungen vom Alter unabhängige Beiträge erhoben werden. In diesem Falle kann die Solvenz nicht nur von dem vorhandenen Bestande, sondern auch von dem späteren Zugang abhängen. Das kommt jedoch auf die Art der Beitragszahlung an. Drei Formen derselben werden gewöhnlich unterschieden:

1) *Das Umlageverfahren*, das z. B. bei vielen Sterbekassen und bei der Kranken- und Unfallversicherung des deutschen Reiches besteht. Hier werden die in einer Geschäftsperiode erwachsenen Schäden, und bei Renten nur die bereits fällig gewordenen Raten am Schlusse derselben repartiert.

2) *Das Kapitaldeckungsverfahren* (Invaliditäts- und Altersversicherung des deutschen Reiches bis zum 13./7. 1899). Hier sollen die für jede Geschäftsperiode (10 Jahre) neu festzusetzenden Beiträge die Kapitalwerte der in ihr fällig werdenden Renten aufbringen.

3) *Das Prämiendurchschnittsverfahren* (deutsche Invaliditäts- und Altersversicherung seit 13./7. 1899). Die Versicherten zahlen ein für alle mal festgesetzte, vom Alter unabhängige Durchschnittsprämien und beanspruchen dafür von der Kasse im voraus bestimmte Versicherungsleistungen. Das ist der gewöhnliche Modus bei Witwen- und Pensionskassen.

In den beiden ersten Fällen ist die Solvenz nicht vom Zugang abhängig, wohl aber im letzten. Infolge dessen muss in diesem Falle der Zugang ein obligatorischer und die Möglichkeit vorhanden sein, seine Altersgruppierung im voraus einigermassen abzuschätzen [132]).

---

131) *C. Landré*, Math. techn. Kapitel (Litt.-Verz. IV), p. 282. — Moderne Gesellschaften wie die Algemeene Maatschappij van levensverzekering en Lijfrente, Amsterdam, und der Atlas, Ludwigshafen stellen thatsächlich eine positive Unkostenreserve in die Passiva ein.

132) Vgl. die Bilanz der Göttinger Witwenkasse, *K. F. Gauss*, Werke 4. Göttingen 1880, p. 119. Bilanzen von Pensionsanstalten entwickeln ferner die in Litt.-Verz. VI genannten Monographien von *J. Karup* und *L. Lindelöf*, sowie *L. Lindelöf,* Acta societatis fennicae 13 (1882), Statistiska beräkningar angående

Aber auch bei den normalen Versicherungsgesellschaften mit nach dem Alter abgestuften Prämien übt der künftige Zugang einen gewissen Einfluss aus. Die Prämien sind auch nur Durchschnittsprämien, insofern sie ebensowenig wie die Nettoreserven mit Berücksichtigung der Versicherungsdauer berechnet werden[133]), obwohl Material genug vorhanden wäre, dies zu thun (Nr. **4**, **5**, **12**). Dies ist ein Grund für den regelmässigen Sterblichkeitsgewinn im normalen Todesfallgeschäft und Sterblichkeitsverlust im Leibrentengeschäft, der zum Teil nur durch den Zugang der letzten Jahre veranlasst wird und insoweit auch nur wegen des als sicher vorausgesetzten Zugangs der folgenden Jahre in den Gewinnfonds wandern darf.

Was die übrigen Posten der Bilanz angeht, so beschränken wir uns, wie immer im folgenden, auf den gewöhnlichen Fall der Lebensversicherung mit nach dem Alter abgestuften Prämien und nehmen an, dass die Gesellschaft ihre Prämien und Reserven nach einer gewöhnlichen, nicht nach der Versicherungsdauer trennenden Sterbetafel berechnet und als Deckungskapital ihrer künftigen Verpflichtungen die Nettoprämienreserve des vorhandenen Versicherungsbestandes in die Bilanz einstellt.

Diese Nettoprämienreserve ist allerdings im weitesten (mathematischen) Sinne als das Deckungskapital aller noch schwebenden Nettoverpflichtungen aufzufassen. Sie spaltet sich in: 1) die kaufmännische Nettoprämienreserve (Nr. **11**), 2) die Prämienüberträge (Nr. **11**) und 3) die *Schadenreserve*, in welche die bereits fällig gewor-

---

finska civilstatens enke—och pupillkassa. Weiter sind zu nennen die amtlichen Berichte in Schweden: Underdånigt betänkande angående pensionering af enkor och barn, efter prestmän och elementarlärare, Stockholm 1873; Förnyadt underdånigt betänkande angående pensionering af enkor och barn efter svenska ecclesiastikstaten, Stockholm ohne Jahr; Underdånigt betänkande med förslag angående ordnandet af arméens enke och pupillkassa, Stockholm 1881; Betänkande angående ordnandet af pensionsväsendet för statens civile tjensteinnehafvare samt för deras enkor och barn, Stockholm 1894. Von theoretischen Arbeiten über Pensionskassen nennen wir noch: *L. Lindelöf*, Acta math. 18 (1894), p. 89; *G. Eneström*, Stockh. Förhandlingar, 1891, p. 343; 1893, p. 361, 405, 623; 1894, p. 479, 561; 1895, p. 197, 243, 807. In Deutschland und Österreich existiert eine grosse Menge von Schulprogrammen, zum Teil auch Dissertationen über die Rechnungen bei Pensionskassen. Man findet derartige Litteratur in *Franz Hübl*, Systematisch geordnetes Verzeichnis der Schulprogramme Österreichs, Preussens und Bayerns, Czernowitz 1869, 2. Teil, Wien 1874.

133) Dagegen berücksichtigt die Dauer des Rentenbezuges die neueste Bilanz der Invaliditätsversicherung. Sten. Berichte des Reichstags, 10. Legisl.-Per., I. Session, Anlagebd. 1, Nr. 96, p. 106 und die Lebensversicherungsgesellschaft Atlas, Ludwigshafen. Geschäftsbericht pro 1898, p. 13.

denen, aber aus irgend einem Grunde noch nicht ausgezahlten Versicherungssummen zurückgestellt werden.

Sind nun auch die Sicherheits- und Extrafonds' genügend gespeist, so fliesst der Rest des vorhandenen Vermögens in den Gewinnfonds. Dabei wird der im nächsten Jahre zu verteilende Überschuss, dessen Berechnung durch die Statuten und die gewählten Gewinnverteilungssysteme mehr oder weniger genau festgelegt wird, gleich als besonderer Posten abgetrennt. Was übrig bleibt, kommt in die *Gewinnreserve*, die zur Regulierung der zukünftigen Dividenden bestimmt ist (Nr. **18**).

Die bisher aufgezählten Posten gehören sämmtlich zu den *Passivis*. Diesen stehen *Aktiva* in gleicher Höhe gegenüber; unter ihnen sind die Policendarlehen (Nr. **15**) und die (wegen Zahlungsfrist oder wegen Ratenzahlung) gestundeten Prämien (Nr. **10**) speziell für eine Versicherungsgesellschaft charakteristisch. Der Wert, mit welchem die gestundeten Prämien in die Bilanz eingestellt werden dürfen, ist jedenfalls kleiner als ihr Brutto- und grösser als ihr Nettobetrag.

Die Übersicht über die Aktiva und Passiva bildet die eigentliche Bilanz. Zu ihr tritt die sogenannte *„Gewinn- und Verlustrechnung“*[134]), welche über die Einnahmen und Ausgaben des Geschäftsjahres Auskunft giebt. Sie muss einmal zu verfolgen gestatten, wie aus dem Bestand zu Ende des Vorjahres sich durch die Einnahmen und Ausgaben der Bestand zu Ende des Rechnungsjahres gebildet hat, sodann aber muss sie auch die Trennung der verschiedenen Geschäftszweige, die die Gesellschaft betreibt (wie Lebensversicherung, Leibrenten, Aussteuer, Unfallversicherung, Invaliditätsversicherung) entweder selbst durchführen oder doch ihre Durchführung ermöglichen. Die gestundeten Prämien erscheinen hier implicite unter den Prämieneinnahmen und sind, wenn die „Gewinn- und Verlustrechnung“ mit der Bilanz harmonieren soll, bei den Einnahmen in derselben Höhe wie unter den Aktivis am Ende des Rechnungsjahres aufzuführen oder es muss die entsprechende Differenz unter den Ausgaben gebucht werden[135]).

---

134) Diese Bezeichnung ist kaufmännisch nicht genau; sie ist von dem preussischen Runderlass vom 8. III. 1892 (vgl. Fussn. 61) genommen. Vgl. *H. V. Simon,* Die Bilanzen der Aktiengesellschaften, 3. Aufl., Berlin 1899, p. 37.

