SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360609856
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360609856
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360609856

LOG Id: LOG_0317
LOG Titel: 4. Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven. Von LUIGI BERZOLARI in Pavia. (Abgeschlossen im Juni 1906.)
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

III C 4. ALLGEMEINE THEORIE DER HÖHEREN EBENEN ALGEBRAISCHEN KURVEN.

Von

LUIGI BERZOLARI

IN PAVIA.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher.

C. MacLaurin, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, London 1720.

W. Braikenridge, Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, London 1733.

J. P. de Gua de Malves, Usages de l'analyse de *Descartes* pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres, Paris 1740 *).

C. MacLaurin, De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus. Appendix zu „A treatise of Algebra", London 1748 (5. ed. 1788). Französische Ausgabe von *E. de Jonquières* in „Mélanges de Géométrie pure", Paris 1856 (p. 197—261).

L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Lausannae 1748, vol. II.

G. Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750.

---

*) Vgl. dazu: *P. Sauerbeck,* Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven, nach den Methoden von *Jean Paul de Gua de Malves.* Ein Beitrag zur Kurvendiskussion (Abh. zur Gesch. d. Math., Heft XV), Leipzig 1902.

L. I. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833 (p. 241—292).

J. Plücker, Theorie der algebraischen Kurven, gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie, Bonn 1839.

G. Salmon, A treatise on the higher plane curves, Dublin 1852 (3. ed. 1879). Deutsche Ausgabe von *W. Fiedler,* Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 2. Aufl. Leipzig 1882 („*Salmon-Fiedler*"); franz. Ausgabe: Traité de géométrie analytique (courbes planes), par *O. Chemin,* et suivi d'une étude sur les points singuliers, par *G. Halphen,* Paris 1884.

F. Lucas, Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes, Paris 1864.

R. F. A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearb. von *F. Lindemann,* Bd. I, Leipzig 1875—76 („*Clebsch-Lindemann*"). Franz. Ausg. von *A. Benoist,* 2 Teile, 3 vol., Paris 1879—80—83.

G. A. von Peschka, Darstellende und projektive Geometrie, Bd. II, Wien 1884.

C. Reuschle, Praxis der Kurvendiskussion, I. Teil, Stuttgart 1886.

G. B. Guccia, Lezioni di geometria superiore (lith.), Palermo 1890.

H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Leipzig 1905*).

Monographien.

L. Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Bologna Mem. (1) 12 (1861), p. 305—436 („Intr."). Deutsch bearb., mit Zusätzen vom Verf., von *M. Curtze,* Greifswald 1865.

A. Brill und *M. Noether,* Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Ann. 7 (1873), p. 269—310.

R. Dedekind und *H. Weber,* Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, J. f. Math. 92 (1880), p. 181—290.

G. Halphen, Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes, 1884. Anhang zu der oben zitierten franz. Übers. von *Salmon*'s Treatise ..., p. 535—648 („Étude").

E. Kötter, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven. Von der Berliner Akad. gekrönte Preisschrift; Berl. Abh. 1887 („Preisschrift").

E. Bertini, La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico, Ann. di mat. (2) 22 (1893), p. 1—40.

C. Segre, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, Ann. di mat. (2) 22 (1893), p. 41—142.

— Le moltiplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche, con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve, Giorn. di mat. 36 (1897), p. 1—50.

Historische Darstellungen.

A. Cayley, Curve. Encycl. Britannica, Ninth Ed. 6 (1877), p. 716—728 = Papers 11, p. 460—489.

A. Brill und *M. Noether,* Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, Jahresb. der deutschen Math.-Ver. 3 (1894), p. 107—566 („Bericht").

*) S. auch *H. Wieleitner*, Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904, Jahresb. Gymn. Speyer, 1904—05.

E. Kötter, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. I. Teil: Von *Monge* bis auf *v. Staudt* (1847). Jahresb. der deutschen Math.-Ver. 5 (1898—1901), p. 1—486 („Bericht").

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. II, III, 2. Aufl., Leipzig 1900—01.

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert; deutsche Ausg. von *R. Meyer* (Abh. zur Gesch. der Math., Heft XVII), Leipzig 1903.

Überdies finden sich verschiedene Teile der Theorie behandelt in Werken über Analytische Geometrie und Analysis:

R. Baltzer, Analytische Geometrie, Leipzig 1882.

H. Laurent, Traité d'analyse, Paris, vol. 2, 4; 1887, 1889.

F. Klein, Riemann'sche Flächen (lith.), 2 Bde., Göttingen 1891—92.

F. Klein, Einleitung in die geometrische Funktionentheorie, Vorl. gehalten in Leipzig 1880—81 (lith. 1892).

C. Jordan, Cours d'analyse, 2. éd., Paris, vol. 1, 1893.

Ch. A. Scott, An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry, London 1894.

B. Niewenglowski, Cours de géométrie analytique, Paris, vol. 1, 2, 1894—96.

P. Appell et *É. Goursat,* Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris 1895.

H. Stahl, Theorie der *Abel*'schen Funktionen, Leipzig 1896.

H. Andoyer, Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure, Paris, vol. 1, 1900.

É. Picard et *G. Simart,* Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, Paris, vol. 2, 1900.

É. Picard, Traité d'analyse, 2. éd., Paris, vol. 2, 1905.

Für die algebraisch-arithmetische Theorie kommt besonders in Betracht:

K. Hensel und *G. Landsberg,* Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und *Abel*'sche Integrale, Leipzig 1902.

Vgl. auch noch, hinsichtlich der Beziehungen zur abzählenden Geometrie:

H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879 („Kalkül").

I. Allgemeines.

1. Algebraische ebene Kurven; deren reelle Darstellung. Eine ebene algebraische Kurve C^n von der Ordnung n[1]) ist der Ort der

---

1) Die Darstellung und Untersuchung der geometrischen Örter mittels Gleichungen zwischen Variabeln verdankt man insbesondere *P. de Fermat* und *R. Descartes*; der letztere hat zuerst die Kurven in algebraische und transzendente unterschieden [von ihm „geometrische" und „mechanische" genannt; die Namen „algebraisch" und „transzendent" rühren von *G. W. Leibniz* her, Acta Erud., Leipzig 1684, p. 470, 587; 1686, p. 292 = Math. Schriften, herausg. von *C. I. Gerhardt,* Halle 1858, 5, p. 223, 127, 226] und die höheren algebraischen Kurven betrachtet: vgl. *Descartes,* La Géométrie, Leyde 1637 (in „Discours de la méthode etc.") = Oeuvres, éd. *V. Cousin,* Paris 1825, 5, p. 313—428; nouv. éd. Paris,

— reellen und imaginären — Punkte, deren homogene projektive Koordinaten (im besondern z. B. homogene Cartesische Koordinaten) x_1, x_2, x_3 einer Gleichung $f(x) = 0$ genügen, unter f eine ternäre Form der Ordnung n, mit konstanten, reellen oder komplexen Koeffizienten verstanden[2]). Dividiert man mit x_3^n und setzt $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$, so nimmt die Gleichung $f = 0$ die Gestalt $F(x, y) = 0$ an, von einem Grade $m \leqq n$ in y, und $m' \leqq n$ in x.

C^n heisst *einfach* (*irreduzibel*) oder aber *reduzibel*, je nachdem er f ist [I B 1 b, Nr. **5**, *Netto*; I B 2, [405]) *Meyer*; I B 3 b, Nr. **26**, *Vahlen*][3]).

1886; deutsch von *L. Schlesinger,* Berlin 1894. — Die Einteilung der Kurven nach der Ordnung stammt von *I. Newton* her [23]), und [52]) = Opuscula 1, p. 247 —248. — Übrigens hat bei *Newton*, wie auch schon bei *Descartes* und andern Geometern jener Zeit, das Studium der Kurven den Zweck, Probleme (d. h. höhere algebraische Gleichungen) zu lösen durch Schnitte von Kurven möglichst geringer Ordnung: „Curvarum usus in geometria est, ut per earum intersectiones problemata solvantur" (*Newton* [52]) = Opuscula 1, p. 267).

2) Eine algebraische Kurve kann auch mittels Polarkoordinaten untersucht werden (III B 8, *Müller*). Bedeuten ϱ und ϑ den Radiusvektor und die Anomalie, und setzt man $\lambda = e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$, so wird eine solche Kurve definiert durch eine algebraische Gleichung zwischen ϱ und λ. Vgl. speziell *G. Halphen,* Étude, p. 550 ff., wo die Singularitäten auf Grund von Reihenentwicklungen (Nr. **13**) untersucht, und insbesondere Ordnung und Klasse einer in Polarkoordinaten definierten Kurve berechnet werden. — Eine C^n lässt sich auch durch eine Gleichung vom Grade n zwischen zwei konjugiert-komplexen Koordinaten darstellen; die Gleichungskoeffizienten sind alsdann an gewisse Relationen gebunden, die *A. Perna* studiert hat, Palermo Rend. 17 (1902), p. 65. — Einige Sätze über C^n, die einem Kegelschnitt umbeschriebenen Polygonen umbeschrieben sind, hat *G. Darboux* mittels eines Koordinatensystems abgeleitet, das man durch Betrachtung eines Kegelschnitts als Normkegelschnitt erhält (I B 2, Nr. **24**, *Meyer*): Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1872, 2. éd. 1896, p. 183 ff.; vgl. auch *J. Neuberg,* Nouv. corr. math. 2 (1876), p. 1, 34, 65; systematisch verwendet derartige Koordinatensysteme *W. F. Meyer,* Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883.

3) Algebraische (invariante) Kriterien für das Zerfallen einer C^n in Gerade findet man bei *F. Junker,* Math. Ann. 45 (1893), p. 1 [vgl. auch Math. Ann. 38 (1890), p. 91; 43 (1893), p. 225; und [17])]; *A. Brill,* Gött. Nachr. 1893, p. 757; Math. Ann. 50 (1897), p. 157 [Auszug Deutsch. Math.-Ver. Jahresb. 5 (1896), p. 52]: *P. Gordan,* Math. Ann. 45 (1894), p. 410; *J. Hadamard,* Soc. math. de France Bull. 27 (1899), p. 34. Die Bedingungen für die Spaltung einer Form eines beliebigen Gebietes in lineare Faktoren hat *F. Hočevar* untersucht, Wien Ber. 113 (1904), p. 407 [Auszug Paris C. R. 138 (1904), p. 745]; Verh. d. dritten intern. Math.-Kongr. zu Heidelberg, Leipzig 1905, p. 151. Im ternären Gebiet erweist es sich als notwendig und hinreichend, dass die *Hesse*'sche Kovariante durch die Urform teilbar ist. Für eine C^3 findet sich dies Ergebnis schon bei *G. Salmon,* Higher plane curves, Dublin 1852, p. 182. Über die Zerlegung einer C^3 vgl. *S. H. Aronhold,* J. f. Math. 55 (1857), p. 97; *P. Gordan,* Math. Ann. 1 (1871),

Die Ordnung n von C^n ist von der Wahl des Fundamentaldreiecks unabhängig, ist also ein projektiver Charakter der Kurve: n ist die Anzahl der Punkte, in denen die Kurve von jeder (ihr nicht als Bestandteil angehörigen) Geraden der Ebene getroffen wird[4]).

Analytisch wird durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ eine der beiden komplexen Variabeln x, y als algebraische Funktion der andern definiert.

Repräsentiert man die Werte von x, y durch die Punkte zweier reeller Ebenen (nach *C. Wessel, J. R. Argand, C. F. Gauss*, vgl. I A 4[10]), *Study*), oder auch zweier reeller Kugeln (nach *C. F. Gauss, B. Riemann, C. Neumann*, vgl. II B 1[40]), *Osgood*), so sind die komplexen (reellen und imaginären) Punkte von C^n ∞^2 (sie entsprechen nämlich, in einer stetigen Korrespondenz mit endlichen Indices, den Werten zweier *reeller*, unabhängiger Parameter), und sind von den reellen Punkten der Ebene (oder der Kugel) x dargestellt, derart, dass in jedem solcher Punkte die m entsprechenden Werte von y vereinigt sind[5]).

---

p. 631; *S. Gundelfinger,* Math. Ann. 4 (1871), p. 561; Ann. di mat. (2) 5 (1871), p. 223; *F. Brioschi,* Ann. di mat. (2) 7 (1875), p. 189; Lincei Atti (2) 3 (1876), p. 89 = Opere, Milano 2 (1902), p. 137; 3 (1904), p. 345; „*Clebsch-Lindemann*", p. 594—601; *A. Thaer,* Diss. Giessen 1878 = Math. Ann. 14 (1878), p. 545; *K. Bes,* Math. Ann. 59 (1904), p. 77. Für eine C^4 vgl. *F. Brioschi,* Lincei Atti (2) 3 (1876), p. 91 = Opere 3, p. 349; *E. Pascal,* Napoli Atti (2) 12 (1905) (in § 19 die Zerlegung einer C^3 in drei Geraden). — Über die Bedingungen, damit eine ternäre Form eine Potenz einer andern sei (I B 1a, Nr. **11**, *Netto*), vgl. *C. Weltzien,* Progr. Oberrealsch. Berlin 1892. S. noch Nr. **7**, Anm. 77). Über ein allgemeines Reduzibilitätskriterium von *E. B. Christoffel* s. Nr. **32**.

4) Dass die Ordnung bei Projizieren und Schneiden ungeändert bleibt, erkannte *Newton*[52]) = Opuscula 1, p. 264; dass sie dies beim Wechsel des Cartesischen Koordinatensystems nicht ändert, hatte schon *Descartes* beobachtet, La géométrie, nouv. éd. (Paris 1886), p. 19 [vgl. auch Oeuvres, éd. par *V. Cousin,* 7 (1824), p. 11, 97, 178], und erkannte weiter *Newton,* l. c., p. 247 ff., sodann *J. P. De Gua de Malves,* Usages de l'analyse de Descartes, Paris 1740, p. 340—342; *L. Euler,* Introductio in analysin inf., Lausannae 1748, 2, p. 25; *G. Cramer,* Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750, p. 54. Die Invarianz der Ordnung bei einer linearen Transformation solcher Koordinaten stellte in einem besondern Falle *Newton*[23]) fest, lib. 1, lemma 22; allgemein *E. Waring,* Miscellanea analytica, Cantabr. 1762, p. 82. Die Auffassung einer solchen Transformation als einer Kollineation zwischen zwei Ebenen verdankt man jedoch *A. F. Möbius,* Der barycentrische Calcül, Leipzig 1827 = Ges. Werke 1, hrsg. von *R. Baltzer*, Leipzig 1885, p. 1 (s. p. 268, 269); sie wurde wiedergefunden von *M. Chasles,* Aperçu hist. [Mém. Brux. cour. 11 (1837); deutsch von *L. A. Sohncke,* Halle 1839], Paris, 3. éd. 1889, p. 764 ff.

5) Liegt die Kurve in einer reellen Ebene, so können ihre (komplexen) Punkte auch dargestellt werden durch die ∞^2 sie enthaltenden reellen Geraden der Ebene, jede eine gewisse Anzahl von Malen gezählt, oder auch mittels

Oder auch, es lässt sich über der x-Ebene eine m-blättrige *Riemann*'sche Fläche ausbreiten, deren reelle Punkte die Bilder der komplexen Kurvenpunkte sind; die Fläche ist zusammenhängend, wenn die Kurve einfach ist, und umgekehrt; die Fläche ist symmetrisch, wenn die Kurve reell ist (d. h. wenn F reelle Koeffizienten besitzt), und umgekehrt (vgl. Nr. **20**). Alle zu einer gegebenen algebraischen Kurve gehörigen *Riemann*'schen Flächen stehen unter einander in eineindeutiger reeller konformer Korrespondenz.

Andererseits kann man auch sagen, dass die Gleichung $F=0$ eine Korrespondenz (m, m') zwischen den reellen Punkten der y- und x-Ebene (Kugel)[6]) herstellt; oder auch — indem man y und x als Koordinaten zweier Geradenbüschel mit den Zentren $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ auffasst — zwischen den Geraden der beiden Büschel: je zwei sich entsprechende Geraden schneiden sich auf der Kurve. Verlegt man die beiden Büschelzentra in die „Kreispunkte" der Ebene (III A, B 3 a, Nr. 7, *Fano*), und repräsentiert eine durch je einen derselben gehende (imaginäre) Gerade stets durch ihren reellen Punkt, so gelangt man zu der obigen Korrespondenz zwischen den reellen Punkten der beiden reellen Ebenen zurück[7]).

Hieraus geht hervor, dass man auf der Kurve von irgend einem ihrer Punkte zu einem andern noch auf unendlich vielen (komplexen) Wegen gelangen kann, auch wenn die beiden Punkte einem und demselben reellen Kurvenzuge angehören.

---

der diesen Geraden in einer reellen Polarität entsprechenden Punkte. — Über die duale, von *F. Klein* verwendete Darstellung für die Klassenkurven s. Nr. **20**.

6) *K. Weierstrass* in seinen Vorl. über *Abel*'sche Funktionen hat die algebraische Kurve (das „Gebilde") dargestellt durch das algebraische System der reellen Geraden, die die (reellen) homologen Punkte der beiden reellen (parallel gedachten) *Gauss*'schen Ebenen verbinden: s. Math. Werke 4, bearb. von *G. Hettner* und *J. Knoblauch*, Berlin 1902, p. 323; vgl. auch *G. Vivanti*, Pal. Rend. 9 (1894), p. 108. — Eine andere reelle Darstellung einer algebraischen Kurve mittels einer reellen Kongruenz von Geraden benützt *G. Sforza*, Origine geometrica delle superf. di *Riemann*, Reggio Emilia Ist. Tecnico Annuario 1899—1900, auf Grund der von *F. Klein*, Erl. Ber. 1873 = Math. Ann. 22 (1883), p. 246 gegebenen Darstellung der komplexen Geraden einer Ebene vermöge der reellen Geraden des Raumes, die eine elliptische Fläche 2. Ordnung schneiden resp. berühren. — Die Kongruenz derjenigen reellen Geraden, welche in *v. Staudt*'s Sinne Träger der Punkte einer in einer imaginären Ebene liegenden algebraischen Kurve sind, hat *C. Juel*, Diss. Kopenh. 1884, und Math. Ann. 61 (1904), p. 77, studiert.

7) Für diese und ähnliche Darstellungen (insbesondere mittels einer reellen *algebraischen* Fläche), und ihren gegenseitigen Zusammenhang, vgl. *C. Segre*, Math. Ann. 40 (1891), p. 413. S. auch *E. Busche*, J. f. Math. 122 (1900), p. 227. Vgl. noch die in [160]) zitierte autogr. Vorles. von *Klein*; ferner *Klein*, Math. Ann. 9 (1875), p. 476.

2. Definitionen und elementare Eigenschaften. Da die Anzahl der wesentlichen Koeffizienten in $f = 0$ gleich

$$\binom{n+2}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}n(n+3)$$

ist, so ist eine C^n eindeutig bestimmt, wenn sie durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebene Punkte „allgemeiner Lage“ hindurchgehen soll[8]); C^n kann dabei einfach oder zusammengesetzt sein (wegen der Ausnahmefälle s. Nr. **33**).

Sei $f_0 + f_1 + \cdots + f_n = 0$ die Gleichung einer C^n, wo f_i eine Binärform der x, y von der Ordnung i bedeutet. Ist $f_0 = 0$, während f_1 nicht identisch verschwindet, so ist der Ursprung O ein *einfacher Punkt* der Kurve. Die Tangente in O ist $f_1 = 0$, und zwar trifft sie die Kurve daselbst gerade k-punktig, wenn f_1 ein Teiler von $f_2, \ldots, f_{k-1}$, aber nicht von f_k ist. Für $k = 3$ wird O ein *gewöhnlicher Wendepunkt* (*flesso*), für $k > 3$ ein höherer Wendepunkt, spez. für $k = 4$ ein *Undulationspunkt*[9]).