135) Wegen der Beurteilung eines Geschäftsberichtes und der Buchführung sei ausser auf das soeben genannte *Simon*'sche Buch und *A. Cayley,* The principles of book-keeping by double entry, Cambridge 1894 noch auf die, speziell die Lebensversicherung betreffenden Schriften verwiesen von *T. B. Sprague* (Litt.-Verz. VI); *R. Schiller*, Beiträge zur Buchhaltung im Versicherungswesen, Wien und Leipzig 1898; *J. J. Mc Lauchlan*, Edinb. act. soc. 2 (1891), p. 73.

17. Der Gewinn. Der im Geschäftsjahr erzielte Gewinn wird erhalten, wenn man zum Bestande des Gewinnfonds am Ende des Jahres die im Laufe des Jahres gezahlten Dividenden addiert und davon den Bestand des Gewinnfonds zu Ende des Vorjahres abzieht. Er ist näherungsweise gleich der Summe der Gewinne aus den einzelnen Gewinnquellen. Als solche unterscheidet man:

1) *Sterblichkeitsgewinn.* Um diesen zu erhalten vermehre man die zu Anfang des Jahres vorhandenen Reserven und die im Jahre eingegangenen Nettoprämien um die rechnungsmässigen Zinsen, subtrahiere die gezahlten Schäden und Rückkaufswerte und deren rechnungsmässige Zinsen sowie die Reserven zu Ende des Jahres. Die erhaltene Differenz giebt die Summe des Gewinnes durch Sterblichkeit und des durch Rückkauf und Verfall. Berechnet man diesen nach 4), so erhält man jenen durch Subtraktion[136]).

2) *Der Zinsgewinn* ist gleich dem Ueberschuss der wirklich erzielten Zins- und Mietseinnahmen des Jahres über seine Zins- und Mietsausgaben vermindert um die rechnungsmässigen Zinsen eines Durchschnittswertes des Deckungskapitals für die noch bestehenden Versicherungen. Letzteren setzt man näherungsweise gleich der halben Summe der Prämienreserve (incl. Prämienüberträge excl. Schadenreserve) zu Anfang und Ende des Jahres; er kann selbst dann noch auftreten, wenn die wirkliche Verzinsung der Aktiva geringer ist als die rechnungsmässige.

3) *Der Gewinn aus Zuschlägen* ist die Differenz der Einnahmen aus Zuschlägen vermindert um die Unkosten des Jahres, ausschliesslich derjenigen, die sich (wie Zins- und Mietsausgaben) auf die Vermögensanlagen beziehen. Er zerfällt in einen (ev. negativen) Gewinn aus ersten und einen (positiven) Gewinn aus zweiten Zuschlägen. In der Praxis ist es nur ganz ausnahmsweise möglich, die Einnahmen

---

136) Für *Todesfallversicherungen* giebt *A. Zillmer* (Deutsche Versicher.-Zeitung 8 (1867), p. 571) auf Grund der von *M. Kanner* (a. a. O. p. 355, 534, vgl. Nr. **10** dieses Referats) eingeführten Begriffe zwei Ausdrücke für die Summe, welche in einem Jahre für Sterbefälle zur Verfügung steht. Dabei ist aber angenommen, dass Geschäfts- und Versicherungsjahr immer zusammenfallen (vgl. Nr. **10**). Unter derselben Voraussetzung ermittelt *G. H. Ryan,* Lond. Journal inst. act. 30 (1892), p. 191, die Summe, welche in einem Jahr bei *Leibrenten* durch den Tod erwartungsmässig frei wird (vgl. Nr. **10**). Praktisch brauchbare Formeln giebt *C. Landré* a. a. O. p. 344 ff. Übrigens geben die preussischen Berichte der Lebensversicherungsgesellschaften seit 1892, manche Gesellschaften (wie Gotha und Leipzig) schon seit langem jährlich einen nach 5jährigen Altersklassen gruppierten Vergleich der beobachteten Todesfälle mit den erwarteten.

aus Zuschlägen genau zu bestimmen, fast immer muss man sich mit der Abschätzung von Durchschnittswerten für α, α_1, α_2 begnügen[137]).

4) *Der Gewinn aus Rückkauf und Verfall* wird durch die Differenz der zum Zeitpunkte des Rückkaufs, bezw. Verfalls vorhandenen Prämienreserve und des gewährten Rückkaufswertes (Nr. **15**) für jede einzelne Police gegeben.

5) Die Rubrik *„sonstige Gewinnquellen“* hat vor allen Dingen die Erhöhungen und Erniedrigungen der Sicherheits- und Extrafonds', sowie die Gewinne und Verluste aus Vermögensanlagen zu berücksichtigen. Werden ferner die gestundeten Prämien zu ihrem Nettobetrag in die Bilanz eingestellt (Nr. **16**) und die Zuschläge in 3) mit Hülfe eines Durchschnittswertes für α ermittelt, so giebt das Produkt aus diesem und der Zunahme der gestundeten Prämien im Rechnungsjahre einen (scheinbaren) Verlust, der durch die gestundeten Prämien entsteht. Andrerseits ist zu bedenken, dass die in Raten zahlbaren Prämien meist hohe Aufschläge erfahren und dadurch eine oft namhafte Gewinnquelle liefern.

Die vorstehenden Ausführungen geben nur im Rohen eine Analyse des Gewinnes, ihre Durchführung im Einzelnen ist von den speziellen Verhältnissen jeder Gesellschaft abhängig. Bei manchen Posten kann man dann im Zweifel sein, welcher der verschiedenen Quellen er zuzurechnen ist; alsdann muss eine zwar willkürliche, aber genau anzugebende Festsetzung getroffen werden[138]).

Die Aufgabe, den in einem Geschäftsjahr erzielten Gewinn auf die einzelnen Policen zu verteilen, lässt sich entweder a) durch einfachere Systeme (Gewinnverteilung proportional zur Jahresprämie, zur Summe der eingezahlten Prämien, zur Prämienreserve oder, wie Gotha, ein Teil proportional der lebenslänglich gleichbleibenden Jahresprämie der entsprechenden Todesfallversicherung und der andere

---

137) Dass dabei verschiedene Arten der Mittelbildungen zu relativ wenig differierenden Ergebnissen führen, darf wohl mit *Tschebyscheff*'s Theorie der „valeurs limites des intégrales“ (Acta math. 12 [1888], p. 287) in Verbindung gebracht werden. Vgl. Fussn. 168.

138) Eine genauere Analyse der Gewinnquellen giebt *Asa S. Wing*, N. Y. am. act. soc. 1 (1889/90), p. 103. Was das Numerische anlangt, so steigt der Jahresgewinn bei den grossen deutschen Gesellschaften bis über 42 % der Brutto-Prämieneinnahme des Jahres, von ihm kommen auf die Gewinnquellen 1) bis 3) ungefähr $^1/_3$. Bei manchen Gesellschaften ist 4) eine sehr ergiebige Quelle des Gewinnes. Die Lebensversicherungsgesellschaft zu Leipzig giebt seit 1880 in ihren Berichten eine Berechnung ihrer Gewinne aus den einzelnen Quellen beim Todesfallgeschäft.

Teil proportional zur Prämienreserve) oder b) dadurch lösen, dass man der Entstehung des Gewinnes möglichst nachgeht. Das letztere thut die amerikanische *Kontributionsformel.* Diese bestimmt für jede Police, welche im Geschäftsjahre abläuft, eine Zahl D, die die auf sie entfallende Dividende sein würde, wenn keine anderen Gewinnquellen als die oben unter 1) — 3) erwähnten aufträten. Allgemein aber bestimmen die Zahlen D das Verhältniss, in dem die am Gewinn partizipierenden Policen sich in den Jahresgewinn teilen[139]).

18. **Dividenden.** Der in der vorigen Nummer behandelte Gewinnanteil, welchen das einzelne Geschäftsjahr einer Police gewährt, bestimmt die Dividende, welche dem Versicherten für dieses Jahr zuerkannt wird. Diese wird jedoch nicht sofort ausbezahlt, sondern in der Regel 1 bis 5 Jahre in dem Sicherheitsfonds der Gesellschaft zurückbehalten, um diesen auf der nötigen Höhe zu halten, und erst nach Ablauf dieser Frist wird sie entweder in bar ausgezahlt oder von der nächsten Prämie abgezogen oder zur Erhöhung der Versicherungsleistungen (dem Bonus) verwandt[140]). Die Dividendenverheissungen der Gesellschaften verlangen, wenn sie auf einigermassen soliden Grundlagen basieren sollen, die Anlage von nach dem Muster der Prämienreserve zu bildenden Gewinnreserven, deren Berechnung ein gewisses Minimum des künftigen Jahresgewinnes annehmen muss und bei den in voriger Nummer unter a) aufgeführten Systemen zu verhältnismässig einfachen Formeln führt[141]).