Verschwinden $f_1, \ldots, f_{s-1}$ identisch, aber f_s nicht, so sind von den n Schnittpunkten einer „allgemeinen“ durch O gelegten Geraden

---

8) *J. Stirling,* Lineae tertii ordinis Newtonianae etc., Oxoniae 1717, p. 3, 69. — *M. Reiss,* Math. Ann. 2 (1867), p. 385, und *Ch. Méray,* Ann. éc. norm. sup. (3) 2 (1885), p. 289, haben die Bedingung für die Lage von $\frac{1}{2}n(n+3)+1$ Punkten auf einer C^n in eine Gestalt gebracht, die eine Verbindung zwischen den Inhalten der aus je drei jener Punkte gebildeten Dreiecke ausdrückt (nebst der Ausdehnung auf höhere Gebiete). *K. Cwojdziński,* Arch. Math. Phys. (3) 9 (1903), p. 8, beweist den Satz: „Die Determinante aus den n^{ten} Potenzen der Lote von $\frac{n(n+3)}{2}+1$ Punkten auf ebensoviele Gerade der Ebene verschwindet dann und nur dann, wenn entweder die Punkte auf einer Kurve n^{ter} Ordnung liegen oder die Geraden eine Kurve n^{ter} Klasse berühren.“ Diese Eigenschaft steht in Zusammenhang mit einer von *P. Serret*[65]), chap. IV, herrührenden: „Die n^{ten} Potenzen der Abstände von $\frac{n(n+3)}{2}+1$ Punkten einer gegebenen C^n von einer *beliebigen* Geraden ihrer Ebene sind an eine lineare homogene Relation gebunden (und dualistisch die n^{ten} Potenzen der Abstände ebensovieler Tangenten einer Kurve n^{ter} Klasse von einem *beliebigen* Punkte ihrer Ebene).“

9) *Point de serpentement,* nach *P. L. M. de Maupertuis,* Paris Mém. 1729, p. 277. — Die Wendepunkte hat zuerst *P. de Fermat* 1638 betrachtet, Varia Opera math., Tolosae 1679, p. 73 = Oeuvres, Paris 1891, 1, p. 166; sodann *Fr. van Schooten* (Sohn) in der zweiten latein. Ausgabe der Géométrie von *Descartes,* Amst. 1659, 1, p. 258, und *R. F. de Sluse* im Anhang (Miscellanea) zur 2. Ausg. des Mesolabum, Liège 1668 (vgl. *C. Le Paige,* Boncompagni Bull. 17 (1884), p. 475—76). — Über Tangenten- und Normalenaufgaben und deren Lösungen durch *de Fermat, Descartes, de Sluse* u. a., sowie auch über umgekehrte Probleme s. die in der Litteratur angeführten Schriften von *M. Cantor* und *H. G. Zeuthen.*

mit der Kurve nur $n - s$ von O verschieden. O heisst ein *s-facher Punkt* der Kurve, und die s Geraden $f_s = 0$ seine *Tangenten*, von deren n Schnittpunkten mit der Kurve wenigstens $s + 1$ in O hineinfallen. Sind alle s Tangenten von einander verschieden, so heisst O ein „gewöhnlicher" s-facher Punkt. Irgend eine seiner Tangenten trifft die Kurve in O $(s + k + 1)$-punktig, wenn der bezügliche Linearfaktor von f_s in $f_{s+1}, \ldots, f_{s+k}$ aufgeht, aber nicht in f_{s+k+1}.[10])

Für $s = 2$ entsteht ein Doppelpunkt, und zwar ein *eigentlicher Doppelpunkt* (*noeud, node, nodo*), oder aber ein *Rückkehrpunkt* oder eine *Spitze* (*point de rebroussement, cusp, cuspide* oder *regresso*), je nachdem die beiden Tangenten getrennt sind oder nicht; die Gleichung der C^n kann dann auf die kanonische Gestalt $xy + f_3 + \cdots = 0$, resp. $y^2 + f_3 + \cdots = 0$ gebracht werden.

Ist der Doppelpunkt reell, aber seine beiden Tangenten konjugiert-komplex, so nennt man ihn einen *isolierten* oder *konjugierten* Punkt der Kurve.

Die Spitze heisst eine *gewöhnliche* oder *erster Art* (*Spitze* in engerem Sinne), wenn ihre Tangente die Kurve in O dreipunktig trifft, also y kein Teiler von f_3 ist; ist dagegen y ein Teiler von f_3, aber nicht von f_4, so entsteht im allgemeinen ein *Selbstberührungspunkt (tacnode, tacnodo)*[11]). Genauer, wenn die Gleichung der C^n die Gestalt hat:

$$y^2 + y(ax^2 + bxy + cy^2) + (a'x^4 + \cdots) + \cdots = 0,$$

10) Vgl. *de Gua*[4]) p. 64, 91, 93, 116 f.; *Cramer*[4]) chap. 10, 11, die sich der Methode des Textes bedienen, und den Fall eines irgendwo gelegenen singulären Punktes zurückführen auf den, wo er der Ursprung ist, vermöge einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen. — Singuläre Punkte treten schon in besonderen Fällen bei den Alten auf (z. B. bei der Cissoide des *Diocles*); die Differentialrechnung wandten auf sie an *G. W. Leibniz*, Acta Erud., Leipz. 1684, p. 468 = Math. Schriften, 5, p. 221; *Joh. Bernoulli,* Brief an *Leibniz,* Juni 1695 = *Leibniz,* Math. Schr. 3, p. 185; *G. F. de l'Hospital,* Analyse des infiniment petits, Paris 1696, sections 4, 5, 10; *Jac. Bernoulli,* Acta Erud. 1697, p. 410 = Opera, Genevae 1744, 2, p. 779; *J. Saurin,* Paris Mém. 1716, p. 59, 275; 1723, p. 222; *Chr. B. de Bragelongne,* Paris Mém. 1730, p. 158, 363; 1731, p. 10; Paris Hist. 1732, p. 63; s. auch *de Gua,* l. c. p. 236 ff.

11) Der Name *tacnode* (und analog *oscnode, . . .*: vgl. [164])) stammt von *A. Cayley* her, Cambr. Dubl. Math. J. 7 (1852), p. 166 = Papers 2, p. 28. — *E. Wölffing,* Diss. Tübingen 1889 = Math. Ann. 36 (1889), p. 97 (bes. p. 119) hat den speziellen Selbstberührungspunkt (den harmonischen oder symmetrischen) betrachtet, wo f_3 den Faktor y^2 enthält, d. i. der Annahme $a = 0$ entsprechend. Solche bieten sich dar beim Studium der parabolischen Kurve einer Fläche: *C. Segre,* Rom Linc. Rend. (5) 6^2 (1897), p. 168.

so liegt ein Selbstberührungspunkt vor für $a^2 \gtrless 4a'$; für $a^2 = 4a'$ dagegen im allgemeinen eine *Spitze zweiter Art* oder ein *Schnabelpunkt*[12]).

Die vorstehenden Eigenschaften ergeben sich auch (vgl. Nr. **5**), und zwar in allgemeiner Form, aus der Entwickelung der Gleichung $f(\lambda x + \mu y) = 0$, die die Schnittpunkte der die Punkte x, y verbindenden Geraden mit der C^n liefert[13]) („*Joachimsthal'sche Methode*").

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Punkt $P(y)$ ein s-facher Punkt der C^n ist, bestehen darin, dass seine homogenen Koordinaten alle Ableitungen der Ordnung $s - 1$ von f (aber nicht alle der Ordnung s) zu Null machen[14]); bei gegebenem Punkte $P(y)$ sind das $\frac{1}{2}s(s+1)$ in den Koeffizienten von f lineare und unabhängige Relationen, und $\frac{1}{2}(s^2 + s - 4)$, die aber nicht lineare sind, wenn $P(y)$ nicht gegeben ist[15]). Die zusammenfassende Gleichung der Tangenten in P erhält man durch Nullsetzen des Koeffizienten von $\lambda^s \mu^{n-s}$ in der obigen Entwickelung.

Insbesondere ist die Gleichung der Tangente eines einfachen Kurvenpunktes (y):

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0.$$[16])

Soll C^n vielfache Punkte (y) besitzen, so ist jedenfalls

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3);$$

eliminiert man die y, so folgt, dass die Diskriminante von f (I B 1 b, Nr. **18**, *Netto*) verschwinden muss, deren Grad in den Koeffizienten von f $3(n-1)^2$ ist[17]).

---

12) Diese Singularität wurde, beim Studium der Evolute, entdeckt von *de l'Hospital*[10]), p. 102, und sodann von *de Maupertuis*[9]), p. 279, untersucht. Deren Schlüsse wurden von *de Gua*[4]) p. 74—85 bestritten, der die Existenz einer solchen Singularität leugnete. Ihre Natur wurde aufgehellt durch *L. Euler*, Berlin Hist. 5 (1749), p. 203; *Cramer*[4]), p. 572, nennt sie *rebroussement en bec*, oder kurz *bec*. — Vgl. auch *Euler*[4]), p. 180; *J. Plücker*, Th. d. alg. Kurven, Bonn 1839, Abschn. 2; *A. Cayley*, Quart. J. 6 (1864), p. 74 = Papers 5, p. 265.

13) *F. Joachimsthal*, J. f. Math. 33 (1846), p. 371.

14) Oder auch (falls y im Endlichen liegt), dass seine nicht homogenen Koordinaten F nebst den 1^{ten}, 2^{ten}, ..., $(s-1)^{\text{ten}}$ partiellen Ableitungen nach x, y zu Null machen.

15) *de Gua*[4]), p. 238; *Cramer*[4]), p. 441.

16) In dieser Gestalt zuerst von *J. Plücker* gegeben, J. f. Math. 5 (1829), p. 1 = Math. Abh. 1, her. von *A. Schoenflies*, Leipz. 1895, p. 124 (bes. p. 154).

17) Über die algebraischen Bedingungen dafür, dass eine Kurve eine gegebene Anzahl (unbekannter) Doppelpunkte (und über die, dass drei oder vier

Eine C^n mit n-fachem Punkt zerfällt in n Gerade durch den Punkt[18]).

C. Mac Laurin[19]) hat gezeigt, dass eine irreduzible C^n höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte besitzen kann, wobei ein s-facher Punkt als äquivalent mit $\frac{1}{2}s(s-1)$ Doppelpunkten zu betrachten ist (Nr. **18**). Das Maximum von $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten kann erreicht werden, die Kurve ist dann eine *rationale* oder (nach *Cayley*)[20]) *unicursale*; die Koordinaten ihrer Punkte sind darstellbar als rationale Funktionen eines Parameters [vgl. den Satz von *Lüroth* in [292])][21]).

Allgemeiner, wenn sich eine C^n zusammensetzt aus a irreduzibeln von einander verschiedenen Kurven, so gilt:

$$(1) \qquad \sum_i \tfrac{1}{2} s_i(s_i-1) \leqq \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+a-1,$$

wo sich die Summe auf alle vielfachen Punkte der C^n erstreckt[22]).

Eine C^m und eine C^n ohne gemeinsame Teilkurven schneiden sich in mn Punkten (*Bézout*'s Theorem)[23]), wobei jeder gemeinsame

Kurven zwei oder mehr gemeinsame Schnittpunkte) besitzen, s. *S. Roberts,* J. f. Math. 67 (1867), p. 266; Quart. J. 9 (1868), p. 176; *Ch. Hermite,* J. f. Math. 84 (1877), p. 298; *F. Lindemann,* ib., p. 300; *F. Junker,* Wiener Denkschr. 64 (1896), p. 439; Württemb. neues Korrespondenzblatt 3 (1896), p. 434, 476.

18) *Cramer*[4]), p. 455. Vgl. auch *Chr. B. de Bragelongne,* Paris Mém. 1730, p. 194 ff.

19) Geometria organica, London 1720, p. 137. In einen sonderbaren Irrtum verfiel dabei *Euler*[4]), p. 164.

20) *A. Cayley,* Lond. Math. Soc. Proc. 1 (1865), III, p. 1 = Papers 6, p. 1.

21) *A. Clebsch*[39]), p. 44. Das Umgekehrte gilt nur für Kurven mit gewöhnlichen vielfachen Punkten (vgl. Nr. **15**). — Aus der Anzahl $3(n-2)-2r$ der Wendepunkte einer rationalen C^n mit r Spitzen (Nr. 8) hat *Clebsch* gefolgert, l. c. p. 51, dass die Zahl der Spitzen einer $C^n \leqq \frac{3}{2}(n-2)$ ist: das Maximum wird bei den C^3 und C^4 erreicht. Vgl. auch *A. Transon,* Nouv. Ann. de math. (1), 10 (1851), p. 91; 18 (1859), p. 142; *F. Padula,* Ann. sc. fis. mat. 3 (1852), p. 211; *E. Pellet,* Nouv. Ann. de math. (2) 20 (1881), p. 444; *E. C. Valentiner,* Tidsskr. f. Math. (5) 3 (1885), p. 179.

22) *E. Bertini*[161]), p. 329.

23) Durch Induktion, nach dem Beweis für $m=2, 3$, erhalten von *Mac Laurin*[19]), p. 135—36 [p. 137 wird bemerkt, dass wenn eine C^m und C^n $(m \leqq n)$ $mn+1$ Punkte gemein haben, die C^n zerfällt], der daraus die Eindeutigkeit seiner organischen Konstruktionen (Nr. **10**) ableitete. *Newton,* Principia, Lond. 1687, lib. 1, lemma 28, hatte schon bemerkt, dass das Problem, irgend einen jener Schnittpunkte zu finden, von ein- und derselben Gleichung des Grades mn abhängt. — Beweise gaben *L. Euler,* Berlin Hist. 4 (1748), p. 221, 234, und *Cramer*[4]), p. 76, und Appendix II, p. 660; der erstere präzisierte das Theorem, indem er die Anwesenheit gemeinsamer Teile ausschloss, und die imaginären und unendlichen Schnittpunkte berücksichtigte; vgl. auch [4]) cap. 19, 20.

Punkt eine geeignete Anzahl von Malen (im Sinne von Nr. **14**) zu zählen ist: diese Anzahl heisst die *Multiplizität* des betr. Schnittpunktes (III C 3, Nr. **2**, *Zeuthen*).

Nach dem Gesetz der Dualität (III A, B 3 a, Nr. **7**, **12**, *Fano*) übertragen sich die vorstehenden Sätze auf algebraische Enveloppen von Geraden, die durch eine Gleichung $\varphi(u) = 0$ dargestellt sind, unter φ eine ternäre Form der Ordnung n' in Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 verstanden. Die Zahl n' heisst die *Klasse* der Enveloppe; die zu Doppelpunkt und Rückkehrpunkt dualen Singularitäten sind *Doppeltangente* und *Wendetangente.*

Die homogenen Koordinaten der Tangente der Kurve $f = 0$ in einem Punkte (y) waren $\varrho u_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Eliminiert man aus diesen Gleichungen und aus $\sum_{i=1}^{3} u_i y_i = 0$ die y, sowie den Proportionalitätsfaktor ϱ, so erhält man als Resultante eine algebraische homogene Gleichung in den u, die nicht nur von den Tangenten (u) der einfachen Kurvenpunkte erfüllt ist, sondern auch von allen Geraden, die durch vielfache Punkte von f laufen. Dividiert man daher die Resultante durch die Linearformen, die die Geradenbüschel der vielfachen Punkte repräsentieren, jede erhoben auf einen Exponenten, der die bez. Multiplizität angiebt, so gelangt man zu einer algebraischen Gleichung $\varphi(u) = 0$, der die Tangenten von f (einschliesslich der Tangenten der vielfachen Punkte) und nur diese genügen; sie heisst die *Tangentengleichung* (oder *Klassengleichung*) von f.[24]) Aus dem

---

Vollständiger *É. Bézout,* Paris Mém. 1764, p. 288; Th. gén. des équ. alg., Paris 1779 (z. B. p. 32, 45), der seine Methode auf eine beliebige Anzahl von Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten ausdehnte (vgl. I B 1b, Nr. **6**, *Netto*). — Rationale Beweise des Theorems lieferten *M. Noether*[180]); *P. Gordan,* Vorl. üb. Invariantentheorie, her. von *G. Kerschensteiner,* Leipz. 1 (1885), p. 148. Beweise mittels des Korrespondenzprinzips für einfache Gebilde (III C 3, Abschn. III, *Zeuthen*) gab *M. Chasles,* Paris C. R. 75 (1872), p. 736; 76 (1873), p. 126 = J. de math. (2) 18 (1873), p. 202, 212; dort findet sich auch die Untersuchung der endlichen Schnittpunkte; vgl. über diese auch *O. Stolz*[180]), p. 148.

24) Für die Bildung dieser Gleichung und die damit verknüpften algebraischen Fragen vgl. *A. Cayley*[82]); *L. O. Hesse,* J. f. Math. 40 (1849), p. 317 = Ges. Werke, München 1897, p. 259; *S. H. Aronhold*[3]), p. 185; *A. Clebsch,* J. f. Math. 59 (1860), p. 35; *M. Pasch,* ib. 74 (1871), p. 92. Für $n = 3, 4$ s. noch *Cayley,* Cambr. Dubl. Math. J. 1 (1846), p. 97 = Papers 1, p. 230; *Hesse,* J. f. Math. 36 (1847), p. 172; 41 (1850), p. 285 = Werke, p. 187, 279. Über die Methode von *Clebsch* und weitere Anwendungen seines „Übertragungsprinzips" (I B 2, Nr. **12**, *Meyer*) s. *„Clebsch-Lindemann",* p. 274.

Prinzip der Dualität folgt umgekehrt, dass eine algebraische Enveloppe von Geraden, abgesehen von eventuellen Geradenbüscheln, aus den Tangenten einer *algebraischen* Kurve besteht[25]).

Diese doppelte Art, eine ebene Kurve zu betrachten als Ortkurve (Ordnungskurve, Punktort) und Klassenkurve (Geradenort) verdankt man *J. Plücker*[26]) (s. auch Nr. **19**).

Die Ordnung von φ nennt man die *Klasse*[27]) der C^n; sie ist aber die Anzahl der von einem Punkte $P(p)$ an die Kurve gehenden Tangenten, deren Berührungspunkte zugleich mit P variieren, oder auch die Anzahl der mit dem Punkte (p) variabeln Schnittpunkte von C^n mit der Kurve $\sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, der *„ersten Polare“* eines Punktes P allgemeiner Lage in der Ebene (Nr. **5**). Die Klasse einer von vielfachen Punkten freien Kurve ist demnach $n(n-1)$[28]) (Nr. **8**).

3. Fortsetzung; lineare Kurvensysteme (vgl. Abschn. V). Es bestimmen $k+1$ Kurven $f_1 = 0, \ldots, f_{k+1} = 0$ der Ordnung n, die linear unabhängig sind (so dass keine Identität $\sum_{i=1}^{k+1} a_i f_i = 0$ mit konstanten, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten a besteht) ein *Linear-*

25) Eine strenge und rein algebraische Behandlung dieser Eigenschaften lieferte *C. Segre,* Giorn. di mat. 36 (1897) p. 1.

26) s. [54]), p. 241; [12]), p. 200 ff.