Eine der ältesten Formen der Lebensversicherung bildeten die *Tontinen*[142]). In dem Jahre, in welchem die Tontine begann, leistete eine ganze Gruppe von Personen eine bestimmte Einzahlung. Diese wurde nun bis zum letzten Tode in der Gruppe von der Gesellschaft

---

139) Die Kontributionsformel findet sich in den Grundzügen bereits bei *Sh. Homans,* Lond. Journal Inst. Act. 11 (1863), p. 121, wo sie auch schon auf Gewinnsammlung in fünfjährigen Perioden (Nr. 18) angewandt wird. Neuere Formeln bei *E. Mc Clintock*, Am. act. soc. 1 (1889/90), p. 137. Wegen Verteilung der Unkosten auf die einzelnen Policen vgl. *W. D. Whiting,* Am. act. soc. 2 (1891/92), p. 150; 5 (1897/98), p. 214.

140) Die Dividendensysteme der deutschen Gesellschaften sind in dem *Neumann'*schen Jahrbuch angegeben (vgl. Fussn. 120). Zahlreiche Aufsätze über Dividende und Gewinnverteilung findet man im Lond. Journal inst. act. (s. die Indices dieser Zeitschrift). Zusammenfassende Referate wurden auf dem Pariser Kongress gegeben.

141) Man findet diese Formeln bei *C. Kihm* (Litt.-Verz. VI).

142) 1653 wurde die erste Tontine in Frankreich gegründet. Vgl. *W. Karup,* Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung, Leipzig 1871, Teil 1, p. 86.

amortisiert, indem eine jährlich für die Gruppe gleichbleibende Rente gezahlt wurde, deren Einzelanteile für die schliesslich noch Überlebenden eine gewaltige Höhe erreichten. Als selbständige Versicherungen sind die Tontinen jetzt wohl verschwunden, wohl aber haben sich aus ihnen gewisse Formen der Gewinnverteilung entwickelt, bei denen die Dividende erst nach Ablauf längerer Perioden (5, 10, 15, 20, 30 Jahre) an die dann noch Partizipierenden gezahlt wird. Beim *Tontinensystem* bilden alle in einem Jahre eintretenden Mitglieder, die einer und derselben Periode angehören, eine besondere Gruppe. Am Ende der Periode werden die in der Gruppe angesammelten Gewinne — wobei der aus Rückkauf und Verfall oft die Hauptrolle spielt — unter die dann noch Partizipierenden verteilt. Man unterscheidet *Ganztontinen* und *Halbtontinen*, je nachdem bei Einstellung der Prämienzahlung während der Periode auch der Rückkaufswert oder nur die bisherigen Gewinnanteile der Police der Gruppe anheimfallen. Am Ende der Periode darf der Versicherte in der Regel seine Police aufgeben und erhält dann ihren vollen mathematischen Rückkaufswert (Nr. **15**) einschliesslich der angesammelten Dividenden ausbezahlt.

Die bei dem Tontinensystem durch die Kleinheit der Gruppen verursachten grossen Zufallsschwankungen beseitigt das System der *Gewinnansammlung*, welches den auf jede Police jährlich entfallenden Gewinnanteil nach einer der Methoden von Nr. **17** ohne Gruppenbildung aus dem Gesamtgewinn berechnet. Der Gesamtwert dieser Anteile bildet die am Ende der Periode fällige Dividende[143]).

IV. Theorie des Risikos.

19. Problemstellung. Die Rechnungen des Abschnittes II beruhen auf der Unterstellung (Prinzip II der Nr. **3**), dass bei irgend einem Versicherungsbestande die künftige Gruppierung der Todesfälle, die thatsächlich stattfindet, sich mit derjenigen deckt, die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung, d. h. auf Grund der Axiome der Nr. **2**, zum Zeitpunkte der Berechnung zu erwarten ist. Der Abschnitt III konstatiert nachträglich gewisse Abweichungen zwischen dem wirklichen und dem wahrscheinlichen Zustand. Diese fallen aber normaliter immer zum Vorteile der Bank aus (vgl. die numerischen Angaben über den Gewinn in Nr. **17**), wofür die Ursache in den Rechnungsgrundlagen (Fussn. 2 und 60), den Zuschlägen (Nr. **14**) und der

143) Die Formeln giebt *E. Mc Clintock,* Am. act. soc. 1 (1889/90), p. 137.

Nettomethode (Nr. **16**) zu suchen ist. Die Praxis führt mithin absichtlich „systematische Fehler“ ein, die im Sinne der Sicherheit zu wirken bestimmt sind. Die Theorie des Risikos[144]) abstrahiert zunächst von diesen systematischen Fehlern und setzt Rechnungsgrundlagen voraus, die im Durchschnitt der Wirklichkeit entsprechen. Sie bleibt aber nicht bei der ersten Annäherung stehen, die durch das Prinzip II der Nr. 3 gegeben wird, sondern fragt, wie die *zufälligen Schwankungen* der Sterblichkeit die finanzielle Lage eines Versicherungsbestandes beeinflussen (Nr. **3**, 4)). Dabei lehrt die Erfahrung, dass unter den normalen Verhältnissen der Lebensversicherung die beobachteten Sterblichkeitsschwankungen in ausreichender Annäherung mit denjenigen übereinstimmen, die nach den Axiomen der Nr. **2** zu erwarten sind, dass sie also in der That vom Mathematiker als „zufällige“ Schwankungen bezeichnet werden dürfen[145]). In Nr. **20**—**22** findet man die Begriffsbildungen und Sätze zusammengestellt, zu denen die Theorie des Risikos bisher geführt hat. Die Nr. **23** behandelt die Frage nach der *Stabilität* eines Versicherungsunternehmens, die wohl als das Fundamentalproblem der ganzen Theorie bezeichnet werden darf. Dabei werden diejenigen Anwendungen auf spezielle Probleme der Praxis gebracht, welche die Theoretiker von der Lehre vom Risiko bisher gemacht haben. Praktische Verwertung hat die Theorie des Risikos bisher nicht gefunden; in der That ist sie bis jetzt weder zu einem gewissen Abschluss gebracht, noch bis zu derjenigen Einfachheit durchgearbeitet worden, welche das erste Erfordernis für ihre Verwendbarkeit in der Praxis bilden würde.

---

144) Zur Einführung in die Theorie des Risikos sind zu empfehlen die unter Litt.-Verz. VI angeführte Monographie von *C. Bremiker* (1859) und ein Aufsatz von *F. Hausdorff*, Leipz. Ber. 1897, p. 497. Ausführlichere Darstellungen geben *Th. Wittstein*, Das mathematische Risiko und die Dissertation von *J. H. Peek* (Litt.-Verz. VI). Jene ist jedoch nicht immer zuverlässig, diese ausserordentlich kompliziert. Eine historische Übersicht giebt die Monographie von *K. Wagner* (Litt.-Verz. VI); Referent stimmt zwar mit den in diesem Werke ausgesprochenen Urteilen selten überein, um so wertvoller ist ihm das reichhaltige Litteraturverzeichnis gewesen, auf das auch der Leser wegen weiterer deutscher Litteratur verwiesen sei. Vgl. noch I D 1, Nr. **18**.

145) *J. H. Peek* in der Zeitschrift für Versicherungsrecht und -Wissenschaft 5 (1899), p. 169 ff.; *G. Bohlmann* in *F. Klein* und *E. Riecke*, Über angewandte Mathematik und Physik, Leipzig und Berlin 1900, p. 137 ff.; *E. Blaschke*, Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen, Statistische Monatsschrift, 1901. Wesentlich ist hier überall, dass die Grundzahlen relativ klein sind. Vgl. I D 4 a, Nr. **6**.

20. Definitionen. Gegeben sei ein Versicherungsbestand Γ einer Lebensversicherungsgesellschaft zu einem bestimmten Zeitpunkte t, etwa am Schlusse eines Geschäftsjahres. Die Rechnungsgrundlagen mögen dem wahrscheinlichen Zustande der Wirklichkeit entsprechen, von den Auszahlungen und Einzahlungen mögen vorläufig nur die Nettowerte berücksichtigt und unter Prämienreserve die mathematische Nettoprämienreserve verstanden werden (Nr. **7**, **11**). Hält ein Versicherter, der dem fixierten Versicherungsbestande angehört, mehrere Policen, so stellen wir uns vor — was offenbar zulässig ist —, dass diese zu einer einzigen Versicherung vereinigt werden. Ist jemand auch an Versicherungen auf verbundene Leben beteiligt, so denken wir uns alle Versicherungen, an denen er beteiligt ist, ebenfalls zu einer einzigen zusammengezogen. Alsdann können irgend zwei der Versicherungen des Bestandes Γ von einander unabhängig genannt werden, insofern ja die Sterbenswahrscheinlichkeiten je zweier Versicherter nach Axiom V (Nr. 2) als von einander unabhängig vorausgesetzt werden. Endlich werde wie früher so auch jetzt angenommen, dass durch den Tod fällig werdende Kapitalien erst am Ende des Sterbejahres ausgezahlt werden. Man sagt nun, es werde eine bestimmte *Gruppierung der künftigen Todesfälle* festgelegt, wenn für jeden Versicherten ein bestimmtes Versicherungsjahr vorgeschrieben wird, in dem er sterben soll. Die Anzahl μ aller logisch denkbaren Gruppierungen von Todesfällen ist alsdann eine endliche. Diese können daher nach irgend einem Prinzip in eine Reihe geordnet und numeriert werden. Dabei muss auf eine erschöpfende Aufzählung und lauter sich ausschliessende Einzelfälle geachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{q}_n$, die der n^{ten} dieser Gruppierungen zukommt, ist durch die Axiome der Nr. 2 bestimmt. Man betrachte nun irgend eine Periode (t_1, t_2), die zum Zeitpunkte $t_1 > t$ beginnt und mit einem Zeitpunkte $t_2 > t_1$ abläuft. Man versteht dann unter den *Ausgaben* $\mathfrak{A}$ dieser Periode die Auszahlungen an Versicherungssummen, die in ihr fällig werden, und die Prämienreserven, die zu Ende des Zeitraumes noch zurückzustellen sind. Dagegen werden die *Einnahmen* $\mathfrak{E}$ der Periode von den Einnahmen an Nettoprämien und den zu Anfang der Periode vorhandenen Prämienreserven gebildet. Die Werte dieser Grössen sind dabei auf den Zeitpunkt t der Berechnung zurückzudiskontieren[146]. Im Besonderen entspricht einer gegebenen Gruppierung n der Todesfälle ein bestimmter Wert $\mathfrak{A}_n$ der Ausgaben $\mathfrak{A}$ und ein bestimmter Wert $\mathfrak{E}_n$ der Einnahmen $\mathfrak{E}$ in dieser Periode. Man spricht nun von

146) Vgl. Nr. 7 und Fussnote 61 dieses Artikels.

einem Risiko, das der zur Zeit t vorhandene Versicherungsbestand Γ für eine gegebene Periode (t_1, t_2) läuft, und unterscheidet:

1) den Gewinn des Bestandes $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$[147]), der einer vorgeschriebenen Gruppierung n der Todesfälle entspricht. Er kann positiv oder negativ sein;

2) die beiden *extremen Risiken*, nämlich das Maximum von $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$ als das *maximale Risiko der Gesellschaft gegenüber dem Versicherungsbestande* Γ und das Maximum von $\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}_n$ als *das maximale Risiko von* Γ *gegenüber der Gesellschaft*[148]);

3) die beiden *durchschnittlichen Risiken*[149]), nämlich das *durchschnittliche Risiko der Gesellschaft gegenüber* Γ:

$$\mathfrak{D}' = \sum_{\mathfrak{A}_n > \mathfrak{E}_n}^{n} \mathfrak{q}_n (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n)$$

und das *durchschnittliche Risiko von* Γ *gegenüber der Gesellschaft:*

$$\mathfrak{D}'' = \sum_{\mathfrak{E}_n > \mathfrak{A}_n}^{n} \mathfrak{q}_n (\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}_n);$$

4) das *mittlere Risiko* $\mathfrak{M}$ des Versicherungsbestandes Γ für die Periode (t_1, t_2), das durch die Gleichung:

$$\mathfrak{M}^2 = \sum_{0}^{\mu} {}^{n} \mathfrak{q}_n (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n)^2$$

definiert wird[150]).

---

147) Manche Autoren führen hier den Begriff einer wahren Prämienreserve ein. So *J. H. Peek* (Diss. p. 77).

148) Der Sache nach findet sich der Begriff der extremen Risiken bei *N. Tetens,* Einleitung zur Berechnung der Leibrenten, Teil 2, Leipzig 1786. Auf p. 142 und 143 a. a. O. fragt nämlich *Tetens* nach dem grössten denkbaren Gewinn oder Verlust, den der Versicherte bei einer Leibrente, die er gegen einmalige Prämie gekauft hat, erleiden kann. Das dort auf p. 152 eingeführte „grösste Risiko" ist aber etwas anderes. Die *Tetens*'sche Darstellung klebt jedoch durchweg an der Fiktion, dass die Werte der Auszahlungen ganze Zahlen sind. Nach *Tetens* ist der Begriff der maximalen Risiken ganz in Vergessenheit geraten. Er hängt aber eng zusammen mit der in Nr. **14** eingeführten Maximalprämie.

149) *N. Tetens* berechnet a. a. O. p. 143, 144 den durchschnittlichen Gewinn und den durchschnittlichen Verlust, den der Versicherte bei einer gegen einmalige Prämie gekauften Leibrente zu erwarten hat. Er legt dabei wieder die in Fussnote 148 erwähnte Fiktion zu Grunde. Die korrekte Definition geht auf *M. Kanner* zurück (a. a. O. und Berl. Journal Kolleg. Lebensv. 2 (1871), p. 1).

150) Das mittlere Risiko ist von *C. Bremiker* (Litt.-Verz. VI) 1859 in die Lebensversicherung eingeführt. Seine Arbeit ist jedoch nicht verstanden, vielmehr bis in die jüngste Zeit die selbständige Bedeutung des mittleren Risikos in der Lebensversicherung verkannt worden. Eine Ausnahme in letzterer Hin-

Unter diese Definitionen subsumieren sich alle bisher betrachteten Risikobegriffe als spezielle Fälle: Man lässt den Versicherungsbestand Γ auf eine einzige Versicherung zusammenschrumpfen und erhält das *Risiko einer einzelnen Versicherung für die fixierte Periode.* Identifiziert man dabei t und t_1 mit dem Beginn der Versicherung, t_2 mit ihrem Schlusstermin (wozu es genügt $t_2 = \infty$ zu setzen), so entsteht das *Risiko der Versicherung* schlechthin[151]). Wählt man dagegen, während $t_2 = \infty$ bleibt, $t = t_1 = m$, wo m die Zahl der Jahre bedeutet, die die Versicherung schon gelaufen ist, so erhält man das *fernere Risiko der noch laufenden Versicherung*[152]). Auf der anderen Seite kann man den Versicherungsbestand Γ allgemein gegeben sein lassen, die Periode (t_1, t_2) aber spezialisieren. Im Besonderen liefert die Wahl $t_1 = t$, $t_2 = t + 1$ das *Risiko eines Versicherungsbestandes für das nächste Geschäftsjahr*[153]). Natürlich sind in allen diesen Fällen wieder die verschiedenen unter 1) bis 4) aufgeführten Begriffe zu unterscheiden, unter denen jedoch nur das durchschnittliche und das mittlere Risiko in der Litteratur eine Rolle spielen.

Bezeichnet ferner A den wahrscheinlichen Wert der in der Periode von Γ zu erwartenden Prämieneinnahmen, so heisst

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{M}}{A}$$

das *relative* Risiko von Γ in der Periode (genauer das relative mittlere Risiko), während $\mathfrak{M}$ im Gegensatz dazu das *absolute* (genauer das absolute mittlere) Risiko genannt wird[154]). Wenn im folgenden von Risiko ohne besonderen Zusatz geredet wird, ist immer das absolute Risiko gemeint.

21. Das mittlere Risiko. Sei $\mathfrak{M}$ das mittlere Risiko, das irgend ein Versicherungsbestand Γ, der zur Zeit t vorhanden ist, in einer

sicht bildet die in Fussn. 144 citierte Arbeit von *Hausdorff*, der auch die unterscheidende Benennung „durchschnittliches" und „mittleres" Risiko entnommen ist, und der Aufsatz von *Gram* (Fussn. 159).

151) Dieses wurde von *Tetens* (1786) eingeführt und von *Bremiker* (1859) zuerst für einzelne Fälle berechnet. Vgl. Fussn. 159.

152) Seine Einführung verdankt man der Monographie von *Th. Wittstein,* Das math. Risiko (1885) [Litt.-Verz. VI], p. 30.

153) *M. Kanner,* Deutsche Versicherungszeitung 1867, p. 345. Die im selben Jahre erschienene Mathematische Statistik von *Th. Wittstein* (Litt.-Verz. VI) gelangt zur Definition dieses Risikos nur für den Fall der natürlichen Prämienzahlung (Nr. **10** dieses Berichtes).