27) Nach *J. D. Gergonne,* Ann. de math. 18 (1827/28), p. 151. — Bezüglich der Polemik zwischen *Gergonne* und *Poncelet* (und *Plücker*) über das Dualitätsprinzip und über die Klasse einer C^n, vgl. *E. Kötter,* Bericht, p. 160 ff., sowie III A, B, 3a, Nr. 7, *Fano.*

28) Der Satz findet sich zuerst in der anonymen Schrift Traité des courbes alg., Paris 1756, p. 88, die *Dionis du Séjour et Goudin* zugeschrieben wird (vgl. *G. Loria,* Bibl. math. (2) 13 (1899), p. 10), und wurde wiedergefunden von *J. V. Poncelet,* Ann. de math. 8 (1817/18), p. 213 = Applications d'analyse et de géom. 2, Paris 1864, p. 484; während *Waring*[4]), p. 100 bemerkt hatte, dass die Klasse $\leqq n^2$ sein müsse, und *G. Monge,* Feuilles d'anal. appliquées à la géom., Paris 1801, N. 5, und Application de l'analyse à la géom., Paris 1807 (5. éd. von *J. Liouville,* Paris 1850), p. 16 beobachtet hatte, dass ein einer Fläche der Ordnung n umbeschriebener Kegel sie längs einer Kurve berührt, die auf der Fläche von einer andern Fläche der Ordnung $n-1$ ausgeschnitten wird. — Nach *Joachimsthal*[13]) sind die weiteren Schnittpunkte einer C^n mit den von einem Punkte P an sie gelegten Tangenten der vollständige Schnitt der C^n mit einer $C^{(n-1)(n-2)}$, die *Cremona,* Intr. no. 138, die *Satellitkurve* von P genannt und für $n = 3$ untersucht hat. Allgemein wurde sie von *G. Kohn* behandelt, Wien Ber. 89 (1883), p. 144; vgl. auch *Castelnuovo*[152]); mit stereometrischer Methode von *H. de Vries,* Diss. Amsterdam 1901, und Rotterdam, Nat.- en gen. congr. hand. 1901, p. 116.

system der Ordnung n von ∞^k Kurven (von der *Stufe* oder *Dimension* k), bestehend aus allen durch $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i = 0$ dargestellten Kurven, wo die λ variable Parameter sind[29]).

Für $k = 0$ hat man eine einzelne Kurve; für $k = 1, 2$ ein *Büschel (faisceau ponctuel, pencil, fascio)* resp. *Netz (réseau ponctuel, net, rete)*, während die dualen Systeme als *Schar (faisceau tangentiel, tangential pencil* oder *range, schiera)* resp. als *Gewebe* oder *Scharschar (réseau tangentiel, tangential net* oder *web, tessuto)* bezeichnet werden.

Das durch irgend eine Anzahl von Kurven des Systems bestimmte Linearsystem ist in ersterem enthalten; $\infty^{k'}$ ($k' \leqq k$) Linearsysteme, die in einem ∞^k-System enthalten sind, giebt es $\infty^{(k-k')(k'+1)}$. Liegen zwei Linearsysteme derselben Ordnung und von den Dimensionen k, k' vor, und bedeutet c die Dimension des kleinsten, beide Systeme enthaltenden Systems, s dagegen die des grössten in beiden enthaltenen, so ist $c + s = k + k'$. Hieraus gründet sich die Erzeugung eines Linearsystems aus Linearsystemen geringerer Dimension[30]).

---

29) Systeme von Kurven mit variabeln Parametern betrachtete *G. W. Leibniz,* Acta Erud., Leipz. 1692, p. 168 = Math. Schr. 5, p. 266; Systeme, die linear von willkürlichen Parametern abhängen, *L. Euler,* Berlin Hist. 4 (1748), p. 219. — Dass alle Kurven (und Flächen) der Ordnung n, die durch die zweien, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, von jener Ordnung gemeinsamen Punkten hindurchgehen, durch eine Gleichung der Form $f_1 + \lambda f_2 = 0$ dargestellt werden, bemerkte *G. Lamé,* Ann. de math. 7 (1816/17), p. 229; Examen des diff. méthodes etc., Paris 1818 (Réimpression 1903), p. 28—29 (ein Ursprung jedoch bei *Waring*[4]), p. 100 ff.). Von neuem, und mit weiteren Folgerungen, bei *J. D. Gergonne,* Ann. de math. 17 (1826/27), p. 218, 255; vgl. auch *Bobillier,* ib. 18 (1827/28), p. 25. — Hier ist der Ursprung der Methode der abgekürzten Bezeichnung [zuerst entwickelt von *Bobillier,* l. c. p. 320, und unabhängig von ihm, aber systematischer, von *J. Plücker,* Anal.-geom. Entwickelungen, Essen, 1 (1827), 2 (1831), und J. f. Math. 5 (1829), p. 268 = Abh. 1, p. 159], und weiterhin das erste algebraische Fundament der Schnittpunktsätze (Nr. **33**).

Die Betrachtung der linearen Systeme spielt eine Hauptrolle bei der Bestimmung der endlichen Gruppen (*Kantor, Wiman*) und der kontinuierlichen Gruppen (*Enriques*) von ebenen birationalen Transformationen (III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*), da sich beweisen lässt, dass stets solche Systeme existieren, die in Bezug auf die Gruppe invariant sind: s. [320]). — *G. Fano,* Pal. Rend. 11 (1897), p. 240 hat bewiesen, dass ein lineares System von C^n, das in sich übergeht durch eine kontinuierliche primitive Gruppe von (∞^8, ∞^6 oder ∞^5) ebenen Kollineationen, notwendig aus allen C^n der Ebene besteht [aber, wenn die Gruppe eine ∞^6- oder ∞^5-fache ist, auch gebildet sein kann aus allen $C^{n'}$ ($n' < n$), zu denen als fester Teil die invariante, $(n - n')$-mal gezählte, Gerade hinzutritt].

30) Diese Begriffe haben einen mehrdimensionalen Charakter (III C 9, *Segre*),

Die Kurven eines gegebenen Linearsystems, die durch gegebene Punkte mit gegebener Multiplizität und gegebenen (getrennten oder nicht getrennten) Tangenten hindurchgehen, bilden ein neues Linearsystem.

Schneidet man die Kurven eines Linearsystems der Ordnung n mit einer Geraden, so erhält man eine *Involution* vom Grade n,[31]) die, wenn die Gerade von h linear unabhängigen Kurven des Systems ein Bestandteil ist, von der Dimension (Stufe) $k - h$ ist (vgl. [289])).

Ein s-facher Punkt ($s \geqq 1$) der erzeugenden Kurve des Systems — es genügt, wenn er ein solcher für $k + 1$ linear unabhängige Kurven f_i des Systems ist — heisst ein s-facher *Basis-* oder *Fundamentalpunkt*. Die Gruppen der Tangenten in ihm bilden eine, durch die Tangenten der Kurven f_i bereits bestimmte Involution vom Grade s, die von der Stufe k resp. $< k$ ist, je nachdem alle Systemkurven daselbst genau die Multiplizität s besitzen, oder aber irgend eine von ihnen eine höhere Multiplizität[32]). Die Anzahl der Basispunkte ist eine endliche, vorausgesetzt, dass sich nicht von allen Kurven des Systems ein fester Bestandteil absondert.

---

und sind schon bei *H. Grassmann* entwickelt, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844 (2. Ausg. 1878); Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862. So findet sich der vorletzte Satz resp. in § 126 und Nr. 25 = Ges. Werke, her. von *F. Engel*, Leipzig, 1^1 (1894), p. 208; 1^2 (1896), p. 21 [ein direkter algebraischer Beweis von *C. Segre* bei *Bertini* [287]), Anm. zu p. 7—8]; dagegen entspricht die letzte Eigenschaft der Erzeugung eines linearen Raumes durch Projektion, mit Hilfe von Räumen geringerer Dimension, welche von *Grassmann* beobachtet worden ist, l. c., Werke 1^1, p. 46 ff. (vgl. auch 1^2, p. 21, Nr. 24), sowie von *B. Riemann*, Habil.-Schrift, Göttingen 1854 = Gött. Abh. 13 (1867), p. 1 = Ges. Werke, her. von *H. Weber*, Leipzig 1876, p. 254; 2. Aufl. 1892, p. 272; franz. von *J. Hoüel*, Ann. di mat. (2) 3 (1870), p. 309 = Oeuvres de *R.*, par *L. Laugel*, Paris 1898, p. 280; englisch von *W. K. Clifford*, Nature 8 (1873), Nr. 183/84 = Math. Papers, ed. by *R. Tucker*, Lond. 1882, p. 55. Vgl. auch *G. Veronese*, Math. Ann. 19 (1881), p. 163.

31) Vgl. *J. V. Poncelet*, Traité des propr. proj. des fig., Paris 2 (1866), sect. IV, § 1, 2 [Vom ersten Bande erschien die 1. éd. 1822, die 2. éd. 1865. Vom zweiten Bande wurden Sect. I (p. 1—56) und II (p. 57—121) der Pariser Akad. 1824 vorgelegt, III (p. 122—234) 1831, IV (p. 235—310) wurde 1830/31 verfasst; die ersten drei erschienen zuerst in J. f. Math. resp. 3 (1828), p. 213; 4 (1829), p. 1; 8 (1831), p. 21, 117, 213, 370. Im Folgenden wird der Traité zitiert.]. Vgl. auch *Poncelet*, Paris C. R. 16 (1843), p. 947 = Traité 2, p. 345; *E. de Jonquières*, Ann. di mat. (1) 2 (1859), p. 86.

32) Sätze über Kurven eines linearen Systems, die in einem Basispunkt eine höhere Singularität besitzen als die erzeugende, bei *L. Cremona*, Intr., n. 47, 48; *K. Doehlemann*, Math. Ann. 41 (1892), p. 545; *G. B. Guccia*, Pal. Rend. 7 (1893), p. 193 (§ 1, 2, 3). Für ein Büschel s. auch *Em. Weyr*, Wien Ber. 61 (1870), p. 82; *S. Kantor*, ib. 75 (1877), p. 791.

Ein Linearsystem heisst *irreduzibel* oder *reduzibel*, je nachdem es die allgemeine Kurve des Systems ist. Schliesst man die Systeme mit festen Bestandteilen aus, so setzt sich die allgemeine Kurve eines reduzibeln ∞^k-Linearsystems zusammen aus $t\ (\geqq k)$ irreduzibeln Kurven, die einem und demselben Büschel angehören (und in ihm eine ∞^k Involution vom Grade t bilden)[33]).

Besitzt jede Kurve des Systems (ausserhalb der Basispunkte) einen s-fachen Punkt, so ist der Ort des letzteren eine Kurve, die, $(s-1)$-mal gezählt, einen Bestandteil jeder Systemkurve ausmacht, so dass die allgemeine Kurve eines irreduzibeln linearen Systems keine beweglichen vielfachen Punkte haben kann[34]).

Die Eigenschaft, dass durch k Punkte allgemeiner Lage in der Ebene eine und nur eine Kurve eines gegebenen Linearsystems ∞^k geht, ist charakteristisch für die irreduzibeln Systeme, d. h. jedes algebraische System ∞^k von ebenen algebraischen irreduzibeln Kurven, für das durch k Punkte allgemeiner Lage eine und nur eine Kurve des Systems geht, ist ein Linearsystem[35]).

Grad eines Linearsystems ist die Zahl der variabeln Schnittpunkte irgend zweier seiner erzeugenden Kurven: er ist nur dann gleich Null, wenn der variable Teil des Systems aus einer oder mehreren Kurven eines Büschels besteht. In allen andern Fällen ist der Grad D endlich und > 0, und jene D variabeln Schnittpunkte erfüllen die ganze Ebene. Für ein irreduzibles System ist $D \geqq k-1$.[36])

33) *E. Bertini,* Lomb. Ist. Rend. (2) 15 (1880), p. 24. Vgl. auch *J. Lüroth,* Math. Ann. 42 (1892), p. 457; 44 (1894), p. 539; *E. Netto*, Oberhess. Ges. f. Naturk. Ber., Giessen, 33 (1899), p. 41 (I B 1 b, Nr. **5**, *Netto*).

34) *Bertini,* l. c.; s. auch [417]), p. 246; *É. Picard-G. Simart*[287]) p. 51; für den Fall eines homaloiden Netzes (Nr. **36**) *J. Rosanes,* J. f. Math. 73 (1870), p. 100 = „*Clebsch-Lindemann*", p. 480.

35) Ein Beweis dieser Eigenschaft [die früher die synthetischen Geometer als Definition eines Linearsystems nahmen: vgl. *E. de Jonquières*, J. de math. (2) 7 (1862), p. 409; *Cremona* [39]), n. 42] findet sich z. B. bei *G. Humbert,* J. de math. (4) 10 (1894), p. 169 [Auszug Par. C. R. 116 (1893), p. 1350], (Anm. zu p. 174) = *Picard-Simart* [287]), p. 56; vgl. auch *Segre* [287]), n. 23. — Bei $k>1$ gilt der Satz auch für ein algebraisches System irreduzibler Kurven auf irgend einer algebraischen Fläche (und noch allgemeiner): *G. Castelnuovo,* Torino Atti 28 (1893), p. 727; *F. Enriques,* Rom Linc. Rend. (5) 2^2 (1893), p. 3; *Segre,* l. c. n. 27.

36) Die vorstehenden Eigenschaften gelten auch für die Linearsysteme von Kurven auf irgend einer algebraischen Fläche: *F. Enriques,* Torino Mem. (2) 44 (1893), p. 171 (I, n. 1, 2); Soc. ital. (dei XL) Mem. (3) 10 (1896), p. 1 (n. 3, 5) (III C 6, Flächen, *Castelnuovo* und *Enriques*). — Für die Ebene bei *E. Bertini,* Rom Linc. Rend. (5) 10^1 (1901), p. 73, wo auch bemerkt wird, dass, wenn die durch einen Punkt gehenden Kurven eines Linearsystems daselbst auch die nämliche Tangente besitzen, der Grad gleich Null ist.

4. Das Geschlecht; der Riemann's̓che Satz über dessen Erhaltung bei birationalen Transformationen; Zeuthen's Erweiterung. Nach *B. Riemann* [37]) gehören zwei irreduzible algebraische Kurven (oder deren Gleichungen) zu derselben *Klasse*, wenn zwischen ihnen eine birationale Korrespondenz besteht, derart, dass sich die Koordinaten x', y' der Punkte der einen Kurve ausdrücken lassen als rationale Funktionen der Koordinaten x, y der Punkte der andern Kurve, und dass umgekehrt, vermöge der Gleichung der letzteren, die x, y ausdrückbar sind als rationale Funktionen der x', y'. [38])

Die allen Kurven einer Klasse gemeinsamen Eigenschaften, oder auch die bei birationaler Transformation der Kurve unveränderlichen Eigenschaften der letzteren, bilden den Inhalt der *Geometrie auf einer algebraischen Kurve* (vgl. Abschn. IV und III A, B 3a, Abschn. VII, *Fano*).

Der wichtigste unter den numerischen Charakteren (Invarianten), die für alle Kurven einer Klasse den nämlichen Wert besitzen, ist das *Geschlecht* [39]).

Sei $F(x, \overset{m}{y}) = 0$ die Gleichung einer irreduzibeln Kurve, so konstruiere man über der x-Ebene die zugehörige m-blättrige *Riemann*sche Fläche T (Nr. **1**); diese besitzt als geschlossene Fläche den Zusammenhang $2p + 1$, wo p das Geschlecht der Fläche T (resp. Kurve F) bezeichnet. Dann gilt die Relation (III C 3, Nr. **18**, *Zeuthen*):

37) J. f. Math. 54 (1857), p. 115 = Werke, 1. Ausg., p. 93; 2. Ausg., p. 100; franz. Ausg., p. 106. [Für das Ganze vgl. II B 2, Nr. **5**, **9**, **10**, *Wirtinger*.]

38) In den arithmetischen Untersuchungen von *H. Poincaré*, J. de math. (5) 7 (1901), p. 161, über algebraische Kurven, die durch eine homogene Gleichung *mit ganzen Koeffizienten* dargestellt sind, dient als Basis der Klassifikation die Gruppe der birationalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten, die die Kurve zulässt, d. h. es werden als äquivalent angesehen zwei vermöge einer solchen Transformation je aus einander ableitbare Kurven. So treten neben das Geschlecht andere invariante Charaktere ein. Es werden besonders (vornehmlich hinsichtlich der Verteilung der rationalen Punkte auf ihnen, d. i. derer mit zwei rationalen Koordinaten) untersucht die Kurven vom Geschlecht $p = 0, 1$: die ersteren sind stets äquivalent einer Geraden oder einem Kegelschnitt [vgl. *Noether* [414]), § 2]; und es wird auch die Erweiterung auf irgend einen Rationalitätsbereich für die Substitutionskoeffizienten vorgenommen. Vgl. auch *D. Hilbert* und *A. Hurwitz* [197]), und *S. Kantor* in Nr. **37**.

39) Der Name stammt von *A. Clebsch*, J. f. Math. 64 (1864), p. 43. Die Zahl p hat *A. Cayley* [20]) *deficiency* (Defekt) genannt; *genere* bei *L. Cremona*, Bologna Mem. (2) 6 (1866), p. 91; 7 (1867), p. 29 (deutsch von *M. Curtze*, Berlin 1870) (s. n. 54). — Die irreduziblen Kurven mit $p = 0$ sind rational (Nr. **2** u. **15**); die mit $p = 1$ heissen *elliptische; Cayley*, Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 347 = Papers 8, p. 181 hat auch den Namen *bicursal* vorgeschlagen.

$$(2) \qquad 2p-2=w-2m,$$

wenn w die Summe der Ordnungszahlen der Verzweigungspunkte von T (oder auch der algebraischen Funktion y von x) bedeutet[40]).

Die Gleichheit von p für zwei in ein-eindeutiger Korrespondenz stehende Kurven F hat *Riemann* (l. c. Art. 11) aus der entsprechenden Korrespondenz zwischen den Flächen T abgeleitet, welche deswegen also auch den gleichen Zusammenhang haben.

In anderer Weise hat *K. Weierstrass*[41]) das Geschlecht definiert; er nennt es *Rang* und bezeichnet es mit ϱ.

Die Bedeutung von p für die Geometrie der algebraischen Kurven hat vor allem *R. F. A. Clebsch*[42]) erkannt, dem man die Einteilung der (ebenen und nicht ebenen) algebraischen Kurven nach dem Geschlecht verdankt.

Nach *Riemann* (l. c. Art. 4, 9) ist p auch gleich der Anzahl der zur Kurve gehörigen und linear unabhängigen Integrale erster Gattung (d. i. solcher, die überall auf T endlich bleiben) [vgl. Nr. **27**, **33**][43]). Dieses Theorem haben für den Fall einer irreduzibeln C^n, deren Punktsingularitäten nur aus d Doppelpunkten und r Spitzen bestehen, *A. Clebsch* und *P. Gordan*[44]) in geometrische Form gebracht, indem p die Anzahl der linear unabhängigen Kurven von der Ordnung $n-3$ bedeutet, die durch jene $d+r$ Punkte einfach hindurchgehen[45]), woraus die *Clebsch*'sche Formel[46]) folgt:

---

40) *Riemann*[37]), art. 7. Ein einfacher Beweis bei *C. Neumann,* Vorl. üb. *Riemann's* Th. d. Abel'schen Integrale, Leipzig, 1. Aufl. 1865, p. 312; 2. Aufl. 1884, p. 171; ein anderer, auf dem *V. Puiseux*'schen Prozesse (Nr. **13**) beruhender bei *M. Elliot,* Ann. éc. norm. sup. (2) 5 (1876), p. 399, reproduziert von *Ch. Briot,* Th. des fonctions Abéliennes, Paris 1879, chap. I. — Die Bestimmung von p mittels w, von anderem Gesichtspunkt aus, findet sich auch bei *K. Weierstrass,* Werke 4, Kap. 5.

41) S. Nr. **27**, besonders [314]).

42) S. [360]), [39]), [46]), erstes Zitat [69]). — Unabhängig von *Clebsch* wurde die Bedeutung von p für die Geometrie auch von *H. A. Schwarz* betont, J. f. Math. 64 (1864), p. 1 = Ges. math. Abh., Berlin 1890, 2, p. 8.

43) Von diesem Gesichtspunkt aus könnte der Begriff des Geschlechts auf *N. H. Abel* zurückgehen, Par. Mém. prés. (sav. étr.) (2) 7 (1841), p. 176 (vorgelegt 1826) = Oeuvres, éd. par *L. Sylow* et *S. Lie,* Christiania 1 (1881), p. 145, der das Problem der kleinsten Anzahl von Integralen stellte, auf die eine Summe von Integralen mit gegebenen Grenzen zurückgeführt werden kann. Vgl. *A. Cayley,* Lond. Trans. 172 (1880), p. 751 = Papers 11, p. 29; *Brill-Noether,* Bericht, p. 205 ff. [II B 5, Abel'sche Funktionen, *Wellstein*].

44) Th. der *Abel*'schen Funktionen, Leipzig 1866, p. 15.

45) Solche Kurven heissen *adjungiert* zur C^n: über deren allgemeine Definition s. Nr. **15**.

(3) $$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r,$$

und die duale:

(3′) $$p = \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - d' - r',$$

vorausgesetzt, dass C^n, als Klassenkurve der Klasse n', nur die zu den obigen dualen Singularitäten besitzt, nämlich d' Doppeltangenten und r' Wendetangenten.

Gestützt auf die Betrachtung der Integrale erster Gattung haben *Clebsch*[46]) und *Clebsch-Gordan* (l. c. § 15) einen Beweis für den invarianten Charakter von p geliefert; ein rein algebraischer Beweis, der direkt auf der Diskussion der Transformation und der numerischen Definition (3) von p begründet ist, ist zuerst von *Clebsch-Gordan* (l. c. § 16) erbracht worden. Geometrische Beweise des Theorems gaben, von (3) ausgehend, *L. Cremona*[47]) und *E. Bertini*[48]), und mit demselben Beweisgedanken, wie der letztere, aber unabhängig, *H. G. Zeuthen*[49]), der mittels der nämlichen Methode das Theorem auch erweitert hat [III C 3, Nr. **18**, *Zeuthen*]. *Zeuthen* fand[50]) zwischen den Geschlechtern

46) J. f. Math. 64 (1864), p. 98; vgl. auch [360]), p. 192.

47) S. [39]). *Cremona* nimmt die beiden Kurven in verschiedenen Ebenen an, und untersucht die Ordnung der Doppelkurve der von den, homologe Punkte verbindenden Geraden gebildeten Regelfläche.

48) Giorn. di mat. 7 (1869), p. 105, reproduziert in *„Salmon-Fiedler“*, p. 84 und in *G. A. von Peschka*, Darstellende und projektive Geometrie, Bd. II, Wien 1884, p. 139 (desgl. nebst weiteren Beweisen in *„Clebsch-Lindemann“*, p. 458, 666, 681). Nimmt man beide Kurven in derselben Ebene an, so betrachtet man die Klasse des Ortes der Schnittpunkte der Geraden, die die homologen Punkte von zwei festen homologen Punkten aus projizieren.

49) Paris C. R. 70 (1870), p. 743. — Modifikationen der *Zeuthen*'schen Methode bei *A. Voss*, Gött. Nachr. 1873, p. 414 (und Anm. zu p. 550), der die Enveloppe der homologe Punkte verbindenden Geraden untersucht [man beweist leicht den Satz: Stehen zwei Kurven der Ordnung n, n' in derselben Ebene in einer algebraischen Korrespondenz (x, x'), und existieren k entsprechende zusammenfallende Punkte, so umhüllen die, homologe Punkte verbindenden Geraden eine Kurve von der Klasse $nx' + n'x - k$; diese Zahl ist durch 2 zu teilen, wenn die Korrespondenz zwischen den Punkten ein und derselben Kurve statthat, und eine involutorische ist]; und bei *Clebsch*, dessen Beweis *Noether* mitgeteilt hat, Math. Ann. 8 (1874), p. 497, der auch auf höhere Singularitäten Rücksicht nimmt und seinen Beweis als eine algebraische Einkleidung des *Zeuthen*'schen ansieht; übrigens so gefasst, dass er sich auch auf mehrdeutige Korrespondenzen ausdehnen lässt. Eine analytische Modifikation gibt *T. Brodén*, Stockh. Öfversigt 50 (1893), p. 345.

50) Math. Ann. 3 (1871), p. 150. — Durch stereometrische Betrachtungen ist Formel (4) von *W. Weiss* abgeleitet worden, Math. Ann. 29 (1886), p. 382. Auch der Beweis, den *H. Schubert* vom *Riemann*'schen Theorem geliefert hat, Math. Ann. 16 (1879), p. 180, führt bei leichten Modifikationen zur allgemeineren

p, p' zweier Kurven f, f', die durch eine algebraische Korrespondenz (x, x') auf einander bezogen sind, die Relation:

$$y - y' = 2x(p' - 1) - 2x'(p - 1), \tag{4}$$

unter y, y' die Anzahlen der Korrespondenzverzweigungspunkte auf f, f' verstanden, d. h. der Punkte dieser Kurven, für die zwei ihrer entsprechenden Punkte zusammenfallen.

Wegen der Ausdehnung auf irgend eine singuläre Kurve s. Nr. **15**.

5. Polareigenschaften. Sind x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ zwei Reihen von m kogredienten Variabeln, und f eine Form der Ordnung n, so nennt man die Operation $\Delta_y = \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ die *Polaroperation* in Bezug auf den *Pol* y (I B 2, Nr. **13**, *Meyer*); sie ist eine invariante (projektive) Operation. Übt man r sukzessive Polaroperationen aus mit den Polen y, z, ..., so hat deren Reihenfolge keinen Einfluss auf das Resultat, da:

$$\Delta_y \Delta_z \ldots f(x) = \sum y_i z_k \cdots \frac{\partial^r f}{\partial x_i \partial x_k \ldots},$$

wo sich die Summe auf alle m^r Anordnungen mit Wiederholungen der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ zur Klasse r erstreckt. Setzt man $\Delta_y^r = \Delta_y \Delta_y^{r-1}$, so heisst $\Delta_y^r f(x)$ die r^{te} *Polare* (oder von der *Ordnung* $n - r$) von y in Bezug auf f $(r = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Man hat:

$$\Delta_y^r \Delta_y^s f(x) = \Delta_y^{r+s} f(x), \quad \Delta_z^s \Delta_y^r f(x) = \Delta_y^r \Delta_z^s f(x).$$

Weiter liefert die *Taylor*'sche Entwickelung:

$$f(\lambda x + \mu y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \lambda^{n-r} \mu^r \Delta_y^r f(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(n-r)!} \lambda^{n-r} \mu^r \Delta_x^{n-r} f(y),$$

also:

$$\frac{1}{r!} \Delta_y^r f(x) = \frac{1}{(n-r)!} \Delta_x^{n-r} f(y).$$

Im besondern ist z. B. $\frac{\partial^r f}{\partial x_1^r}$ die r^{te} Polare des Poles $(1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Formel (4). — Aus $x' = 1$ folgt $y = 0$; nimmt man also $p = p' > 1$, so liefert (4) $x = 1$, d. h. zwischen zwei Kurven desselben Geschlechts $p > 1$ kann keine algebraische Korrespondenz existieren, die nur in dem einen Sinne rational wäre: *H. Weber*, J. f. Math. 76 (1873), p. 345; *J. Thomae*, Zeitschr. Math. Phys. 18 (1873), p. 401; Leipz. Ber. 41 (1889), p. 365. — Eine geometrische Deutung von (4), als Ausdruck eines Bandes zwischen den kanonischen linearen Scharen (Nr. **27**) auf f und f' liefert *F. Severi*, Ist. Lomb. Rend. (2) 36 (1903), p. 495; für eine Korrespondenz $(1, x)$ zuvor schon *Castelnuovo*[294].

Für $m = 3$ [51]) gehen hieraus Definitionen und Sätze über *Polarkurven* der Punkte der Ebene in Bezug auf die Grundkurve $f = 0$ hervor [52]).

So gilt das Theorem über die *gemischten* Polaren: „Die s^{te} Polare eines Punktes z in Bezug auf die r^{te} Polare eines Punktes y fällt zusammen mit der r^{ten} Polare von y in Bezug auf die s^{te} Polare von z" (*Plücker* [52])), sowie das Theorem der *Reziprozität*: „Gehört x der r^{ten} Polare von y an, so auch y der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare von x" (*Bobillier* [52])).

---

51) Viele der folgenden Sätze gelten auch für eine beliebige Anzahl von Dimensionen. — Für $m = 2$ repräsentiert $f = 0$ n Punkte $M_1, \ldots, M_n$ einer Geraden, und die r^{te} Polare eines Punktes P besteht aus $n - r$ Punkten, die *E. de Jonquières,* J. de math. (2) 2 (1857), p. 266, „harmonische Mittelpunkte" vom Grade $n - r$ der gegebenen Punkte in Bezug auf P nannte. Vgl. *Cremona,* Intr. art. 3. Bezeichnet man sie mit Q, so bestimmen sie sich aus:

$$(\alpha) \qquad \sum \frac{QM_{i_1}}{PM_{i_1}} \cdot \frac{QM_{i_2}}{PM_{i_2}} \cdots \frac{QM_{i_{n-r}}}{PM_{i_{n-r}}} = 0,$$

wo sich die Summe erstreckt auf alle Kombinationen (ohne Wiederholung) $i_1, i_2, \ldots, i_{n-r}$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zur Klasse $n - r$. Für $r = n - 1$ existiert nur ein einziger Punkt Q, gegeben durch:

$$(\beta) \qquad \frac{1}{PQ} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{PM_i},$$

den *Poncelet* untersucht hat, Traité 2, sect. I, unter dem Namen des Zentrums der harmonischen Mitten der Punkte M_i in Bezug auf P (vgl. IV 4, Nr. 5, *Jung*). Vgl. *Chasles* [4]), p. 713 ff.; *Cremona,* l. c. — Liegt P im Unendlichen, so folgt aus (α): $\sum QM_{i_1} \cdot QM_{i_2} \ldots QM_{i_{n-r}} = 0$, und für $r = n - 1$: $\sum_{i=1}^{n} QM_i = 0$; Q ist dann das Zentrum der mittleren Abstände der Punkte M_i. Diese Beobachtung rührt von *Poncelet* her, l. c., der mittels Projektion die Eigenschaften des ersten Punktes aus denen des letzten ableitet. — Formel (β) findet sich schon bei *C. Mac Laurin,* De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus (Appendix zu „A treatise of algebra"), Lond. 1748, § 27 (franz. von *E. de Jonquières,* in Mélanges de géom. pure, Paris 1856, p. 197 ff.).

52) Diese Polaren, für den Pol im unendlich fernen Punkte der y-Axe, untersucht *Cramer* [4]), p. 129 ff., der sie diamètres curvilignes nennt. Die geradlinigen Durchmesser hat schon *Newton,* Enumeratio linearum tertii ordinis (etwa 1676), Lond. 1704 = Opuscula ed. *J. Castillioneus,* Lausannae et Genevae 1744, 1, p. 247—270 (bes. p. 248), eingeführt. — Die Polargerade eines eigentlichen Punktes betrachtet zuerst *R. Cotes,* vgl *Mac Laurin* [51]), § 28 ff. = Mélanges p. 204 ff.; s. auch *Poncelet,* Traité 2, sect. III, IV. — Den Pol einer Geraden in Bezug auf eine Klassenkurve führt *M. Chasles* ein, Corresp. math. 6 (1830), p. 1, der ihn ableitet aus dem Begriff des Durchmessers einer C^n vermöge einer Polarität in Bezug auf eine Parabel („transformation parabolique"). Über dies alles s. auch Nr. **21**, besonders [246]). — Weiter wurde die Theorie der Polaren,

Die Polaren eines Punktes y in Bezug auf eine C^n sind die Örter der entsprechenden Polargruppen von y in Bezug auf die Gruppe der n Punkte, die eine durch y gehende bewegliche Gerade aus C^n ausschneidet. Zerfällt also C^n in n Gerade durch einen Punkt z, so besteht die r^{te} Polare von y aus $n-r$ Geraden durch z, die im Büschel z die r^{te} Polare der Geraden yz in Bezug auf die n Geraden der Grundkurve bilden.

Ist y ein s-facher Punkt $(n \geqq s \geqq 1)$ der C^n, so sind die Polaren von y von der Ordnung $1, 2, \ldots, s-1$ unbestimmt, und die übrigen besitzen in y einen s-fachen Punkt mit den nämlichen Tangenten, wie C^n. Umgekehrt ist ein Punkt y, den irgend eine seiner (nicht identisch verschwindenden) Polaren zum s-fachen Punkt besitzt, auch s-facher Punkt der C^n (und somit auch jeder Polare von y)[53]).

Damit ein Punkt y s-facher Punkt der C^n sei, ist notwendig und hinreichend, dass seine Polare der Ordnung $s-1$ unbestimmt ist (vgl. Nr. 2); alsdann stellt $\Delta_y^{n-s} f(x) = 0$ die Tangenten in y dar.

Ist y ein s-facher Punkt von C^n, so besitzt die r^{te} Polare eines (von y verschiedenen) Punktes z für $r < s$ in y einen $(s-r)$-fachen Punkt, und seine Tangenten bilden die r^{te} Polare von z in Bezug auf die Gruppe der s Tangenten von C^n in y.[54])

Besitzt die r^{te} Polare von y im Punkte z einen s-fachen Punkt, so besitzt auch die Polare der Ordnung $r+s-1$ von z in y einen s-fachen Punkt, und umgekehrt[55]).

---

mit den gegenwärtigen Benennungen, entwickelt von *Bobillier,* Ann. de math. 18 (1827/8), p. 89, 157, 253; 19 (1828/9), p. 106, 138, 302; sodann, mittels homogener Koordinaten, von *J. Plücker* [16]), p. 156. Vgl. auch *H. Grassmann,* J. f. Math. 24 (1842), p. 262, 372; 25 (1842), p. 57 = Werke 2^1, p. 3; *Joachimsthal* [13]). Über all' diese Arbeiten vgl. *E. Kötter,* Bericht, p. 219 ff., 246 ff., 468 ff. — Eine geometrische Behandlung (wenn sie auch ihren Ausgang von der algebraischen Definition *Grassmann's* nimmt) gab auf Grund der Theorie der harmonischen Mittelpunkte *Cremona,* Intr., Abschn. II.

53) Trifft eine der Tangenten im s-fachen Punkte y die C^n daselbst $(s+k)$-punktig, so treffen alle Polaren von y jene Gerade in y $(s+k)$-punktig; im besondern enthalten die Polaren der Ordnungen $s, s+1, \ldots, s+k-1$ jene Gerade selbst. So zerfällt der Polarkegelschnitt eines Wendepunktes in die Wendetangente und eine weitere Gerade, die nicht durch den Wendepunkt geht; dies ist auch die hinreichende Bedingung, dass ein (einfacher) Punkt der Kurve ein Wendepunkt ist.

54) Vgl. *Cremona,* Intr. n. 73, 74, und [39]), n. 79. Für $s=2$, $r=1$ vgl. *J. Plücker,* System der anal. Geom., Berlin 1835, p. 247. — Es folgt, dass die Multiplizität jener Polare in $y > s-r$ ist, wenn und nur wenn $s-r+1$ Tangenten von C^n in y mit der Geraden yz koinzidieren.

55) *Cremona* [39]), n. 84; für $s=2$ s. auch Intr. n. 78; zuerst bei *J. Steiner,*

Die ersten Polaren der Punkte einer Geraden bilden ein Büschel (*Bobillier* [52])), dessen Basispunkte die $(n-1)^2$ „*Pole*" [56]) sind, die im allgemeinen zu den Geraden gehören. Daraus folgt, dass die ersten Polaren der Punkte der Ebene ein Netz [57]) bilden (das indessen für $n > 3$ kein allgemeines mehr ist [58])). Die ersten (und ebenso die r^{ten}) Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kurven eines Büschels bilden ein zu diesem projektives Büschel [vgl. Nr. **38** a)]; beschreibt der Punkt eine Gerade, so erzeugen die Basispunkte eine $C^{2(n-1)}$, die auch der Ort für die Pole der Geraden in Bezug auf die Kurven des gegebenen Büschels ist [59]).

Zahlreiche andere Eigenschaften der Polaren finden sich bei *Steiner* [60]), *Clebsch* und *Cremona* (s. auch Nr. **6**, **7**). So haben *Steiner* und *Cremona* die Enveloppe der r^{ten} Polare eines Punktes untersucht, wenn dieser eine Kurve γ von der Ordnung m und Klasse m' durchläuft. Diese Enveloppe ist von der Ordnung $(n-r)[m' + 2m(r-1)]$, und entsteht auch als Ort eines Punktes, dessen $(n-r)^{\text{te}}$ Polare γ

Berlin. Ber. 1848, p. 310 = J. f. Math. 47 (1853), p. 1 = Ges. Werke, herausg. von *K. Weierstrass*, Berlin 1882, 2, p. 495.

56) *Points polaires* nach *Bobillier; poli congiunti* nach *Cremona.* Jeder s-fache Punkt der Grundkurve absorbiert $(s-1)^2$ dieser Pole, und mehr als $(s-1)^2$ nur dann, wenn die s Tangenten des s-fachen Punktes nicht alle getrennt sind. Beschreibt ein Punkt eine C^m, so durchlaufen seine konjugierten Pole eine $C^{mn(n-2)}$ nach *Cremona,* Intr. n. 105. — S. auch *R. H. Vivian,* Diss. Philad. 1901. — Haben die ersten Polaren dreier nicht auf einer Geraden befindlichen Punkte einen s-fachen Punkt gemein, so ist dieser wenigstens ein $(s+1)$-facher für die Grundkurve. Einzelne Sätze über erste Polaren bei *C. le Paige,* Brux. Bull. (2) 44 (1877), p. 365; (3) 1 (1881), p. 134; Brux. Mém. cour. 42 (1878), (n. 22); Časopis 10 (1881), p. 212.

57) *Steiner* [55]). — *E. Bertini,* Torino Atti 33 (1897), p. 23 hat alle Fälle bestimmt, wo zwei C^n das nämliche Netz der ersten Polaren besitzen; Erweiterungen in Rom. Linc. Rend. (5) 7^2 (1898), p. 217, 275.

58) Vgl. *Cremona,* Ann. di mat. (1) 6 (1864), p. 153. Für $n = 3$ s. III C 1, Nr. **79**, *Dingeldey.*

59) *Bobillier* [52]); vgl. *Cremona,* Intr. n. 86.