154) Das relative Risiko einer Versicherung, berechnet zum Beginn der Versicherung für die ganze Versicherungsdauer, führt *Bremiker* (1859) a. a. O. p. 39 ein. Eine andere Definition giebt *Hausdorff* a. a. O. p. 510.

bestimmten Periode (t_1, t_2) läuft. Sei i die i^{te} der unabhängigen Einzelversicherungen, in die der Bestand nach Nr. **19** zerlegt werden kann, s_i ihre Versicherungssumme, $\mathfrak{M}_i$ ihr auf die Versicherungssumme 1 bezogenes mittleres Risiko, das den Zeitpunkten t, t_1, t_2 entspricht. Alsdann ist:

$$\mathfrak{M}^2 = \sum^i \mathfrak{M}_i^2 \cdot s_i^2, \tag{13}$$

wo die Summe über alle Einzelversicherungen zu erstrecken ist[155]. Im Besonderen ergiebt sich als mittleres Risiko eines Bestandes von Todesfallversicherungen für das nächste Geschäftsjahr:

$$\mathfrak{M}^2 = \sum^i p_i q_i s_i'^2 v^2,$$

wo bei der Summation die gemischten Versicherungen auszuschliessen sind, die nur noch ein Jahr oder weniger bis zu ihrem Schlusstermin zu laufen haben. q_i bedeutet die Sterbenswahrscheinlichkeit, p_i die Überlebenswahrscheinlichkeit, s_i' das reduzierte Kapital, die dem Versicherten (i) zur Zeit t für das nächste Geschäftsjahr zukommen[156].

Zwei Versicherungen heissen gleichartig, wenn sie zur gleichen Zeit bei dem gleichen Eintrittsalter auf die gleiche Versicherungssumme und unter den gleichen Versicherungsbedingungen abgeschlossen werden. Aus Formel (13) folgt, dass allgemein das mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ eines Bestandes von gleichartigen Versicherungen der Quadratwurzel aus der Anzahl L der unabhängigen Versicherungen proportional ist[157]. Das absolute Risiko konvergiert daher mit wachsendem L gegen Unendlich, das relative gegen Null. Sind die Versicherungssummen verschieden, aber die Versicherungen sonst gleichartig,

---

155) Diese Gleichung folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Satze von *C. F. Gauss*, Artikel 18 der Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, Göttingen 1821; s. *Gauss*' Werke 4, zweiter Abdruck 1880, p. 19. Dass es sich hier um Summen statt um Integrale handelt, ist ein unwesentlicher Unterschied. Die Anwendbarkeit des Satzes auf einen Versicherungsbestand scheint zuerst *C. Raedell*, Vollständige Anweisung, die Lebensfähigkeit von Versicherungsanstalten zu untersuchen, Berlin 1857, p. 227, ausgesprochen zu haben.

156) *K. Hattendorff*, Rundschau der Versicherungen 18 (1868), p. 150, 171.

157) Im Grunde genommen kommt dieser Satz auf das Theorem der abstrakten Wahrscheinlichkeitsrechnung hinaus, nach welchem die mittlere Abweichung der Quadratwurzel aus der Zahl der Versuche proportional ist — ein Resultat, das bereits *S. Laplace* geläufig war (Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, Livre II, Chapitre III et IV). Seine Anwendung auf das Versicherungswesen giebt zuerst *C. Raedell*, a. a. O. p. 228.

so wird bei gegebener Gesamthöhe der versicherten Summen das mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ des Bestandes ein Minimum, wenn alle Versicherungssummen einander gleich sind[158]).

Die Formel (13) führt die Berechnung des mittleren Risikos eines Bestandes auf die des mittleren Risikos einer einzelnen Versicherung zurück. Für dieses ergeben sich aber unmittelbar aus der Definition für alle Versicherungsarten der Praxis, mögen sie sich auf einzelne oder verbundene Leben beziehen, einfache Formeln, deren numerische Auswertung durch Einführung gewisser diskontierter Hülfszahlen leicht möglich ist. Ist z. B. $\mathfrak{M}_m(a_x)$ das mittlere fernere Risiko der temporären, jährlich zahlbaren Leibrente 1, $\mathfrak{M}_m(A_x)$ das der entsprechenden gemischten Versicherung mit einmaliger Prämie, $\mathfrak{M}_m(P_x)$ das derselben Versicherung mit während der Versicherungsdauer gleichbleibender Jahresprämie, so bestehen die Relationen:

$$(14)\quad (1-v)\,\mathfrak{M}_m(a_x) = \mathfrak{M}_m(A_x) = \mathfrak{M}_m(P_x)\cdot(1-A_x) = \sqrt{A^{(2)}_{x+m} - A^{2}_{x+m}}$$

aus denen sich einfache begriffliche Folgerungen herauslesen lassen. Dabei bedeutet $A^{(2)}_{x+m}$ das, was aus A_{x+m} wird, wenn man v durch v^2 ersetzt[159]). Für die Textbookgrundlagen $3\frac{1}{2}\,\%$ ist z. B. bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung $\mathfrak{M}_0(A_{30}) = 0{,}20$.

Teilt man endlich das oben betrachtete mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ des

158) Dank dem in Nr. **14** konstatierten Zusammenhange zwischen mittlerem Risiko und moralischer Prämie darf man sagen, dass *Daniel Bernoulli*'s Beispiel aus der Seeversicherung (Specimen theoriae novae de mensura sortis, St. Petersburg 1738, deutsch von *A. Pringsheim*, Leipzig 1896, p. 44) den hieraus fliessenden Grundsatz von der „Verteilung der Gefahr“ enthält. Übrigens findet man den Satz für den Fall eines Geschäftsjahres und natürliche Prämienzahlung bei *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 333.

159) Für $m = 0$ hat die fraglichen Formeln *C. Bremiker* aufgestellt und bewiesen (a. a. O. p. 39). Für $m = 0$ giebt zwar *Th. Wittstein* die richtigen Relationen zwischen den drei Risiken an (das math. Risiko, a. a. O. p. 77, 79, 89) sowie die Beziehungen, die zwischen den $\mathfrak{M}_m$ und $\mathfrak{M}_0$ bestehen (a. a. O. p. 87). Die independente Darstellung der $\mathfrak{M}_m$, die nun aus *Bremiker*'s Formeln folgt, ist jedoch fehlerhaft (a. a. O. p. 71 und 77), weil er zwar die Formel (15) benutzt, aber unter die Einnahmen und Ausgaben in Unbekanntschaft mit *Kanner*'s und *Hattendorff*'s Arbeiten (vgl. die Fussnoten 61, 81, 160) die Reserven nicht einbezieht. Eine einwandsfreie Darstellung giebt *Hausdorff,* a. a. O. p. 536—540. Numerische Tabellen für die zur numerischen Rechnung erforderlichen diskontierten Hülfszahlen findet man für niederländisches Material in der Dissertation von *Onnen* (Litt.-Verz. VI), p. 106 ff. und am Schluss der *Peek*'schen Dissertation (Litt.-Verz. VI). Unter Benutzung von kontinuierlichen Variabelen bestimmt das mittlere Risiko *J. P. Gram*, Tidsskrift for Mathematik og Physik, 5[te] Raekke, 6[te] Aargang (1889), p. 97.

zur Zeit t vorhandenen Versicherungsbestandes Γ für die Zeit (t_1, t_2) in ein solches $\mathfrak{M}_{13}$. für die Zeit (t_1, t_3) und ein solches $\mathfrak{M}_{32}$ für die Zeit (t_3, t_2), wo $t_1 < t_3 < t_2$ ist, so gilt auch jetzt wieder der Satz von der Addition der Quadrate[160]):

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}_{13}^2 + \mathfrak{M}_{32}^2. \tag{15}$$

Hierdurch reduziert sich aber die Bestimmung des ferneren mittleren Risikos irgend einer Versicherung und daher auch die des ferneren mittleren Risikos irgend eines Versicherungsbestandes auf die Berechnung des mittleren Risikos einer einzigen Versicherung für ein einzelnes Jahr.

22. Das durchschnittliche Risiko. Aus dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung folgt, dass für irgend einen Versicherungsbestand Γ und irgend eine Periode das durchschnittliche Risiko $\mathfrak{D}'$ der Gesellschaft gegenüber Γ gleich dem durchschnittlichen Risiko $\mathfrak{D}''$ von Γ gegenüber der Gesellschaft ist[161]). Sein gemeinsamer Wert heisst daher schlechthin das durchschnittliche Risiko des Versicherungsbestandes Γ für die betreffende Periode. Bezeichnet man ihn durch $\mathfrak{D}$, so ist also:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}''.$$

Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung berechnet sich sehr einfach für diejenigen Versicherungsarten, auf welche sich die Formel (14) bezieht. Sei allgemein eine Versicherung gegeben, die bereits m Jahre läuft und bei welcher die Differenz $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$ durch einen in n stetigen Ausdruck gegeben wird, der mit wachsendem n beständig wächst oder beständig abnimmt, alsdann heisst die positive reelle Wurzel $\varkappa$, welche der Gleichung $\mathfrak{A}_\varkappa - \mathfrak{E}_\varkappa = 0$ genügt, die *kritische Zahl* der noch laufenden Versicherung[162]). Diese kritische

---

160) Die Auffindung des in Formel (15) ausgesprochenen Gesetzes der quadratischen Zusammensetzung hat man *K. Hattendorff* zu danken, Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 172, Formel (9). Trotz seiner Wichtigkeit ist es später mehrfach wieder vergessen worden, sodass *Wittstein* den in Fussn. 159 angeführten Fehler machen konnte. Fast alle Schriftsteller der Versicherungslitteratur behaupten übrigens, dass, wer die Formeln (13) oder (15) benutzt, die „Methode der kleinsten Quadrate" anwendet. Referent ist der Meinung, dass man mit demselben Rechte behaupten kann, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks werde aus den Katheten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Vgl. jedoch *Bremiker,* a. a. O. p. 13—15.