60) S. [55]), sowie [254]). — *Steiner,* J. f. Math. 45 (1852), p. 377 = Werke 2, p. 489, und l. c. = Werke 2, p. 537, 599 hat auch eine der Definitionen der Polargeraden in Bezug auf einen Kegelschnitt ausgedehnt, durch Betrachtung des Ortes der Schnittpunkte der Tangenten, die in denjenigen Punkten einer C^n gelegt sind, wo letztere von den Geraden eines Büschels getroffen wird. Dieser Ort ist genauer untersucht von *H. Schubert* [103]), p. 195; *P. H. Schoute,* Bull. sci. math. (2) 10^1 (1886), p. 242; *H. G. Zeuthen,* ib. (2) 11^1 (1887), p. 82; *J. C. Kluyver,* Nieuw Arch. v. Wisk. 17 (1890), p. 1. Über diese Kurve, sowie über die analoge mittels der Normalen erhaltene und über analoge auf ein Kurvenpaar bezügliche Örter, sprach Sätze aus *E. de Jonquières,* Nouv. Ann. de math. (1) 20 (1861), p. 83, 140 [Beweise bei *E. Dewulf,* ib. (2) 2 (1863), p. 111]; s. auch J. de math. (2) 6 (1861), p. 113; sowie *A. Beck,* Zürich. Vierteljahrsschr. 37 (2), 38 (3, 4) (1893).

berührt; *Steiner* hat sie die r^{te} Polare von γ in Bezug auf die Grundkurve genannt. *Cremona* (Intr. n. 104) hat daraus eine Definition der r^{ten} Polare eines Punktes abgeleitet als Enveloppe der Geraden, deren $(n-r)^{te}$ Polaren durch den Punkt hindurchgehen, und allgemeiner den Satz, dass, wenn die r^{te} Polare einer Kurve γ eine Kurve γ' berührt, auch die $(n-r)^{te}$ Polare von γ' die Kurve γ berührt. *Clebsch* [61]) hat, u. a., den Ort der Schnittpunkte der ersten und zweiten Polare eines Punktes, wenn dieser eine C^m durchläuft, untersucht; dieser Ort ist von der Ordnung $m(3n-4)$, besitzt einen m-fachen Punkt in jedem Wendepunkt der Grundkurve, und berührt dieselbe in allen Schnittpunkten dieser mit C^m. [62])

Edm. Laguerre [63]) hat vom Standpunkt der Formentheorie aus die *gemischte Gleichung* einer Kurve von der Klasse m studiert, d. h., wenn $\lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$ das durch einen gegebenen Punkt gehende Geradenbüschel darstellt, die Gleichung vom Grade m in λ_1, λ_2, die die vom Punkte an die Kurve gelegten Tangenten liefert; hieraus ergeben sich verschiedene Eigenschaften der Polaren [64]), sowie der Cayleyana (Nr. **7**) einer Kurve [78]).

Bezüglich der Erweiterung der Polarentheorie auf die der *Apolarität* s. I B 2, Nr. **10**, **24**, *Meyer* [65]), und wegen des Zusammenhanges der ersteren mit der Geometrie der Massen s. IV 4, Nr. **25**—**29**, *Jung*.

61) J. f. Math. 58 (1860), p. 273. *Clebsch* stützt sich dabei auf eine allgemeine Methode der Elimination von m Variabeln aus m homogenen Gleichungen, von denen $m-2$ linear sind, eine quadratisch und eine von beliebiger Ordnung, und gelangt so auch zu den Gleichungen der fraglichen Örter.

62) Vgl. auch *Cremona*, Intr. n. 106. Eine Reihe von Sätzen gab *Cremona* über Polaren in Verbindung (art. 14) mit Systemen von ∞^1 Kurven (Nr. **9**); sowie über die Kurve, die ein Punkt beschreibt, dessen *Indicatrices* (d. s. die von ihm an seinen Polarkegelschnitt gelegten Tangenten) nach einem gegebenen Gesetze variieren (art. 19); endlich über reine und gemischte zweite Polaren (art. 21).

63) J. de math. (2) 17 (1872), p. 1; (3) 1 (1875), p. 99, 265; (3) 4 (1878), p. 213; Paris C. R. 78 (1874), p. 744; 80 (1875), p. 1218; Bull. soc. math. de France 3 (1875), p. 174 = Oeuvres 2, Paris 1905, p. 188, 377, 398, 507, 372, 427, 410. Der Ausgangspunkt bei *Laguerre* ist der: Sind $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ... die gemischten Gleichungen mehrerer Kurven, so erhält man durch Nullsetzen einer Invariante der Formen f_i die Gleichung einer Kurve, deren Ordnung durch das Gewicht der Invariante angegeben wird; dies kommt also bei der Formulierung auf das *Clebsch*'sche [24]) Übertragungsprinzip hinaus.

64) So z. B. (s. die beiden letztzitierten Arbeiten), wenn von einem Punkte die Tangenten an eine Kurve der Klasse m gesetzt werden, so koinzidieren die Polargeraden des Punktes in Bezug auf die Kurve und in Bezug auf die Kurve der $\frac{1}{2}m(m-1)$ Verbindungslinien der Berührungspunkte. Vgl. auch *M. d'Ocagne*, Bull. soc. math. de France 12 (1884), p. 114.

65) Über diesen Gegenstand s. auch die später erschienenen Arbeiten:

6. Die Jacobi'sche Kurve dreier Kurven. Setzt man die *Jacobi*-sche (oder Funktional-) Determinante der linken Seiten von den Gleichungen dreier Kurven C^{n_1}, C^{n_2}, C^{n_3} [I B 1 b, Nr. **17**, **19**, **21**, *Netto*] gleich Null, so erhält man eine Kurve J der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 - 3$, die *Jacobi'sche Kurve* oder die *Jacobiana*[66]) der drei gegebenen Kurven. Sie ist der Ort eines Punktes, dessen Polargeraden in Bezug auf die drei gegebenen Kurven durch einen und denselben Punkt gehen, sowie auch der Ort eines Punktes, in dem die ersten Polaren eines und desselben Punktes in Bezug auf jene Kurven sich schneiden[67]). Ein gemeinsamer, resp. s_1-, s_2-, s_3-facher Punkt der gegebenen Kurven ist wenigstens ein $(s_1 + s_2 + s_3 - 2)$-facher Punkt[68]) von J.

Für $n_2 = n_3$ ist J eine Kombinante [I B 2, Nr. **25**, *Meyer*] der Büschels (C^{n_2}, C^{n_3}) und zugleich der Ort eines Punktes, der die nämliche Polargerade in Bezug auf C^{n_1} und einer gewissen Kurve des Büschels besitzt[69]).

Haben alle drei Kurven dieselbe Ordnung n, so ist J eine Kom-

---

A. Grassi, Giorn. di mat. 38 (1900), p. 244; *F. Palatini,* Torino Atti 38 (1902), p. 43; 41 (1906), p. 634; Rom Linc. Rend. (5) 12¹ (1903), p. 378, in welchen letzteren eine Form, insbes. eine ternäre als Summe von Potenzen von Linearformen dargestellt wird. Hierüber, und allgemeiner, über kanonische Formen vgl. noch *P. Serret,* Géom. de direction, Paris 1869; *H. W. Richmond,* Quart. J. 33 (1902), p. 331; *E. Lasker,* Math. Ann. 58 (1903), p. 434. Über die zu einer C^n konjugierten $(n+1)$-Ecke s. auch für $n = 3, 4, 5$ *G. Manfredini,* Giorn. di mat. 39 (1901), p. 145; 40 (1902), p. 16. Einige allgemeine Sätze über projektive Erzeugung (Nr. **10**) konjugierter und apolarer Kurven hat *O. Schlesinger* aufgestellt, Math. Ann. 22 (1883), p. 520 (§ 7); 30 (1887), p. 453 (§ 2).

66) Nach *J. J. Sylvester,* Lond. Trans. 143 (1853), p. 546 = Math. Papers, Cambridge, 1 (1904), p. 583.

67) Die J ist untersucht von *Cremona,* Intr. n. 93 ff., als erzeugt durch zwei projektive Büschel; von *Guccia* [32]), § 6, als erzeugt durch die drei projektiven Netze der ersten Polaren der gegebenen Kurven.

68) Vgl. *Guccia,* l. c., wo auch die Tangenten von J im vielfachen Punkte bestimmt, und viele Spezialfälle untersucht werden. — *F. Gerbaldi,* Pal. Rend. 8 (1893), p. 1 hat analytisch alle Fälle angegeben, wo die Multiplizität von J im Punkte die Angabe $s_1 + s_2 + s_3 - 2$ um 1 oder 2 überschreitet.

69) *Cremona,* Intr. n. 87, 94. — Ein s-facher Punkt der C^{n_1}, der s'-fach ist für die Kurven des Büschels, die daselbst wenigstens eine bewegliche Tangente besitzen, ist für J ein $[s + 2(s' - 1)]$-facher Punkt, und s der Tangenten fallen mit denen von C^{n_1} zusammen: *Noether* [49]), p. 500; *Guccia,* l. c. p. 249. Für $s = s' = 1$ wird der Satz *O. Hesse* verdankt, J. f. Math. 41 (1850), p. 286 = Werke, p. 281; für $s = 2$, $s' = 1$ *A. Clebsch,* J. f. Math. 64 (1864), p. 210 (§ 3); beide Fälle werden von neuem behandelt bei „*Clebsch-Gordan*“ [44]), § 17; für beliebiges s und $s' = 1$, *Clebsch,* J. f. Math. 65 (1865), p. 363. Für $s' = s - 1$ s. „*Clebsch-Lindemann*“, p. 380.

binante des durch die drei Kurven bestimmten Netzes [70]), und wird nur dann unbestimmt, wenn das Netz vom Grade (Nr. 3) Null ist [71]). Schliesst man diesen Fall aus, so ist J von der Ordnung $3(n-1)$, und ist der Ort der Doppelpunkte von Netzkurven, wie auch der Ort eines Punktes, in dem sich zwei (und damit unendlich viele) Kurven des Netzes berühren, sowie endlich der Ort eines Punktes, dessen Polargeraden in Bezug auf die Netzkurven je durch einen und denselben Punkt gehen [72]). Der Ort S dieses letzteren Punktes ist die *Steiner'sche Kurve* oder die *Steineriana* des Netzes, von der Ordnung $3(n-1)^2$. Die Kurven J und S sind punktweise ein-eindeutig auf einander bezogen; die Gerade, die zwei entsprechende Punke verbindet, berührt in dem Punkte von J alle durch ihn gehenden Kurven des Netzes: die Enveloppe dieser Geraden ist die *Cayley*'sche *Kurve* oder die *Cayleyana* [73]) des Netzes, und von der Klasse $3n(n-1)$.

Besitzt das Netz einen s-fachen ($s > 1$) Basispunkt, in dem die Gruppen der Tangenten eine Involution zweiter Stufe und vom Grade s bilden, so besitzt J daselbst die Multiplizität $3s-1$. [74])

---

70) J nennt *Cremona,* Intr. n. 92, die *Hessiana* (statt Jacobiana) des Netzes.

71) Für $n=2$, *J. Hahn,* Diss. Giessen 1878 = Math. Ann. 15 (1879), p. 111; *M. Pasch,* Math. Ann. 44 (1893), p. 89; für beliebiges n, *M. Pasch,* Math. Ann. 18 (1881), p. 93; *A. Levi,* Giorn. di mat. 34 (1896) [Auszug Torino Atti 31 (1896), p. 502], p. 218; *Bertini* [36]).

72) *Cremona,* Intr. n. 92, 95. — Auf Grund der ersten Definition ist die J zuerst von *Steiner* [55]) betrachtet worden, der ihre Ordnung angiebt und bemerkt, dass sie in jedem einfachen Basispunkt des Netzes einen Doppelpunkt besitzt. Von der zweiten Definition geht *Kötter* [155]) aus, und gelangt so zu einer Erzeugung von J durch zwei projektive Büschel. Eine andere projektive, aber von der Polarentheorie unabhängige Konstruktion, gab *Guccia* [440]), § 9. Diese Konstruktionen, sowie die von *Cremona* [67]) für die J dreier beliebiger Kurven, liefern auch einen zu J fremden Bestandteil. — Über J und andere kovariante Kurven eines Netzes, mit Anwendungen auf Kurventransformationen, s. *Ch. A. Scott,* Nieuw Arch. v. Wisk. (2) 3 (1898), p. 243; Ass. franç. 26^me^ session, St. Étienne, 1897, p. 50, und besonders Quart. J. 29 (1898), p. 329; 32 (1900), p. 209. — Mittels der Kurve J des Netzes $\sum_{\lambda=1}^{3}\lambda_i f_i = 0$ der Ordnung n hat *A. Cayley,* Quart. J. 8 (1867), p. 334 = Papers 6, p. 65 auch das System $\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\lambda_i f_i} = 0$ von Kurven [„Trizomal Curves": vgl. *Cayley* [252])] der Ordnung $2n$ mit n^2 Berührungen mit jeder $f_i = 0$ untersucht; unter ihnen befinden sich insbesondere $\frac{3}{2}(n-1)(27n^3 - 63n^2 + 22n + 16)$ Individuen mit zwei Doppelpunkten.

73) *Cremona,* Intr. n. 92, 98.

74) *Cremona* [58]); weitere Sätze dort und Intr. art. 15; sowie bei *Döhlemann* [32]); *Guccia* [67]), [72]); *Gerbaldi* [68]).

7. Kovariante Kurven einer Grundkurve; Hesse'sche, Steinersche, Cayley'sche Kurve; Bitangentialkurve. Liegt eine Grundkurve $f = 0$ der Ordnung n vor, so heissen die Jacobiana, Steineriana und Cayleyana des Netzes der ersten Polaren von f resp. die *Hesse'sche, Steiner'sche, Cayley'sche Kurve* oder die *Hessiana, Steineriana* und *Cayleyana* von f (H, S und C von f). H ist auch der Ort der Punkte, deren Polarkegelschnitt in zwei Gerade zerfällt, S der Ort der Doppelpunkte jener Geradenpaare[75]). Zwei korrespondierende Punkte auf H, S genügen den Gleichungen $\sum_{i=1}^{3} y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0$ ($k = 1, 2, 3$), aus denen durch Elimination der y resp. x die Gleichungen von H resp. S hervorgehen; die erstere ist $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| = 0$.[76])

Für $n = 3$ fallen H und S zusammen.

Nach *Hesse*[77]) ist das identische Verschwinden von H die not-

75) Diese Geraden umhüllen eine Kurve der Klasse $3(n-2)^2$; es sind die, deren zweite Polaren einen Doppelpunkt besitzen, und diese Doppelpunkte liegen auf H: *Cremona*, Intr. n. 128. Die Bestimmung der Wendepunkte mittels jener Definition von H gab *G. Salmon*, Cambr. Dubl. Math. J. 2 (1846), p. 74; vgl. auch [3]), p. 71.

76) Diese Kurve heisst nach *O. Hesse*, der sie zuerst J. f. Math. 28 (1844), p. 68 = Werke, p. 89 untersucht hat, *Hessiana* [I B 1 b, Nr. 22, *Netto*], auf den Vorschlag von *J. J. Sylvester*, Cambr. Dublin math. J. 6 (1851), p 186 = Papers 1, p. 184. — Die geometrischen Definitionen von H und deren wesentlichste Eigenschaften hat *Steiner* [55]) ausgesprochen, der auch als erster S und C betrachtete. Die Namen dieser beiden stammen von *Cremona*, Intr. n. 88, 133; die letztere nach *Cayley* benannt, der sie für $n = 3$ studierte, J. de math. (1) 9 (1844), p. 285; Lond. Trans. 147 (1857), p. 415 = Papers 1, p. 183; 2, p. 381. H und S nannte *Steiner* nebst andern „konjugierte Kernkurven" von f. Die von ihm ausgesprochenen Sätze bewies, mit vielen andern, geometrisch *Cremona*, Intr. Abschn. II; einige davon analytisch *A. Clebsch*, J. f. Math. 59 (1860), p. 125. — Die zu H, S, C analogen Kurven für die r^{ten} ($r > 1$) Polaren („konjugierte Kernkurven r^{ter} Ordnung") behandeln *O. Henrici*, Lond. Math. Soc. Proc. 2 (1868/69), p. 104, 177; *F. G. Affolter*, Diss. Zürich, Solothurn 1875; *„Salmon-Fiedler"*, p. 464; *G. Maisano*, Pal. Rend. 1 (1886), p. 66; *A. Voss*, Math. Ann. 27 (1886), p. 381.

77) J. f. Math. 42 (1851), p. 117; 56 (1858), p. 263 = Werke, p. 289, 481 [I B 1 b, Nr. 22 *Netto*; I B 2, Nr. 27 *Meyer*]. — Vgl. auch *J. J. Sylvester*, Phil. Mag. (4) 5 (1853), p. 119 = Papers 1, p. 587; *P. Gordan*, Erl. Ber. 1875; *P. Gordan* und *M. Noether*, Math. Ann. 10 (1876), p. 547 (Auszug Erl. Ber. 1876); *„Clebsch-Lindemann"*, Anm. auf p 598 (hier, in der Anm. p. 599, werden die Bedingungen für die Zerlegung einer C^n in einer n-fachen Gerade durch das identische Verschwinden einer Zwischenform dargestellt). — *Wölffing* [11]) hat die Hessiana einer ganzen rationalen Funktion ternärer Formen untersucht [für den Fall eines Produktes *„Salmon-Fiedler"*, p. 277; *F. Gerbaldi*, Pal. Rend. 3 (1889),

wendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen von f in n Gerade eines Büschels[78]).

Nach dem *Riemann*'schen Theorem (Nr. 4) besitzen H, S und C dasselbe Geschlecht, das, solange f keine vielfachen Punkte besitzt, den Wert $\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$ hat; in diesem Falle entnehme man die Ordnung N, die Anzahlen D, R der Doppelpunkte und Spitzen, sowie die dualen Zahlen N', D', R'[79]) für die drei Kurven der Tabelle[80]):

---

p. 60; *Pascal*[3]), § 14], mit Erweiterungen in Math. Ann. 43 (1892), p. 26 [I B 2, Nr. **12**, Anm. 228, *Meyer*].

78) Die Polargerade eines Punktes von H berührt S im entsprechenden Punkte, sodass S die Wendetangenten von f zu Tangenten hat. Die Kurve S zusammen mit ihren stationären Tangenten bildet die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare von H (vgl. Nr. **5**). Die Tangente von H in einem Punkte x ist harmonisch konjugiert zu der, x mit dem homologen Punkte y von S verbindenden Geraden in Bezug auf die beiden Tangenten der ersten Polare von y in ihrem Doppelpunkte x. Über diese und viele weitere Sätze s. *Cremona,* Intr. art. 19, 20, 21; *„Clebsch-Lindemann",* p. 359 ff.; *A. Voss,* Math. Ann. 30 (1887), p. 423; *Kötter*[155]). — Sätze über die Cayleyana leitete *Laguerre*[63]) aus der gemischten Gleichung einer Kurve ab. So z. B. (s. die erste Note in Paris C. R.): „Wenn die erste Polare eines Punktes in Bezug auf eine C^n eine Gerade als Teil enthält, so ist diese $[2(n-2)]$-fache Tangente der Cayleyana." Die Cayleyana einer allgemeinen C^4 besitzt daher 21 vierfache Tangenten (und keine weiteren vielfachen), ein von *E. Bertini* wiedergefundener Satz, Torino Atti 32 (1896), p. 32; vgl. auch *G. Scorza,* Ann. di mat. (3) 2 (1898), p. 162.

79) Dass die Hessiana einer allgemeinen f keine vielfachen Punkte besitzt, bewies für $n=4$ (aber unvollständig) *C. F. Geiser,* Ann. di mat. (2) 9 (1878), p. 35; der Beweis wurde allgemein geführt von *P. del Pezzo,* Napoli Rend. 22 (1883), p. 203; *E. C. Valentiner,* Tidsskr. f. Math. (5) 6 (1888), p. 48; vgl. *Gerbaldi*[68]). — *Del Pezzo* (l. c.) und *Kötter*[155]) haben, der erstere analytisch, der letztere geometrisch, Fälle studiert, wo H vielfache Punkte ausserhalb f besitzt. — Die auf S bezüglichen Anzahlen, ebenso die Klasse von C, wurden von *Steiner*[55]) angegeben, geometrisch von *Cremona* bewiesen, Intr. n. 118; die auf S und C bezüglichen analytisch durch *A. Clebsch* bestimmt, J. f. Math. 64 (1864), p. 288. — Eine charakteristische Eigenschaft der Wendepunkte von S gab *Voss*[76]), p. 389; er bestimmte auch analytisch die Spitzen der Enveloppe der Geraden, die die homologen Punkte zweier durch drei biternäre Gleichungen ein-eindeutig aufeinander bezogener Kurven verbinden, und im besondern die Spitzen von C: Math. Ann. 30 (1887), p. 241, 287.

80) Aus diesen Anzahlen zieht man ebenso viele Sätze über erste Polaren: so existieren $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ erste Polaren mit zwei Doppelpunkten, und ihre Pole sind die Doppelpunkte von S; ferner giebt es $12(n-2)(n-3)$ erste Polaren mit Spitze. *Clebsch*[76]) für $n=4$, und *Cremona,* Intr. n. 121 allgemein, haben hinzugefügt, dass die Pole der ersten Polaren mit Spitze die Spitzen von S sind; vollständiger: wenn die erste Polare eines Punktes y eine Spitze in x hat, so hat auch S eine Spitze in y, und zur Spitzentangente die Polargerade von x, während die Spitzentangente jener ersten Polare H in x berührt.

Wenn f weder vielfache noch geradlinige Bestandteile enthält, und nur dann, ist kein Teil von f in H enthalten[81]); f und H schneiden sich in einer endlichen Anzahl von Punkten, nämlich in den vielfachen Punkten und Wendepunkten von f. Trifft die Tangente eines einfachen Punktes von f die Kurve $(\sigma + 1)$-punktig $(\sigma > 1)$, so fallen in ihm $\sigma - 1$ Schnittpunkte von f mit H hinein, d. h. $\sigma - 1$ gewöhnliche Wendepunkte von f.[82]) In einem s-fachen Punkte A von f $(s < n)$ besitzt H wenigstens die Multiplizität $3s - 4$, und als Tangenten ausser denen von f die $2(s-2)$ Geraden, die im Büschel A die *Hesse*'sche Gruppe von jenen s Geraden bilden[83]).

	Hesse'sche Kurve	*Steiner*'sche Kurve	*Cayley*'sche Kurve
N	$3(n-2)$	$3(n-2)^2$	$3(n-2)(5n-11)$
N'	$3(n-2)(3n-7)$	$3(n-1)(n-2)$	$3(n-1)(n-2)$
D	0	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$	$\frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$
D'	$\frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$	$\frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$
R	0	$12(n-2)(n-3)$	$18(n-2)(2n-5)$
R'	$9(n-2)(3n-8)$	$3(n-2)(4n-9)$	0

81) *Segre* [25]), p. 41.

82) *Segre*, l. c., p. 42; für $\sigma = 3$ *Cayley*, J. f. Math. 34 (1846), p. 30 = Papers 1, p. 337.

83) Die beiden ersten Teile des Satzes findet man bei *G. Salmon* [3]), p. 74; vollständig gab den Satz *A. Brill*, Math. Ann. 13 (1877), p. 175; auf Grund der Reihenentwicklungen (Nr. **13**) bewies ihn *M. Elliot*, Bull. sci. math. (2) 2^1 (1878), p. 216. — Koinzidieren s' $(< s)$ Tangenten von f in A, so fallen damit auch in jene Tangente $3s' - 2$ Tangenten von H zusammen. H besitzt in A eine Multiplizität $> 3s - 4$ nur dann, wenn alle s Tangenten von f koinzidieren: $2s - 2$ Tangenten von H fallen dann mit jener Geraden zusammen. Zu diesen und weiteren Eigenschaften vgl. *Segre*, l. c., p. 42 ff.; *Kötter* [155]). — Im besondern ist ein Doppelpunkt von f auch ein solcher für H, und zwar mit denselben Tangenten; in einer gewöhnlichen Spitze von f besitzt H einen dreifachen Punkt, und zwei seiner Tangenten fallen in die Spitzentangente: *Cayley* [82]), *Salmon* [75]); während, wenn A ein Selbstberührungspunkt ist, auch die dritte Tangente mit jener zusammenfällt; H besitzt daselbst nur dann einen vierfachen Punkt, wenn der Selbstberührungspunkt ein symmetrischer ist: *Wölffing* [11]), p. 118; *Segre*, l. c., p. 48. — Einige singuläre Beobachtungen über Berührungen von H mit Geraden, die von einem vielfachen Punkte von f ausgehen, stellt *Segre* (auch in höheren Gebieten)

A. Cayley[84]) fand, dass die Berührungspunkte der Doppeltangenten von f durch eine Kurve B, die *Bitangentialkurve*, der Ordnung $(n-2)(n^2-9)$ ausgeschnitten werden, und gab auch eine Methode zur Aufstellung ihrer Gleichung an mittels der schon in Nr. 2 und 5 erwähnten Gleichung $f(\lambda x + \mu y) = 0$, die die Schnittpunkte von f mit der Geraden xy liefert. Soll diese f in x berühren, muss $f = 0$, $\Delta_y f = 0$ sein, und damit sie in einem zweiten Punkte berühre, muss die Diskriminante Λ der reduzierten Gleichung vom Grade $n-2$ verschwinden, muss also $\Delta_y f$ als Faktor enthalten. *Cayley* erhält die Gleichung von B durch Elimination der y aus den Gleichungen $\Lambda = 0$, $\Delta_y f = 0$, $\sum \alpha_i y_i = 0$, wo die α willkürliche Grössen sind.

Eine andere Methode, mit Benützung einer Kurve T (der *Tangentialkurve*) der Ordnung $n-2$, die durch die weiteren $n-2$ Schnittpunkte von f mit einer ihrer Tangenten geht, gab *G. Salmon* an[85]). Die allgemeine Gleichung von T stellte *Cayley* auf[86]); aus ihr geht die von B hervor vermöge der Bedingung, dass T die betreffende Tangente von f berührt.

8. **Die Plücker'schen Formeln.** Es war bereits bemerkt (Nr. 2), dass die Klasse einer von vielfachen Punkten freien C^n den Wert $n(n-1)$ hat. Durch jeden vielfachen Punkt der C^n erleidet die Klasse eine Erniedrigung um die Multiplizität, die in ihm als Schnittpunkt die C^n und die erste Polare irgend eines (nur nicht auf einer Tangente des fraglichen Punktes gelegenen) Punktes aufweisen. Somit erniedrigt ein s-facher Punkt der C^n mit lauter getrennten Tangenten die Klasse um $s(s-1)$ Einheiten[87]).

---

an, Rom Linc. Rend. (5) 4^2 (1895), p. 143. — *Wölffing,* Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 31 untersucht mit Reihenentwicklungen, wie sich in verschiedenen Fällen H, S, C und andere kovariante Kurven in einem singulären Punkte von f verhalten.

84) S. [82]). Vgl. auch *O. Hesse,* J. f. Math. 36 (1847), p. 155 = Werke, p. 168; *Jacobi* [92]); *Clebsch*[24]), p. 45; für $n = 4$ *Hesse,* J. f. Math. 40 (1849), p. 260; 41 (1850), p. 291; 52 (1855), p. 97 = Werke, p. 260, 287, 405.

85) Phil. Mag. (4) 16 (1858), p. 318; Quart. J. 3 (1859), p. 317.

86) London Trans. 149 (1859), p. 193; 151 (1861), p. 357 = Papers, 4, p. 186, 342. — Diese Methoden, mit Anwendungen auf C^4 und C^5, sind wiedergegeben in *„Salmon-Fiedler“,* p. 432 ff. Die *Salmon-Cayley*'sche Methode vereinfachte *O. Dersch,* Math. Ann. 7 (1873), p. 497. Für die C^4 vgl. noch *J. Freyberg,* Math. Ann. 17 (1880), p. 329. Die Methode von *Clebsch* [92]) hat *G. Maisano* mit symbolischer Rechnung auf $n = 5$ angewendet, Math. Ann. 29 (1886), p. 431.

87) *Poncelet,* Traité 2 (auf p. 68 ein Irrtum), p. 219; *Plücker* [12]), p. 224. — Sind von den s Tangenten im s-fachen Punkte λ ($\leqq s$) getrennt, und treffen sämtlich daselbst $(s+1)$-punktig, so beträgt die Erniedrigung $s^2 - \lambda$: sie ab-

Aus Nr. 7 folgt, dass eine C^n ohne vielfache Punkte $3n(n-2)$ Wendepunkte besitzt, die Schnittpunkte von C^n mit ihrer Hessiana[88]) H. Ein vielfacher Punkt der C^n erniedrigt diese Anzahl um die Multiplizität des Schnittes mit H daselbst; ist der Punkt ein s-facher, so beträgt der Abzug wenigstens $3s(s-1)$;[89]) er wird grösser, wenn entweder die s Tangenten nicht alle mehr getrennt sind, oder wenn irgend eine derselben die C^n daselbst mehr als $(s+1)$-punktig trifft[90]).

Ist eine Kurve von der Ordnung n und der Klasse n', und besitzt sie keine andern Singularitäten, als die gewöhnlichen, d Doppelpunkte, r Spitzen, d' Doppeltangenten und r' Wendetangenten[91]), so folgen aus obigem die „*Plücker'schen Formeln*"[92]):

---

sorbieren $s+\lambda$ unter den vom Punkte an die C^n gelegten Tangenten, vgl. *Cremona,* Intr. n. 74; *Segre* [25]), p. 34 ff. — Im besondern erniedrigt ein Doppelpunkt die Klasse um Zwei: *Poncelet,* l. c., p. 68. S. auch *Plücker* [92]), der hinzufügt, dass eine Spitze die Klasse um Drei erniedrigt, während *Poncelet,* l. c., p. 70, bereits bemerkt hatte, dass diese Erniedrigung mindestens Zwei betrage.

88) Die Zahl der Wendepunkte verdankt man *Plücker* [92]). Dass sie den völligen Schnitt mit einer kovarianten Kurve bildeten, entdeckte *O. Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 104 = Werke, p. 131 (wo sich auch der analoge Satz für Flächen findet). S. auch J. f. Math. 34 (1846), p. 202; 36 (1847), p. 161; 38 (1847), p. 241; 41 (1849), p. 272 = Werke, p. 147, 174, 193, 263.

89) *Plücker* [12]), p. 224.

90) *Segre* [25]), p. 48/9. — Im besondern vermindern ein gewöhnlicher Doppelpunkt und eine gewöhnliche Spitze die Zahl der Wendepunkte um 6 resp. 8: *Plücker* [54]), p. 266 für eine C^3; [12]), p. 208 für beliebiges n.

91) Dies sind die sogenannten „notwendigen Singularitäten", da für $n > 2$ keine Kurve existiert, die alle entbehrte.

92) Formel (5) und die Anzahlen der Wendepunkte und der Doppeltangenten einer C^n ohne vielfache Punkte finden sich bei *Plücker* [54]), p. 243 f., 264, 292 [ohne Beweis schon J. f. Math. 12 (1834), p. 105 = Abh. 1, p. 298]. Die vollständige Ableitung von (5), (6), und von (5'), (6') aus jenen durch das Dualitätsprinzip mittels Kontinuitätsbetrachtungen, gab *Plücker* [12]), p. 200 ff. Dass sich nicht nur Doppelpunkte und -tangenten, sondern auch Spitzen und Wendetangenten dual entsprechen, hatte schon *Poncelet* [28]), p. 216, und Traité 2, p. 67 f. bemerkt. Ohne das Dualitätsprinzip hat *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 40 (1850), p. 237 = Ges. Werke, herausg. von *K. Weierstrass,* Berlin 1884, 3, p. 519; ital. Ausgabe (mit Anm.) von *R. Rubini*, Ann. sc. fis. mat. 2 (1851), p. 435, analytisch die Zahl der Doppel- (und Wende-) Tangenten für eine C^n ohne vielfache Punkte wiedergefunden; sein Verfahren hat *A. Clebsch* vereinfacht, J. f. Math. 63 (1863), p. 186. Vgl. auch *F. Padula,* Napoli Rend. 1845 (§ 3). Direkte (analytische) Beweise der *Plücker*'schen Formeln hatte schon *Cayley* [82]) geliefert. — Ein geometrischer Beweis desselben bei *Cremona,* Intr. art. 16; weitere Beweise bei *Cayley,* Paris C. R. 62 (1866), p. 586; London Math. Soc. Proc. 1 (1866), p. 1 = Papers, 5, p. 542; 6, p. 9; *H. G. Zeuthen,* Nouv. Ann. de math. (2) 6 (1867), p. 200; Tidsskr. f. Math. (3) 4 (1874), p. 129; *J. N. Bischoff,* Ann. di mat. (2) 6 (1873), p. 144; *A. Beck,* Math. Ann. 14 (1878), p. 207; *Wolf,* Zeitschr. 30 (1889), p. 173 [vgl.

$$\begin{array}{ll}
(5) & \left\{\begin{array}{l} n' = n(n-1) - 2d - 3r, \\
(6) \quad r' = 3n(n-2) - 6d - 8r, \\
(5') \quad n = n'(n'-1) - 2d' - 3r', \\
(6') \quad r = 3n'(n'-2) - 6d' - 8r', \end{array}\right.
\end{array}$$

von denen die beiden letzten aus den beiden ersten nach dem Dualitätsprinzip hervorgehen [93]). Von diesen Formeln sind nur drei unabhängig von einander, da sowohl aus (5), (6), wie aus (5′), (6′) die in sich duale Formel [94]) folgt:

$$r - r' = 3(n - n'). \tag{7}$$

Durch drei der Zahlen n, d, r, n', d', r' sind also die drei andern bestimmt [95]).

---

v. Peschka [48]), p. 67, 134]; *Guccia* [440]), § 11; *W. Weiss,* Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), p. 367; *O. Zimmermann,* J. f. Math. 123 (1901), p. 1, 175. — Eine Deutung der *Plücker*'schen Formeln, als Ausdruck einer birationalen involutorischen Transformation der Variabeln n, d, r in die andern n', d', r' giebt *S. Kantor,* Ist. Ven. Atti (8) 3 (1901), p. 769.

93) Mittels seiner Formeln hat *Plücker* [z. B. [12]), p. 211] zuerst die völlige Erklärung des *„Poncelet'schen Paradoxons“* [vgl. *Poncelet* [92]), und Traité 2, p. 228; *J. D. Gergonne,* Ann. de math. 19 (1828/9), p. 218; Férussac Bull. 9 (1828), p. 302; 10 (1829), p. 285; *Plücker* [255]), Anm. zu p. 288; [54]), p. 291/2] geliefert, d. h. er hat aufgeklärt, warum die Reziproke der Reziproken einer C^n, die mit der C^n zusammenfällt, von der Ordnung n ist, während sie zunächst, nach dem Satze über die Klasse, die Ordnung $n(n-1)[n(n-1)-1]$ besitzen sollte [III C 3, Nr. **3**, *Zeuthen*]. — Die Eliminationsprobleme, zu denen das algebraische Studium dieser Frage Veranlassung giebt, hat *Cayley* behandelt für eine von vielfachen Punkten freie C^n in [82]), für eine C^n mit d Doppelpunkten und r Spitzen in J. f. Math. 64 (1864), p. 167 = Papers 5, p. 416 [vgl. *Pasch* [24])]. Er verwendet dabei die *„Spezialdiskriminante“*, d. i. die Funktion, deren Verschwinden aussagt, dass die C^n einen weiteren Doppelpunkt erhält; nach *Cayley,* J. f. Math. 63 (1863), p. 34 = Papers 5, p. 162 ist ihr Grad $3(n-1)^2 - 7d - 11r$. S. auch [377]), wo man von der *„reduzierten Resultante“* spricht (I B 1b, Nr. **15**, *Netto*; I B 2, Nr. **25**, *Meyer*).

94) *Plücker* [12]), p. 212. — Aus den obigen Formeln lassen sich noch weitere bemerkenswerte ableiten, z. B.:

$$d - d' = \tfrac{1}{2}(n - n')(n + n' - 9),$$

$$d' = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2d + 3r)(n^2 - n - 6) + 2d(d-1) + \tfrac{9}{2}r(r-1) + 6dr,$$

$$(r - r')^2[(r - r')^2 - 54(r + r') - 36(d + d') + 405] + 756(d - d')(r - r') + 324(d - d')^2 = 0.$$

Vgl. *Plücker,* l. c., p. 211 ff.; J. de math. (1) 2 (1836), p. 11 = Abh. 1, p. 334.

95) *Plücker* hat übrigens auch die Reduktionen berücksichtigt, die an der Klasse und der Zahl der Wendepunkte durch einige höhere singuläre Punkte hervorgebracht werden. So betragen sie für eine Spitze 2. Art 5 resp. 15; und ein s-facher Punkt mit getrennten Tangenten ist dabei äquivalent mit $\frac{1}{2}s(s-1)$ Doppelpunkten: vgl. [12]), p. 216 ff.

Führt man mit *Clebsch* das Geschlecht p ein [Nr. 4, s. (3), (3')], so nehmen die obigen Formeln die Gestalt an:

$$(8) \qquad \begin{aligned} 2p - 2 &= n(n-3) - 2d - 2r = r + n' - 2n \\ &= n'(n'-3) - 2d' - 2r' = r' + n - 2n'. \end{aligned}$$

9. Algebraische ∞^1 Kurvensysteme; Charakteristikentheorie [III C 3, Abschn. V—VII, *Zeuthen*]. Ein algebraisches System ∞^1 algebraischer Kurven einer gegebenen Ordnung erhält man, indem man die Koeffizienten der Punktgleichung einer solchen Kurve als algebraische Funktionen eines variabeln Parameters annimmt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als rationale Funktionen zweier Parameter, die einer gegebenen algebraischen Gleichung genügen [96]. Die allgemeinen Eigenschaften solcher Systeme sind zuerst von *E. de Jonquières* [97] untersucht worden, der den Begriff des *Index* μ des Systems einführte als die Anzahl der Kurven des Systems, die durch einen gegebenen Punkt gehen [98]. *M. Chasles* [99] führte (vor allem für Systeme von

96) Über die *Plücker*'schen Charaktere der von den Kurven eines solchen Systems eingehüllten Kurve s. *H. G. Zeuthen,* Paris C. R. 78 (1874), p. 274, 339: vermöge der „Charakteristiken" des Systems (s. u.) tritt hier auch eine Zahl auf, die für beide sich birational entsprechende Systeme den nämlichen Wert besitzt, von *Zeuthen* das *Geschlecht* des Systems genannt. — Spezielle Fälle bei *Henrici* [76]; *L. Saltel,* Paris C. R. 83 (1876), p. 608; *O. Zimmermann,* J. f. Math. 116 (1895), p. 10.

97) J. de math. (2) 6 (1861), p. 113. Hier und Giorn. di mat. 4 (1865), p. 45 glaubt *de Jonquières* [und auch *M. Chasles,* Paris C. R. 63 (1866), p. 818], dass sich die Gleichung des Systems stets so schreiben liesse, dass die Koeffizienten *rationale* Funktionen eines Parameters wären, was indessen nur für ein *rationales* System zutrifft (der Index des Systems ist dann gleich dem Grade des Parameters zu der Kurvengleichung). Wie sich der Satz modifizieren lässt, wenn man durch eine Gleichung nicht eine einzelne Kurve, sondern eine Gruppe von Kurven des Systems darstellt, bemerkt *G. Battaglini,* Napoli Rend. 2 (1863), p. 149 = Giorn. di mat. 1, p. 170 = Archiv Math. Phys. 41, p. 26. — Einige der Sätze von *de Jonquières* (nebst weiteren) hat *Cremona* in der Intr. art. 14 aufgenommen. — Über die Geschichte der Theorie der ∞^1 Systeme (und des Korrespondenzprinzips für rationale ∞^1 Gebilde), und die bezügliche Polemik zwischen *Chasles* und *de Jonquières* s. *C. Segre,* Bibl. math. 6 (1892), p. 33 [III C 3, Abschn. III, *Zeuthen*].