161) Dieser Satz ist in voller Allgemeinheit von *M. Kanner* ausgesprochen, Deutsche Vers.-Zeitung 8 (1867), p. 378.

162) Der Begriff der kritischen Zahl wurde ohne eine Benennung in spe-

Zahl hat bei den drei Versicherungen der Formel (14) den nämlichen Wert[163]) und es übertragen sich die für das mittlere Risiko $\mathfrak{M}_m$ zwischen ihnen bestehenden Relationen auch auf das fernere durchschnittliche Risiko $\mathfrak{D}_m$ derselben Versicherungen[164]):

$$(16) \qquad (1-v)\,\mathfrak{D}_m(a_x) = \mathfrak{D}_m(A_x) = \mathfrak{D}_m(P_x)\cdot(1-A_x).$$

Andrerseits berechnet sich $\mathfrak{D}_m(A_x)$ mühelos, weil man die kritische Zahl $\varkappa$ dieser Versicherung aus der Gleichung $v^{\varkappa} = A_{x+m}$ findet. Die numerische Berechnung der durchschnittlichen Risiken dieser drei Versicherungen bietet also keine Schwierigkeiten[165]).

Das durchschnittliche Risiko einer Versicherung:

$$\mathfrak{D} = \sum_{\mathfrak{A}_n > \mathfrak{E}_n}^{n} \mathfrak{q}_n(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n)$$

kann als die einmalige Prämie betrachtet werden, für die die Gesellschaft sich gegen einen durch die betreffende Versicherung möglichen Verlust bei einer zweiten Gesellschaft *rückversichert*. Diese kann sich wieder bei einer dritten Gesellschaft für die einmalige Prämie:

$$\mathfrak{D}^{(1)} = \sum_{\mathfrak{A}_n > \mathfrak{E}_n + \mathfrak{D}} \mathfrak{q}_n(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n - \mathfrak{D})$$

rückversichern. Denkt man sich dies Verfahren unbegrenzt fortgesetzt, so entsteht eine unendliche Reihe von lauter positiven, beständig abnehmenden Gliedern:

$$\mathfrak{D},\ \mathfrak{D}^{(1)},\ \mathfrak{D}^{(2)},\ \ldots$$

die immer konvergiert und deren Summe gleich dem maximalen

---

ziellen Fällen von *C. Bremiker* eingeführt, Das Risiko (1859), p. 12. Der Name „kritische Zahl" stammt vom Referenten, *Landré* sagt dafür „mathematische Dauer der Versicherung", Math. techn. Kap., p. 328. Natürlich überträgt sich der Begriff auch auf einen ganzen Versicherungsbestand.

163) *Th. Wittstein,* Das mathematische Risiko (1885), benutzt diesen Satz stillschweigend bei Herleitung der Relationen (16). *M. Mack* beweist ihn, Ehrenzweig 12, Teil 2, p. 11. Die im Texte gegebene Formulierung ist für die gemischte Versicherung mit einmaliger und der mit jährlich gleichbleibender, bis zum Ablauf der Versicherung zahlbarer Jahresprämie von *C. Landré* gegeben worden, Math. techn. Kap., p. 329.

164) *Th. Wittstein* giebt diese Relationen für den Fall von lebenslänglichen Versicherungen, a. a. O. p. 28, 30, 32. *M. Mack* überträgt sie a. a. O. p. 9 ff. auf temporäre Leibrenten und gemischte Versicherungen. In dieser Arbeit findet man auch weitere Beispiele, u. a. auch verbundene Leben behandelt.

165) Das Gegenteil ist seit *Th. Wittstein* (a. a. O. p. 24) vielfach behauptet worden, weil die kritische Zahl wieder in Vergessenheit geraten ist. Die Gleichung $v^{\varkappa} = A_{x+m}$ findet man aber für $m = 0$ bei *Landré* wieder, a. a. O. p. 328.

Risiko ist, das die erste Gesellschaft bei der ursprünglichen Versicherung dem Versicherten gegenüber läuft[166]). Betrachtet man statt der ganzen Versicherung nur ein einzelnes Versicherungsjahr, so ist bei einer Todesfallversicherung bis auf den Diskontierungsfaktor v das maximale Risiko die Differenz von reduziertem Kapital und Risikoprämie, das durchschnittliche aber das Produkt aus der Risikoprämie und der Sterbenswahrscheinlichkeit des betreffenden Jahres. Hierdurch ist der Anschluss an die Ausführungen über Rückversicherung in Nr. **10** erreicht.

Nach dem durchschnittlichen Risiko einer Versicherung werden von Theoretikern auch die *Zuschläge* abgestuft, für die andrerseits das maximale Risiko der Gesellschaft gegenüber dem Versicherten eine obere Grenze festlegt (vgl. Nr. **14**).

Die Bestimmung des durchschnittlichen Risikos einer Gruppe von Versicherungen ist genau nur für ganz spezielle Fälle gelungen[167]). Man bedient sich meist asymptotischer Näherungsformeln, die für eine grosse Anzahl von Versicherungen gelten und auf dem *Gauss*schen Fehlergesetz basieren. Sei nämlich L die Anzahl der Versicherungen des Bestandes, $\mathfrak{M}$ sein auf irgend eine Periode bezogenes mittleres Risiko, $\mathfrak{D}$ das entsprechende durchschnittliche Risiko, $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$ der Überschuss der „Ausgaben" dieser Periode über die „Einnahmen", der einer bestimmten Gruppierung der Todesfälle entspricht. Setzt man nun:

$$\frac{\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n}{\sqrt{L}} = z, \quad k = \sqrt{\frac{L}{2}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{M}}, \quad \Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ dafür, dass z absolut kleiner als eine vorgeschriebene Zahl x bleibt, durch $\varphi(x) = \Theta(kx) + \varepsilon$ gegeben, wo ε eine kleine Grösse ist. Denkt man sich, dass die Anzahl L der Versicherungen unbegrenzt wächst, während k sich nicht ändert und die extremen Risiken jeder Einzelversicherung zwischen

166) Die Auffassung des durchschnittlichen Risikos als Rückversicherungsprämie stammt von *Th. Wittstein,* Ehrenzweig 8 (1887), Teil 2, p. 3. Dort findet sich auch die Idee der unbegrenzten Fortsetzung des Verfahrens. Der Satz, dass die Reihe $\mathfrak{D} + \mathfrak{D}^{(1)} + \cdots$ immer konvergiert und das maximale Risiko darstellt, ist von *Th. Wittstein* aber nur für den speziellen Fall ausgerechnet, dass nur ein einziges Ereignis und nur ein einziger Preis in Frage kommt, a. a. O. p. 5. Der allgemeine Satz lässt sich sehr elegant ohne Rechnung beweisen.

167) So ermittelt *K. Hattendorff,* Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 437, das durchschnittliche Risiko für beliebig viele gleichartige Todesfallversicherungen, die gegen natürliche Prämie auf 1 Jahr abgeschlossen sind.

festen Grenzen enthalten bleiben, so konvergiert nach einem Satze von *Tschebyscheff* ε gegen Null[168]). Daher approximieren die Ver-

---

168) Es handelt sich hier nicht um einen Spezialsatz der Versicherungsmathematik, sondern um ein Fundamentaltheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf das bereits in Fussn. 14 hingewiesen wurde und das für die verschiedenen Anwendungsgebiete wie Glücksspiel, numerisches Rechnen, Gastheorie grundlegende Bedeutung hat. Indem wir wegen vollständigerer historischer Angaben auf p. 65—84, 164—168, 193 des in Fussn. 14 citierten *Czuber*'schen Referates verweisen, bemerken wir hier nur das Folgende.