98) Ein System von ∞^r Kurven, vom Index μ, derart, dass durch r allgemeine Punkte der Ebene μ Kurven hindurchgehen, ist stets in einem linearen System einer Dimension $\leqq r + \mu - 1$ enthalten. Zwei ∞^r, $\infty^{r'}$ Systeme mit dem Indizes μ, μ', und in einem linearen ∞^k System $(r + r' \geqq k)$ enthalten, haben im allgemeinen ein $\infty^{r+r'-k}$ System vom Index $\mu\mu'$ gemein. Ist ein ∞^1 System vom Index μ in einem linearen ∞^{μ} System enthalten, so ist es ein rationales. Diese und analoge Sätze lassen sich auffassen als Sätze von Räumen höherer Dimension: man hat nur die Kurven eines linearen ∞^k Systems zu deuten als die Punkte eines linearen Raumes von k Dimensionen (III C 9, *Segre*). Eben dies

Kegelschnitten [III C 1, Nr. **76**, *Dingeldey*]), auch die korrelative Anzahl ν ein, die Anzahl der eine gegebene Gerade berührenden Systemkurven. Diese beiden Anzahlen μ, ν spielen eine Hauptrolle bei abzählenden Fragen über Kurvensysteme ∞^1. So ist die Anzahl der Kurven eines solchen Systems (μ, ν), die eine gegebene Kurve von der Ordnung n und der Klasse n' berühren — mag diese Kurve, sowie das System selbst auch irgendwelche Singularitäten besitzen — gleich $\mu n' + \nu n$[100]).

Bei zwei Systemen (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) erfüllen die Punkte der Berührung einer Kurve des einen Systems mit einer des andern eine Kurve der Ordnung $\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_1\mu_2$, und dualistisch umhüllen die Tangenten jener Punkte eine Kurve von der Klasse $\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \nu_1\nu_2$.[101])

Bei drei Systemen (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2), (μ_3, ν_3) giebt es $\mu_2\mu_3\nu_1 + \mu_3\mu_1\nu_2 + \mu_1\mu_2\nu_3 + \mu_1\nu_2\nu_3 + \mu_2\nu_3\nu_1 + \mu_3\nu_1\nu_2$ Tripel von Kurven, die sich in einem Punkte berühren[102]).

---

ist der Gesichtspunkt von *Cayley* [375]) [vgl. auch London Trans. 160 (1869), p. 51 = Papers 6, p. 456].

99) Paris C. R. 58 (1864), p. 222, 297, 425, 1167; 59 (1864), p. 7, 93, 209, 345.

100) Ausgesprochen von *M. Chasles*, Paris C. R. 58 (1864), Anm. zu p. 300 [und von ihm für Kegelschnittsysteme vollständig bewiesen: Paris C. R. 59 (1864), p. 210]; allgemein bewiesen zuerst von *Zeuthen* [50]) als Anwendung seiner Korrespondenzformel. Vgl. *von Peschka* [48]), p. 146. — Einen andern allgemeinen Beweis (mit Erweiterung auf Systeme von Raumkurven und Flächen) gab *A. Brill*, Math. Ann. 8 (1874), p. 534; vgl. *G. Fouret*, Bull. soc. math. de France 5 (1876), p. 19. Weitere Beweise bei *H. Schubert*, J. f. Math. 71 (1870), p. 367; Kalkül, p. 14, 51, 295; *„Clebsch-Lindemann“*, p. 424; *Zeuthen* [116]).

101) *H. Schubert*, Math. Ann. 10 (1876), p. 108; Kalkül, p. 52. Im besondern ist $\mu + \nu$ ebensowohl die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der von einem festen Punkte A (der μ-facher Punkt des Ortes wird) an die Kurven eines Systems gelegten Tangenten, wie die Klasse der durch die duale Konstruktion entstehenden Enveloppe: *Schubert*, Kalkül, p. 27. — Nimmt man A als Pol einer gegebenen Geraden a in Bezug auf das Paar der Kreispunkte, so folgt, dass $\mu + \nu$ auch die Zahl der zu a senkrechten Kurven des Systems angiebt.

102) Diese und viele weitere Formeln sind Spezialfälle der Charakteristikenformeln von *H. Schubert*, Gött. Nachr. 1877, p. 401; Kalkül, p. 289, für das aus einem Strahl und einem mit ihm inzidenten Punkte bestehende Gebilde.

Bei den vorangehenden Fragen kann man an Stelle einer Schar von ∞^1 Kurven eine Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen x, y, d. h. ihre ∞^1 Integralkurven zu Grunde legen. Daher gelten diese und analoge Sätze auch für $\infty^1 (\mu, \nu)$-Systeme von *transzendenten* Kurven, wenn sie nur die Integrale einer solchen *algebraischen* Differentialgleichung in x, y, y' sind. Diesen Gedanken hat *G. Fouret* entwickelt, Paris C. R. 78 (1874), p. 831, 1693, 1837; 82 (1876), p. 1328; 83 (1876), p. 633; 86 (1878), p. 586; 102 (1886), p. 415; Bull. soc. math. de France 2 (1874), p. 72, 96; 5 (1877), p. 19, 130; 7 (1879), p. 177; 19 (1891), p. 128; Bull. soc. philom. (6) 11 (1878), p. 72; Ausdehnungen auf Flächen

Bei zwei Systemen (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) seien n_1, n_2 die Ordnungen, n_1', n_2' die Klassen der Kurven, d_1, d_2 die Ordnungen der Örter der Doppelpunkte, k_1, k_2 die der Örter der Spitzen, sowie d_1', d_2', k_1', k_2' die dualen Anzahlen, so existieren

$$\mu_1 k_2' + \mu_2 k_1' + \nu_1 k_2 + \nu_2 k_1 + 3\mu_1\mu_2 + 3\nu_1\nu_2$$

Paare von Kurven mit einer Berührung zweiter Ordnung, und

$$(n_1 n_2 - 4)\nu_1\nu_2 + (n_1' n_2' - 4)\mu_1\mu_2 + (n_1 - 1)(n_2' - 1)\mu_1\nu_2$$
$$+ (n_2 - 1)(n_1' - 1)\mu_2\nu_1 + d_1\nu_2 + d_2\nu_1 + d_1'\mu_2 + d_2'\mu_1$$

Paare von Kurven mit einer doppelten Berührung[103]).

M. Chasles[104]) hat durch Induktion das Theorem ausgesprochen, dass die Anzahl der Kurven eines Systems (μ, ν), die einer weiteren,

---

in 9 Noten der Paris C. R. 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86. Die Theorie steht in engem Zusammenhange mit der der *Konnexe* (III C 10, Höhere Raumelemente, *Waelsch*): *A. Clebsch*, Gött. Nachr. 1872, p. 429 = Math. Ann 6, p. 203; *„Clebsch-Lindemann"*, p. 924 ff. (besonders p. 962 f.) Die oben definierten transzendenten Kurven sind untersucht von *G. Loria*, Prag Böhm. Ges. Ber. 1901, n. 36 = Le mat. pure appl. 2 (1902), p. 73; [272]), p. 724, der sie *panalgebraische* nennt [III D 4, Nr. **38**, *Scheffers*].

103) *H. G. Zeuthen*, Paris C. R. 89 (1879), p. 946, wo dieselben Fragen auch für zwei Systeme von ∞^1 Flächen gelöst werden. — Formeln gleicher Natur sind auch für ∞^2-Systeme angegeben worden. Enthält ein solches System (μ^2), $(\mu\nu)$, (ν^2), $[\mu\nu]$, D, K Kurven, die resp. durch zwei gegebene Punkte gehen, durch einen solchen gehen und eine gegebene Gerade berühren, zwei gegebene Gerade berühren, eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, einen Doppelpunkt oder eine Spitze in einem gegebenen Punkte besitzen, und bedeuten D', K' die zu D, K dualen Zahlen, so ist die Anzahl der Kurven des Systems, die mit einer gegebenen Kurve der Ordnung n, der Klasse n', mit r Spitzen eine Berührung 2. Ordnung resp. zwei einfache Berührungen eingehen, resp.:

$$nK' + n'K + (3n' + r)\cdot[\mu\nu],$$

$$\tfrac{1}{2}n'(n'-1)\cdot(\mu^2) + nn'\cdot(\mu\nu) + \tfrac{1}{2}n(n-1)\cdot(\nu^2) + nD' + n'D - \tfrac{3}{2}(3n' + r)\cdot[\mu\nu].$$

Die erstere Formel stammt von *G. Halphen*, Bull. soc. math. de France 5 (1876), p. 14; die letztere von *Zeuthen*, Paris C. R. 89 (1879), p. 899, der auch die erstere bewies (und analoge Fragen für Flächen behandelte). — Obige Formeln und viele weitere analoge, bis auf vier ∞^2-Systeme bezügliche, hat *H. Schubert*, Math. Ann. 17 (1880), p. 188 (Auszug Gött. Nachr. 1880, p. 369) abgeleitet aus seinen Formeln für die Anzahl der zwei Systemen von Dreiecken gemeinsamen Dreiecke. — Als weitere Anwendungen erhält *Schubert* die Anzahl $n(n-1)(2n-3)$ der einer C^n einbeschriebenen Dreiecke, deren Seiten durch drei gegebene Punkte laufen (p. 165), sowie die Anzahl $\frac{1}{6}mn(m-1)(n-1)(2mn - 3m - 3n + 4)$ der einer C^n einbeschriebenen und einer Kurve der Klasse m umbeschriebenen Dreiecke (p. 182): vgl. auch *Cayley* [378]).

104) S. [99]), besonders Paris C. R. 58, p, 300, 537, 1167; 59, p. 217; sowie auch Paris C. R. 62 (1866), p. 325, und Rapport sur les progrès de la géom., Paris 1870, p. 274.

vom System unabhängigen Bedingung genügen, stets auf die Form $\alpha\mu + \beta\nu$ (den *Modul* der Bedingung) gebracht werden kann, wo α, β Anzahlen sind, die überhaupt nicht vom gegebenen System abhängen, sondern lediglich von der auferlegten Bedingung; darum bezeichnet er μ, ν als die *Charakteristiken* des Systems. Weitere Untersuchungen von *G. Halphen*[105]) haben ergeben, dass das Theorem für Systeme von Kegelschnitten nicht exakt gilt, falls man ausgeartete Kegelschnitte ausschliessen will. Bei derartigen Fragen ist es eine stillschweigende Forderung, dass die auferlegten Bedingungen *eigentlich* erfüllt sein müssen; z. B. wenn es sich um Kegelschnitte handelt, die eine gegebene Kurve f berühren sollen, so sind die Kegelschnitte, die als Örter in eine Doppelgerade r ausarten, und als Enveloppen zweier Centra (*sommets*) A und B auf r erscheinen, nur dann als *eigentliche* Lösungen anzusehen, wenn entweder r eine Tangente von f ist, oder wenn einer der Punkte A, B auf f liegt[106]). Die Berücksichtigung der *uneigentlichen* Lösungen und der Multiplizität, mit der sie in Anrechnung zu bringen sind, bietet im allgemeinen die grösste Schwierigkeit bei diesen Problemen. Für Systeme von Kegelschnitten verdankt man deren Untersuchung *L. Cremona*[107]) und insbesondere *M. Chasles*[99]); für höhere Kurven *M. Chasles*[108]) und *H. G. Zeuthen*[109]). Im Ausschluss der uneigentlichen Lösungen in den zu bestimmenden Anzahlen besteht gerade der Fortschritt von *Chasles'* Theorie („Charakteristikentheorie") gegenüber der ursprünglichen Theorie von *de Jonquières*.

105) J. éc. polyt. 45. cah. (1878), p. 27 [Auszüge Paris C. R. 83 (1876), p. 537, 886; Lond. Math. Soc. Proc. 9 (1878), p. 149 = Math. Ann. 15 (1879), p. 16]. — Vgl. auch *A. Clebsch,* Math. Ann. 6 (1872), p. 1; *L. Saltel,* Brux. Bull. (2) 42 (1876), p. 617.

106) Ausführliches hierüber, sowie über die Arbeiten von *Zeuthen, Schubert, E. Study* u. a. s. III C 3, *Zeuthen,* worauf wir bezüglich der ganzen Nr. verweisen. — Über eine allgemeine Auffassung der Charakteristikentheorie und über deren Zusammenhang mit dem Problem der Schnitte mehrerer irgendwie ausgedehnter Mannigfaltigkeiten vgl. *Schubert,* Kalkül, p. 274 ff. und III C 3, *Zeuthen*; III C 9, Mehrdimensionale Räume, *Segre.*

107) Ann. di mat. (1) 5 (1863), p. 330 = Giorn. di mat. 1 (1863), p. 225; Giorn. di mat. 2 (1864), p. 17, 192; vgl. auch Ann. di mat. (1) 6 (1864), p. 179 = Giorn. di mat. 3 (1865), p. 60, 113.

108) S. [99]), sowie Paris C. R. 62 (1866), p. 325; 64 (1867), p. 799, 1079 (wo auch Beispiele von *Cayley*, *Cremona, Crofton, de la Gournerie* und *Hirst* mitgeteilt werden). Vgl. auch (aber nicht ganz genau) *A. Cayley,* Paris C. R. 74 (1872), p. 708; Messenger 1 (1872), p. 178 = Papers 8, p. 258, 526.

109) Kopenhagen Vidensk. Selsk. Skr. (5) 10 (1873), IV, p. 287; mit einem Resumé en français [Auszug Bull. scie. math. 7 (1874), p. 97]. Vgl. *„Clebsch-Lindemann",* p. 408, und die algebraischen Betrachtungen auf p. 419 ff.

Die von *Chasles* und *Zeuthen* entwickelte Methode, die dann von *Schubert*[110]) weiter verfolgt wurde, um die Anzahl der Gebilde von gegebener Definition mit einer Konstantenzahl c zu bestimmen, die eine gegebene c-fache Bedingung erfüllen, besteht im wesentlichen in der Untersuchung von Formeln, die die gesuchte Anzahl auf solche — als bekannt vorausgesetzte — Anzahlen von anderen einfacheren Gebilden (Ausartungen) mit einer geringeren Konstantenzahl[111]) zurückführen. Alsdann drückt sich die gesuchte Anzahl aus als homogene lineare Funktion einer endlichen Anzahl von *Charakteristiken*, d. h. von ganzen Zahlen, die nur von den die Gebilde definierenden Bedingungen abhängen.

Die von *Zeuthen* betrachteten Ausartungen (courbes singulières) in einem ebenen Kurvensystem ∞^1 sind solche („gewöhnliche"), wie sie sich bei *elementaren Systemen* (die lediglich durch gegebene Punkte und Tangenten bestimmt sind)[112]) darbieten: nämlich entweder die Kurven, die einen neuen Doppelpunkt besitzen (von der Anzahl $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, unter α_0, α_1, α_2 resp. die Anzahlen der Kurven verstanden, für die keiner, einer oder beide den Doppelpunkt bildenden Züge geradlinig sind), oder aber eine neue Doppeltangente, oder endlich einen vielfachen Zug[113]). Nimmt man zuvörderst an, dass das

110) S. [118]), p. 429; Kalkül, Abschn. 4.

111) Derartige Formeln werden durch das *Chasles*'sche Korrespondenzprinzip und das Prinzip der Erhaltung der Anzahl abgeleitet. Die verschiedenen Spezies von Ausartungen hat *Zeuthen* aus der analytischen Definition des Gebildes (Kurve) heraus entwickelt, und *Schubert* durch eine uneigentliche homographische Abbildung (durch eine Homologie mit unendlich kleinem Doppelverhältnis) aus dem allgemeinen Gebilde gewonnen. So z. B. lässt sich eine C^n der Klasse m als Punktort auf eine n-fache Gerade und als Geradenort auf m Büschel mit Zentren auf jener Geraden zurückführen. — Es ist zu beachten, dass die bei der zweiten Methode erhaltenen ausgezeichneten Elemente der Ausartungen Lagen einnehmen, die nicht unabhängig von einander sind, was zu bemerkenswerten Sätzen auch für allgemeine Gebilde führt. Vgl. *Schubert* [118]), p. 507 f., 536 f., und Kalkül, p. 129, 161, 185. Z. B.: Legt man von einem Punkte der Ebene einer allgemeinen C^3 die 6 Tangenten, und die 9 Geraden durch die Wendepunkte, so ist die Gesamtheit dieser so auf die C^3 bezogenen Geraden bereits durch 6 von ihnen bestimmt, *eindeutig*, wenn die 6 Tangenten, *120-deutig*, wenn 5 Tangenten und 1 Wendepunktsstrahl gegeben sind. So sind die 12 von einem Punkte an eine allgemeine C^4 gehenden Tangenten derart verknüpft, dass durch 11 derselben die letzte *451440-deutig* bestimmt ist: vgl. *Zeuthen* [109]), p. 391.

112) Dies sind auch die einzigen in einem System von Kurven, die gegebene, von einander unabhängige Kurven berühren.

113) Diese Ausartungen hat *Zeuthen* genau untersucht durch Betrachtung zweier jenen unendlich benachbarter Kurven des Systems, indem er zeigt (auch mittels Zeichnungen), wie der Übergang von der einen zur andern durch die Ausartung hindurch erfolgt.

System die letzte Gattung von Ausartungen nicht besitzt, und sind n, d, e die Ordnung, sowie die Anzahlen der Doppelpunkte und Spitzen einer allgemeinen Kurve des Systems, sodass solche Kurven noch weiteren $\frac{1}{2}n(n+3)-d-2e-1$ Bedingungen unterworfen sind, so sieht *Zeuthen* als singuläre Kurven des Systems auch solche an, für die entweder ein Doppelpunkt in eine Spitze ausgeartet ist, oder eine Spitze in einen Selbstberührungspunkt, oder für die zwei Doppelpunkte resp. ein Doppelpunkt und eine Spitze resp. zwei Spitzen zusammengerückt sind, oder für die drei Doppelpunkte (in einen dreifachen Punkt), oder auch zwei Doppelpunkte und eine Spitze oder endlich ein Doppelpunkt und zwei Spitzen zusammenfallen. Seien die bezüglichen Anzahlen β, γ $(=\gamma_0+\gamma_1$, wo γ_0, γ_1 die Anzahlen der Kurven bezeichnen, für die keiner oder einer der beiden Züge geradlinig ist), $(2d)$, (de), $(2e)$, $(3d)$, $(2de)$, $(d2e)$. Ausser der Zahl μ führt *Zeuthen* noch die Ordnungen b, c des Ortes der Doppelpunkte resp. Spitzen ein, ferner die Klassen p, q; u, v; x, y, z der Enveloppen der Tangenten der Doppelpunkte resp. Spitzen; der von diesen resp. ausgehenden Tangenten; endlich der Enveloppen der Geraden, die zwei Doppelpunkte, oder einen Doppelpunkt und eine Spitze, oder endlich zwei Spitzen verbinden. Dazu kommen die dualen Ausartungen, deren bezügliche Anzahlen durch einen Akzent charakterisiert seien[114]).