Die ungenaue Form $\varphi(x) = \Theta(kx) + \varepsilon$ giebt bereits *S. Laplace* (Théorie analytique des probabilités 1812, Livre II, Chapitre III, IV), er approximiert sogar ε durch die ersten Glieder einer Reihenentwickelung. Sein Hülfsmittel bildet die *erzeugende Function* [I D 1, Nr. **6**; I E, Nr. **4**]. Um nachzuweisen, dass ε mit unbegrenzt wachsendem μ gegen Null konvergiert, bedient sich *P. Tschebyscheff* und nach ihm *A. Markoff* der von ihnen geschaffenen *théorie des valeurs limites des intégrales* (Lehrbuch *C. Possé,* Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St. Pétersbourg 1886), die als eine moderne Erweiterung von *Laplace*'s Theorie der erzeugenden Funktionen aufgefasst werden darf. Das Bindeglied zwischen beiden Theorien bildet das *Problem der Momente.*

Ist nämlich $f(x)$ irgend eine reelle, nicht negative Funktion der reellen Variabeln x, die integrierbar ist zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so heissen die Grössen $c_\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\alpha f(x)\,dx$, wo α eine positive ganze Zahl ist, die Momente dieser Funktion. Unter der erzeugenden Funktion von $f(x)$ versteht man den Ausdruck $E(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x)\,dx$. Mit den Momenten c_α ist formal die erzeugende Funktion gegeben und umgekehrt, weil:

$$E(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_\alpha\, c_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!}.$$

Es fragt sich nun aber — und dies ist das Problem der Momente — inwieweit die c_α auch die Funktion $f(x)$ bestimmen. Diese Frage ist von *T. J. Stieltjes* (Toulouse, Annales de la faculté 8 (1894), p. 93 ff.) erledigt [wegen ihrer physikalischen Bedeutung vgl. *H. Poincaré*'s Referat, Par. C. R. 119 (1894), p. 630]. Es folgt daraus im Besonderen, dass das zwischen $-x$ und $+x$ genommene Integral einer Funktion $f(x)$, deren sämtliche Momente mit denen von $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2}$ übereinstimmen, notwendig mit $\Theta(kx)$ identisch sein muss, ein Resultat, das bereits aus den von *Tschebyscheff*, Acta math. 12 (1889), p. 322 gegebenen Formeln sich ergiebt.

Die théorie des valeurs limites des intégrales giebt nun nur die ersten p Momente $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$ und berechnet aus ihnen zwei rationale Funktionen von x, welche eine untere und eine obere Grenze für das Integral von $f(x)$ abgeben. Die fraglichen Ungleichungen wurden zuerst von *Tschebyscheff* ohne Beweis angegeben [J. de math. (2) 19 (1874), p. 157] und von *A. Markoff* verallgemeinert und bewiesen (*A. Markoff*, Sur quelques applications des fractions contisicherungsmathematiker das durchschnittliche Risiko $\mathfrak{D}$ eines Versicherungsbestandes immer durch den dem *Gauss*'schen Fehlergesetz entsprechenden Ausdruck $\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{2\pi}}$ und führen so seine Berechnung auf die des mittleren zurück[169]).

23. Die Stabilität[170]). Aus dem Vorstehenden folgt, dass eine Gesellschaft, deren Rechnungsgrundlagen im Durchschnitt der Wirklichkeit entsprechen, sich ruinieren würde, wenn sie zu ihren Netto-

---

nues, St. Pétersbourg 1884, Math. Ann. 24 (1884), p. 172). Speziell entwickelt *Tschebyscheff* [Acta math. 12 (1889), p. 322] eine Formel, durch welche sich die Abweichung des $\int f(x)\,dx$ von $\Theta(kx)$ abschätzen lässt, wenn die ersten $2p$ Momente beider Funktionen übereinstimmen. Der im Texte angeführte Satz verlangt aber zu beweisen, dass $\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(x)\,dx$ gegen $\Theta(kx)$ konvergiert, wenn man nur weiss, dass die Momente von $f(x)$ gegen die von $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2}$ in der aus den Voraussetzungen sich ergebenden Weise *konvergieren*. Diese Behauptung bildet den Satz von *Tschebyscheff* in Acta math. 14 (1891), p. 307. Der Beweis hierfür wurde von *Tschebyscheff* a. a. O. angestrebt und von *A. Markoff* durchgeführt [Petersburg, Bull. 9 (1898), p. 435]. Referent ist jedoch der Meinung, dass diese Betrachtungen bei der Kompliziertheit der ganzen Frage noch der Nachprüfung bedürfen, ob sie und eventuell unter welchen noch einzuführenden Beschränkungen sie als zwingend gelten dürfen. Die eigentliche Aufgabe der numerischen Berechnung von $F(x)$ verlangt jedenfalls, für das ε explizite Grenzen anzugeben, aus denen sich die Güte der Annäherung beurteilen lässt. Dieser Abschluss ist aber bisher nicht erreicht worden. Einen wesentlich einfacheren Beweis des Tschebyscheff'schen Satzes kündigt an *A. Liapounoff*, Par. C. R. 132 (1901), p. 126; Verallgemeinerung ebenda p. 814.

In der Versicherungslitteratur ist der fragliche Satz vielfach, aber immer nur rein formal behandelt worden, ohne dass man sich um irgend welche Konvergenzbetrachtungen Sorge gemacht hat, die doch die einzige und sehr ernstliche Schwierigkeit bilden. Die Theorie des Risikos erleidet hierdurch keine Einbusse, wenn man nur mit *Bremiker, Gram* und *Hausdorff* das mittlere und nicht, wie es die Versicherungsmathematiker seit *Kanner* (1867) fast durchgängig thun, das durchschnittliche Risiko des Versicherungsbestandes als Basis wählt.

169) Für gleichartige Todesfallversicherungen mit natürlicher Prämie bedient sich dieser Approximation *Th. Wittstein,* Math. Statistik, Hannover 1867, p. 13. Allgemein giebt sie *K. Hattendorff*, Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 150.

170) Einem zusammenhängenden Berichte über die hierher gehörigen Untersuchungen steht die grosse Schwierigkeit entgegen, dass diese meist sehr lückenhaft und sogar die Ansätze nur in den seltensten Fällen einwurfsfrei sind. Gleichwohl handelt es sich um wichtige Fragen und Arbeiten mit guten Ideen. Referent hat sich daher bemüht, von diesen nur das Wesentlichste festzuhalten und im übrigen die Darstellung so gewählt, dass sie nach seiner eigenen Auffassung möglichst einwandsfrei ist.

prämien keinen Zuschlag oder nur einen solchen erheben würde, der gerade die Unkosten deckte; denn das mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ wächst mit der Zahl L der Versicherungen unbegrenzt. Thatsächlich übersteigen die Einnahmen an Zuschlägen die Unkosten. Der Teil σP der Nettoprämie, welcher nach Deckung der Unkosten noch übrig bleibt, möge der *Sicherheitszuschlag* genannt und für σ ein durchschnittlicher Prozentsatz angenommen werden, der den thatsächlichen Erfahrungen der Gesellschaft entspricht[171]).

Wir stellen nun dem bisher betrachteten mittleren Risiko $\mathfrak{M}$ des Bestandes Γ, das auf die Sicherheitszuschläge keine Rücksicht nahm und das daher genauer das mittlere *Nettorisiko* von Γ heissen möge, ein mittleres *Bruttorisiko* $\mathfrak{M}'$ gegenüber, das die noch zu erwartenden Sicherheitszuschläge berücksichtigt[172]). Die Ausgaben $\mathfrak{A}_n$ werden dabei wie früher definiert, die Einnahmen $\mathfrak{E}_n'$ bilden aber ausser den in Nr. **19** definierten Nettoeinahmen $\mathfrak{E}_n$ die noch zu erwartenden Einnahmen an Sicherheitszuschlägen. Das *mittlere Bruttorisiko* $\mathfrak{M}'$ ist nun einfach die mittlere Abweichung der Differenz $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n'$ von ihrem wahrscheinlichen Werte. Letzterer ist gleich $-\sigma A$, wo A den Wert der in der fixierten Periode noch zu erwartenden Einnahmen an Nettoprämien bedeutet. Der Anfang der Periode werde mit dem Zeitpunkte der Berechnung, also t mit t_1 identifiziert. Über den Endpunkt t_2 der Periode werde vorläufig nichts vorausgesetzt. Zu beachten ist, dass die Prämien in der Regel noch eine ganze Reihe von Jahren zu zahlen sind. Mit einer Wahrscheinlichkeit $\varphi(\nu)$, die grösser als $1 - \frac{1}{\nu^2}$ (Nr. **3**) und für grosse L approximativ durch $\Theta\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right)$ gegeben ist (Nr. **3**, **22**), kann man daher behaupten, dass das

171) Hier werden in der Litteratur zwei verschiedene Standpunkte nicht immer scharf genug getrennt. Man kann einmal fragen, wie gross man σ, wenn es *willkürlich* ist, wählen muss, um eine Stabilität von gegebener Grösse zu erzielen. Man kann andrerseits den Wert von σ *gegeben* sein lassen und fragen, wie gross die Stabilität bei diesem gegebenen σ ausfällt. Die erstere Fragestellung entspricht dem Fall, dass man Tarife mit nach dem Risiko abgestuften Sicherheitszuschlägen konstruieren will. Die zweite Fragestellung entsteht, wenn man die Stabilität der grossen Gesellschaften, die man als Erfahrungsthatsache kennt, von der Theorie des Risikos aus verstehen lernen will. Es ist dieses letztere Problem, das dem Referenten bei den Ausführungen des Textes vorgeschwebt hat, und daher ist σ immer als eine fest gegebene, empirisch ermittelte Grösse gedacht.

172) Die Litteratur betrachtet nur das Nettorisiko, das als eine Approximation des vom Referenten eingeführten Bruttorisikos gelten darf.

für die künftigen Auszahlungen erforderliche Deckungskapital zwischen den Grenzen $V - \nu\mathfrak{M}' - \sigma A$ und $V + [\nu\mathfrak{M}' - \sigma A]$ enthalten ist, wo V die Nettoreserve des Bestandes Γ zur Zeit t bedeutet. Der in eckigen Klammern eingeschlossene Ausdruck werde die *Risikoreserve* von Γ für die Periode (t, t_2) genannt und durch:

$$\mathfrak{R}' = \nu\mathfrak{M}' - \sigma A$$

bezeichnet[173]). Er giebt den *Sicherheitsfonds*, der mit der Wahrscheinlichkeit $\varphi(\nu)$ gegen die zufälligen Schwankungen der Sterblichkeit in der Periode (t, t_2) schützt[174]). Er misst die Stabilität der Gesellschaft: je kleiner $\mathfrak{R}'$ wird, um so grösser ist die Stabilität[175]).

Hat man eine Reihe von L gleichartigen[176]) Versicherungen, jede auf die Versicherungssumme s, und sind $\mathfrak{M}_i'$ und A_i die auf die Versicherungssumme 1 bezogenen Werte von $\mathfrak{M}'$ und A, die einer individuellen dieser Versicherungen entsprechen, so wird, wenn alle Grössen ausser L konstant bleiben:

$$\mathfrak{R}' = \left(\nu\sqrt{L}\cdot\mathfrak{M}_i' - \sigma L A_i\right)\cdot s$$

für hinreichend grosse L negativ. Für die grossen Gesellschaften der Praxis ist jedenfalls die Risikoreserve für das nächste Geschäftsjahr immer negativ und hierin liegt die Berechtigung dafür, dass sie den Gewinn des verflossenen Geschäftsjahres als Dividende den Versicherten zuweisen oder für andere Sicherheitsfonds (z. B. Kriegsreserve) verwenden dürfen und keine besondere Risikoreserve zurückzustellen brauchen.

Dies gilt für Gesellschaften, die nach der Nettomethode ihre Bilanz aufstellen (Nr. **16**). Wenn dagegen eine Gesellschaft „zillmert“, so erhöht sich die Risikoreserve um denselben Betrag, um den sie die Nettoreserve „kürzt“. Will sie also trotzdem keine besondere Risikoreserve zurückstellen, so darf eine gewisse Grenze der Kürzung

173) Die Risikoreserve wurde begrifflich und dem Namen nach von *Th. Wittstein* eingeführt, Das math. Risiko (1885), p. 89. Er versteht darunter den Überschuss des durchschnittlichen ferneren Nettorisikos über σA.

174) Die älteren Autoren, so namentlich *C. Raedell,* Vollständige Anweisung, die Lebensfähigkeit von Versicherungsanstalten zu untersuchen, Berlin 1857, p. 218 ff., sehen in der Bestimmung dieses Sicherheitsfonds die Hauptaufgabe der Theorie des Risikos.

175) Man kann geradezu $-\mathfrak{R}'$ als Mass der Stabilität einführen.

176) Den wirklichen Verhältnissen der Praxis gegenüber bildet die Annahme von lauter gleichartigen Versicherungen natürlich eine reine Fiktion. Gleichwohl ist diese von Wert, weil sich bei ihr die theoretischen Beziehungen am deutlichsten erkennen lassen und weil ein allgemeiner Versicherungsbestand durch Einführung passender Mittelwerte durch einen solchen von lauter gleichartigen Versicherungen approximiert werden kann.

nicht überschritten werden, die sich aus der Bedingung ergiebt, dass die um die Kürzung erhöhte Risikoreserve verschwindet[177]).

Nimmt man von jetzt an wieder an, dass die Gesellschaft die volle Nettoreserve in die Bilanz einstellt, so ergiebt bei lauter gleichartigen Versicherungen die Bedingung $\mathfrak{R}' = 0$ eine *Minimalzahl der Versicherten* L_0, die vorhanden sein muss, damit sie keine besondere Risikoreserve zurückzustellen braucht. Nennt man $\mathfrak{m}_i' = \frac{\mathfrak{M}_i'}{A_i}$ das *relative Bruttorisiko* einer individuellen Versicherung, so ist dieses in erster Annäherung gleich dem relativen Nettorisiko $\mathfrak{m}_i = \frac{\mathfrak{M}_i}{A_i}$ derselben, das in Nr. **20** eingeführt wurde und es wird:

$$L_0 = \left(\frac{\nu}{\sigma} \cdot \mathfrak{m}_i'\right)^2$$

die fragliche Minimalzahl. Ist $L < L_0$, so ist die Risikoreserve positiv und ein Maximum, wenn $L = \frac{1}{4} L_0$ ist. Für diesen Wert erreicht also die Stabilität ein Minimum[178]).

Kommt zu dem Versicherungsbestande Γ eine neue Versicherung hinzu, für die alles festgesetzt ist ausser der Versicherungssumme, so ergiebt *Laurent*'s Bedingung, dass die Risikoreserve nicht zunimmt[179]), ein *Maximum der Versicherungssumme* für die neu hinzukommende Versicherung, wenn das relative Bruttorisiko $\mathfrak{m}'$ von dieser grösser als $\frac{\sigma}{\nu}$ ist. Befand sich der Versicherungsbestand Γ in dem durch die Gleichung $\mathfrak{R}' = 0$ charakterisierten äussersten zulässigen Minimum der Stabilität, so besagt *Laurent*'s Forderung, dass $\frac{\mathfrak{M}'}{A}$ oder — wenn man in erster Annäherung $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ setzt — dass das relative Risiko $\mathfrak{m}$ nicht zunimmt[180]). Unter der Fiktion, dass alle Versicherungen von Γ gleichartig sind und auch die neu hinzukommende Versiche-

177) Den Einfluss der *Zillmer*'schen Methode auf die Stabilität hat *K. Hattendorff* (Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 34) erörtert.

178) Über die Minimalzahl der Versicherten macht *C. Landré* (Math. techn. Kap. p. 343) einige Bemerkungen.

179) Diese Bedingung stammt von *H. Laurent,* Par. Journal act. franç. 2 (1873), p. 79, 161; derselbe, Traité du calcul des probabilités, Paris 1873, p. 247; derselbe, Théorie et pratique des assurances sur la vie, Paris 1895, p. 116. Eine Dissertation über das Maximum der Versicherungssumme hat *H. Onnen* geschrieben (Litt.-Verz. VI). Ein zusammenfassendes Referat über die einschlägige Litteratur giebt *C. Landré,* Lond. intern. Kongr. 1899, p. 110.

180) Die Forderung, dass das relative Risiko nicht zunimmt, stellt ganz allgemein *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 340.

rung — abgesehen von der Versicherungssumme — von der nämlichen Art ist, ergiebt sich hieraus in erster Annäherung als Maximum der neuen Versicherungssumme das Doppelte der Versicherungssumme jeder alten Versicherung[181]). Ist dagegen das relative Bruttorisiko $\mathfrak{m}'$ der neu hinzukommenden Versicherung nicht grösser als $\frac{\sigma}{\nu}$, so erhöht die neu hinzukommende Police die Stabilität, wie hoch auch sonst die Versicherungssumme sein mag und *Laurent*'s Bedingung ergiebt überhaupt keine obere Grenze für sie.

---

181) *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 341; bestehen die Versicherungen schon eine Reihe von Jahren, so tritt an Stelle ihrer Versicherungssumme ihr reduziertes Kapital, *C. Landré,* Lond. intern. Kongr., p. 115. Der Landré'schen Bedingung verwandt ist diejenige von *F. Hausdorff,* a. a. O. p. 511.

(Abgeschlossen im April 1901.)

I E. DIFFERENZENRECHNUNG

VON

DEMETRIUS SELIWANOFF

IN ST. PETERSBURG.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher.

S. F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 3, Paris 1800 [mit dem Titel: Traité des différences...]; 2. Aufl. 1819 (citiert unter „Lacroix").

J. F. W. Herschel, A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences, Cambridge 1820 („Herschel").

O. Schlömilch, Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848.

G. Boole, A treatise on the calculus of finite differences, Cambridge-London 1860, deutsch v. *C. H. Schnuse,* Braunschw. 1867.

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, St. Petersburg 1889—1891; deutsch von *Th. Friesendorf* und *E. Prümm,* Leipzig 1896 („Markoff").

E. Pascal, Calcolo delle differenze finite, Milano 1897 („Pascal").