Zwischen diesen 40 Anzahlen bestehen 28 Relationen, die *Zeuthen* auf Grund des „Korrespondenzprinzipes" (III C 3, Abschn. III)[115]) hergeleitet hat, nämlich:

$$2(n-1)\cdot\mu=\mu'+2b+3c+\alpha',$$

$$d\cdot\mu'+n'\cdot b=2p+u+\beta,$$

$$e\cdot\mu'+n'\cdot c=3q+v+\gamma,$$

$$2(d-1)\cdot b=2x+(2d)+6(3d)+3(2de)$$
$$+(n-6)\alpha_0'+(n-4)\alpha_1'+(n-2)\alpha_2',$$

$$e\cdot b+d\cdot c=y+(de)+2(2de)+3(d2e),$$

$$2(e-1)\cdot c=2z+(2e)+3(d2e)+4\alpha_0'+2\alpha_1'+\beta'+12\gamma_0',$$

$$(n-2)\cdot\mu'+(n+n'-4)\cdot\mu=c'+p+2q,$$

$$(n-2)\cdot b+d\cdot\mu=p+3(3d)+3(2de)+2(d2e)$$
$$+(n-6)\alpha_0'+(n-4)\alpha_1'+(n-2)\alpha_2',$$

114) Mithin fallen γ_1', $(2d')$, $(d'e')$, $(2e')$ resp. mit γ_1, $(2d)$, (de), $(2e)$ zusammen.

115) Die Bestimmung der Koeffizienten geschieht durch Anwendung einer Regel von *Zeuthen,* Bull. sci. math. 5 (1873), p. 186, und unter Berücksichtigung der singulären Kurven und ihnen unendlich benachbarter.

$$(n-2)\cdot c + e\cdot\mu = 2q + (2de) + 4(d2c) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + 8\gamma_0',$$

$$(n-3)[(n-2)\cdot\mu' + 2(n'-2)\cdot\mu] = 2b' + 2u + 3v + n'\alpha_0' + (n'-1)\alpha_1' + (n'-2)\alpha_2',$$

$$(n-3)[(n-2)\cdot b + 2d\cdot\mu] = u + 4x + 3y + [d-2(n-6)]\alpha_0' + [d-2(n-4)]\alpha_1' + [d-2(n-2)]\alpha_2',$$

$$(n-3)[(n-2)\cdot c + 2e\cdot\mu] = v + 2y + 6z + (e-6)\alpha_0' + (e-3)\alpha_1' + e\alpha_2',$$

$$2p = 2b + \beta + 2(2d) + 3(de) + (d2e),$$

$$2(n-1)\cdot\mu + 2\mu' = q' + 2b + 2c + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha' + 2\beta' + 3\gamma',$$

nebst den dualen. Von den 28 Relationen sind nur 23 unabhängig, und diese können dazu dienen, 23 dieser Zahlen linear mittels der übrigen 17 (ausser n, d, e) auszudrücken; die letzteren können also als die *Charakteristiken* des gegebenen Systems angesehen werden. Irgend eine Bedingung, wenn sie nur unabhängig von den das System bestimmenden ist, kann als linear homogene Funktion jener 17 Charakteristiken ausgedrückt werden[116]).

Enthält das System noch singuläre Kurven anderer Art[117]), so wächst die Zahl der Charakteristiken, und die obigen Formeln sind um Terme zu vermehren, die gebildet sind aus den Anzahlen der neuen Ausartungen multipliziert mit numerischen Koeffizienten[118]).

Eine besondere Schwierigkeit bietet die Betrachtung der mit vielfachen Zügen behafteten singulären Kurven (die, zum Unterschied von den andern, für verschiedene Werte von n, d, e verschieden ausfallen), die daher bei den allgemeinen Untersuchungen ausgeschlossen

---

116) Handelt es sich z. B. um die Berührung mit einer gegebenen Kurve der Ordnung m und der Klasse m', so findet man (p. 337) die *Chasles*'sche Anzahl $\mu m' + m\mu'$; s. oben und [100]). So findet man auch (p. 338/9) die Ordnungen der Örter der weiteren Schnittpunkte einer Systemkurve mit den Tangenten in ihren Doppelpunkten, resp. Spitzen, oder mit den Geraden, die irgend zwei ihrer Doppelpunkte resp. Spitzen resp. einen Doppelpunkt und eine Spitze verbinden.

117) *Zeuthen*, l. c., p. 344 hat den Fall behandelt, wo das System aus den Zentralprojektionen der Schnitte einer gegebenen Fläche mit den Ebenen eines Büschels besteht, und daher eine n-fache Gerade enthält. Dehnt man hierauf die Formeln des Textes aus, so erhält man von neuem die Formeln von *Salmon* und *Cayley*, die die Beziehungen zwischen den Anzahlen der Singularitäten einer algebraischen Fläche liefern (III C 6, Flächen, *Castelnuovo* und *Enriques*).

118) Daher, sagt *Schubert*, Math. Ann. 13 (1877), p. 443 von diesen Formeln: „sie bilden das *Fundament für den Formelapparat*, welcher zur Bestimmung aller fundamentalen Anzahlen jeder beliebigen Plankurve nach der *Chasles-Zeuthen*'schen Methode notwendig ist“.

werden[119]): *Zeuthen* (l. c. p. 348) untersucht insbesondere singuläre Kurven mit vielfachen Klassenpunkten (sommets), und dualistisch, mit vielfachen Ordnungsgeraden (branches droites)[120]).

Unter der Voraussetzung, dass das gegebene System frei von Ausartungen mit vielfachen Zügen ist (also auch frei von Kurven mit einer neuen Doppeltangente, Kurven, die indessen in den Formeln von *Zeuthen* berücksichtigt sind), hat *H. Krey* gezeigt, dass sich alle in Rede stehenden Anzahlen auch für Kurven beliebiger Ordnung bestimmen lassen[121]).

Die *Zeuthen*'schen Formeln hat *Schubert*[122]) ausgedehnt auf ebene Systeme ∞^1 in einer variabeln Ebene[123]); zu den rechten Seiten der Formeln tritt dann je ein Term hinzu, der die Bedingung enthält, dass die Ebene der Kurve durch einen gegebenen Punkt geht. Auf Grund dieser erweiterten Formeln hat *H. Krey*[124]) einige seiner Ergebnisse ausgedehnt auf ebene Kurven in einer nicht festen Ebene.

119) Die Schwierigkeiten treten schon auf bei der Bestimmung der auf die elementaren Systeme von C^3 und C^4 bezüglichen Zahlen; für die C^3 gleichzeitig bei *S. Maillard,* Diss. Paris 1871, und *Zeuthen,* Paris C. R. 74 (1872), p. 521, 604, 726; *Schubert* hat noch weitere, auch höhere elementare Bedingungen und Ausartungen betrachtet, die sich auf die singulären Punkte und Tangenten der Kurve (auch in einer beweglichen Ebene) beziehen: Gött. Nachr. 1874, p. 267; 1875, p. 359; [118]), p. 451, 509; Kalkül, §§ 23, 24. Die Bestimmung der Charakteristiken der elementaren Systeme von C^4 hat *Zeuthen* geleistet, Paris C. R. 75 (1872), p. 703, 950 und [109]), p. 376 ff.; vgl. *Schubert,* Kalkül, § 26.

120) *Sommet (Klassenscheitel)* ist ein solcher Punkt einer singulären Kurve, dass jede Gerade durch ihn die Kurve daselbst berührt.

121) Acta math. 7 (1884), p. 49. So findet *Krey* viele Anzahlen für C^n, die durch gegebene Punkte gehen und mit Doppelpunkten und Spitzen behaftet sind, oder auch mit zwei Punkten beliebiger Multiplizität, ebensowohl, wenn diese Punkte gegeben sind, als wenn sie auf gegebenen Geraden beweglich, oder endlich ganz frei sind.

122) S. [118]), § 35; vgl. auch Math. Ann. 12 (1877), p. 194.

123) *H. W. L. Tanner,* Lond. Math. Soc. Proc. 13 (1882), p. 125, hat die Untersuchungen erweitert, die *W. Spottiswoode,* Brit. Ass. Rep. Dublin 1878; Lond. Math. Soc. Proc. 10 (1879), p. 185, und *A. Cayley,* ib. p. 194 = Papers 11, p. 82 [vgl. auch Quart. J. 3 (1859), p. 225 = Papers 4, p. 446] über die Koordinaten eines Kegelschnitts im Raume angestellt haben, d. h. er hat eine im Raume gelegene ebene C^n durch eine gewisse Anzahl von Koordinaten bestimmt.

124) S. [121]), §§ 5, 6. In § 4 findet er durch ein Rekursionsverfahren die Anzahl der ebenen C^n, die $\frac{1}{2}n(n+3)+a$ gegebene Gerade treffen, während deren Ebene durch $3-a$ $(a=1, 2, 3)$ gegebene Punkte geht. Diese drei Anzahlen sind resp.:

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$\frac{1}{36}n(n+1)(n+2)(2n^3+6n^2+7n-3),$$

$$\frac{1}{324}n(n^2-1)(n+2)(2n^5+14n^4+49n^3+91n^2+90n+18).$$

10. Kurvenerzeugungen. Die Untersuchungen über die projektive Erzeugung der Kurven beginnen mit *I. Newton*[125]), der ohne Beweis solche Erzeugungen für die Kegelschnitte und höhere Kurven mit Doppelpunkten angiebt; er lässt zwei Winkel von konstanter Grösse um ihre Scheitel rotieren, derart, dass zwei der Schenkel sich auf einer festen Kurve niedrigerer Ordnung schneiden: der Schnittpunkt der beiden übrigen Schenkel erzeugt die fragliche Kurve.

Diese („organischen") Konstruktionen sind bewiesen und bedeutend erweitert von *C. Mac Laurin*[126]), der bereits im wesentlichen entweder mehrdeutige Korrespondenzen zwischen rationalen Formen ∞^1 [127]) oder

Krey, Acta math. 5 (1883), p. 83, bestimmt durch das Prinzip der Erhaltung der Anzahl (und zwar behandelt er durch Kegelflächen) weitere Anzahlen für C^n in beweglicher Ebene, vornehmlich die Anzahl der durch $3-a$ gegebene Punkte gehenden Ebenen, die $\frac{1}{2}n(n+3)+a$ gegebene Ebenen in Tangenten einer C^n schneiden ($a=1, 2, 3$). Diese Anzahlen sind resp.:

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2),\quad \tfrac{1}{72}n(n^2-1)(n+2)(n^2+4n+6),$$

$$280\binom{n+4}{9}+280\binom{n+4}{8}+105\binom{n+3}{7}+77\binom{n+3}{6}+43\binom{n+2}{5}$$

$$-16\binom{n+2}{4}+20\binom{n+1}{3}-\frac{1}{360}n(n^2-1)(n^2-4)(n-3).$$

Bezüglich der dritten s. die Berichtigung im Index des Bandes (der Zeitschrift).

125) S. [52]) = Opuscula 1, p. 265. Hier konstruiert *Newton* einen Kegelschnitt durch 5 Punkte [vgl. [23]), lib. 1, lemma 21, und Prop. 22 ff.] und eine C^3 durch 7 gegebene Punkte, deren einer ein Doppelpunkt sein soll; diese letztere Konstruktion hatte *Newton* bereits angedeutet im zweiten Brief an *H. Oldenburg* vom 24. Okt. 1676 = Opuscula 1, p. 340/1. Vgl. auch *Chr. B. de Bragelongne,* J. des Sav. Suppl. Paris 1708, p. 337. — Über diese älteren Arbeiten von *Newton*, *Mac Laurin* u. a. vgl. *E. Kötter,* Bericht, p. 9 ff.; eine historische Studie über die organische Erzeugung von Kurven bis zum Ende des 18. Jahrhunderts giebt *A. v. Braunmühl*, Katalog von Modellen etc., hrsg. von *W. Dyck,* Deutsche Math.-Ver. München 1892, p. 54.

126) S. [19]); vgl. auch Lond. Trans. 30 (1719), p. 939; 39 (1735), p. 143. In der zweiten, 1732 vorgelegten und schon 1721 als Anhang zur Geom. org. verfassten Abhandlung zeigt *Mac Laurin,* dass, wenn sich ein ebenes Polygon so ändert, dass seine Seiten um feste Punkte rotieren, und alle Ecken, bis auf eine, Kurven der Ordnungen $l, m, n, \ldots$ beschreiben, die letzte Ecke eine Kurve durchläuft, die im allgemeinen von der Ordnung $2lmn\ldots$ ist; letztere reduziert sich auf $lmn\ldots$, wenn die Punkte alle auf einer Geraden liegen. Den Fall $l=m=n=\cdots=1$ behandelt auch *Braikenridge*[129]), p. 60. — Vgl. *Poncelet,* Traité 1, p. 319 ff.; Appl. d'anal. et de géom. 2, p. 52 ff.; *M. Chasles,* Paris C. R. 78 (1874), p. 922; *S. Roberts,* Lond. Math. Soc. Proc. 14 (1883), p. 110. — Hier sei auch bemerkt, dass *W. Fr. Meyer,* Deutsche Math.-Ver. Jahresb. 9 (1901), p. 91 das *Pascal*'sche Theorem auf C^m resp. C^{2m} ausgedehnt hat.

127) Geometrische Beweise in diesem Sinne gab für einige Sätze von *Mac*

eine quadratische Transformation zwischen zwei Ebenen[128]) verwendet [III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*].

Analoge Konstruktionen, unter Benutzung von Winkeln mit der Grösse Null, d. h. von Geraden, die sich um feste Punkte drehen, gab *W. Braikenridge*[129]), bei dem der Begriff einer quadratischen Transformation eine neue Belebung erfährt[130]).

J. Steiner[131]), sodann systematischer und mit Anwendungen auf viele besondere Fälle *H. Grassmann*[132]), später *M. Chasles* und *E. de*

Laurin E. de Jonquières, J. de math. (2) 2 (1857), p. 153. — Indem er die Voraussetzung fallen lässt, dass die Spitzen der Winkel fest seien, betrachtet *Mac Laurin* z. B. (Geom. org. p. 72) zwei Vielseite $a_1 a_2 \dots a_{m+1}$, $b_1 b_2 \dots b_{n+1}$ mit konstanten Winkeln, und zeigt (durch Rechnung), dass, wenn sich deren m, n Ecken auf ebensoviel festen Geraden bewegen, während sich die Seiten a_{m+1}, b_{n+1} auf einer festen Geraden schneiden, und a_1, b_1 um zwei feste Punkte A, B rotieren, der Schnittpunkt von a_1, b_1 eine Kurve Γ der Ordnung $m+n+2$ beschreibt, die in A, B die Multiplizitäten $m+1$, $n+1$ besitzt. Während a_1, b_1 um A, B rotieren, umhüllen a_{m+1}, b_{n+1} zwei Kurven der Klassen $m+1$, $n+1$ (für die die unendlich ferne Gerade eine m-fache, resp. n-fache Tangente ist), so dass Γ als erzeugt erscheint durch die Büschel A, B, deren Geraden durch eine Korrespondenz $(m+1, n+1)$ verknüpft sind. — So sind auch die Erzeugungen einer rationalen C^3 (p. 11, 30) gleichbedeutend mit den durch die Geraden eines Büschels (C) hervorgebrachten, die projektiv auf die Tangenten (NL) einer gewissen Parabel bezogen sind, resp. durch eine (1, 2)-Korrespondenz zwischen den Geraden zweier Büschel (C und S); etc. *Mac Laurin* giebt auch Erweiterungen durch Betrachtung, statt Geraden, irgend welcher fester Kurven; indem er sodann die gegebenen in spezielle Lagen bringt, auch so, dass der erzeugte Ort zerfällt, erhält er C^3 mit und ohne Doppelpunkt, C^4 mit Doppelpunkten oder einem dreifachen Punkt, etc.

128) *Mac Laurin* geht von *Newton's* organischer Erzeugung der Kegelschnitte aus; daraus, dass jeder Geraden der Ebene ein Kegelschnitt durch drei feste Punkte zugeordnet wird (l. c. p. 85), schliesst er, dass, wenn ein Punkt eine C^n durchläuft, der homologe Punkt eine C^{2n} mit der Multiplizität n in jenen 3 Punkten, etc. Auf p. 137 konstruiert er eine C^n, von der $2n+1$ Punkte gegeben sind, von denen einer ein $(n-1)$-facher sein soll, indem er sie mittels sukzessiver organischer Erzeugungen aus einem durch 5 Punkte bestimmten Kegelschnitt herleitet (andere analoge Konstruktionen auf p. 138/9). Eine andere Konstruktion einer C^n mit $(n-1)$-fachem Punkt, mittels eines variabeln n-Ecks, lieferte *W. Braikenridge,* Lond. Trans. 39 (1735), p. 25.

129) Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, Lond. 1733.

130) So beweist er, dass wenn die Seiten eines Dreiecks um drei feste Punkte rotieren, während eine der Ecken eine Gerade, und eine zweite eine C^n durchläuft, der Ort der dritten Ecke eine C^{2n} ist. Zu dem Behuf nimmt er an, dass sich die dritte Ecke auf einer Geraden bewege, und sucht die Schnitte der C^n mit dem alsdann von der zweiten Ecke beschriebenen Kegelschnitt: l. c. p. 26 ff.

131) S. [55]), sowie [268]), p. 334 = Werke 2, p. 624.

132) J. f. Math. 42 (1851), p. 193, 204 = Werke 2[1], p. 86, 99.

Jonquières[133]) haben den Ort Γ der Schnittpunkte homologer Kurven in zwei projektiven Kurvenbüscheln der Ordnung n, n' untersucht. Die Kurve Γ ist von der Ordnung $n + n'$ (sie kann auch zerfallen), und geht durch die Basispunkte beider Büschel; ist A ein Basispunkt der ersten, so ist die Tangente von Γ in A die Gerade, die dort diejenige Kurve des ersten Büschels berührt, die der durch A gehenden des zweiten korrespondiert.

Wenn zwei homologe Kurven C^n, $C^{n'}$ in einem gemeinsamen Punkte die Multiplizitäten s, s' ($s \leq s'$) besitzen, so ist dieser Punkt ein s-facher für Γ; wenn $s < s'$, und nur dann, fallen die Tangenten von Γ daselbst mit denen von C^n zusammen[134]). In einem s- resp. s'-fachen Basispunkt beider Büschel besitzt Γ die Multiplizität $s + s'$ [*de Jonquières*[133])] und als Tangenten daselbst die Geraden, die den beiden projektiven durch die Tangenten der beiden Büschel gebildeten Involutionen vom Grade s, s' gemeinsam sind[135]).

Grassmann, später *Chasles* und *de Jonquières* haben auch die umgekehrte Frage untersucht: wenn eine C^m vorliegt, zwei Büschel der Ordnung n, $n'(n + n' = m)$ zu suchen, die auf die angegebene Art die C^m erzeugen.

Grassmann[132]) hat erkannt, dass eine solche Erzeugung stets möglich ist.

De Jonquières[133]) wählt behufs projektiver Konstruktion einer C^m, die durch gegebene Punkte gehen soll, die Basispunkte beider unbekannter Büschel teils aus den gegebenen Punkten, teils aber aus

133) Konstruktionen von C^3 und C^4 gab *Chasles*, Paris C. R. 36 (1853), p. 943; 37 (1853), p. 272, 372, 437; 41 (1855), p. 1102, 1190; J. de math. (1) 19 (1854), p. 366; von C^3, C^4, C^5 etc. *de Jonquières*, Par. [Sav. étr.] Mém. prés. (2) 16 (1858), p. 159 [vorgelegt 1857, s. den „Bericht" von *Chasles*, Paris C. R. 45 (1857), p. 318]; vgl. auch J. de math. (2) 1 (1856), p. 411; 2 (1857), p. 267; [31]), und Mélanges[51]), ch. IV. — Über die projektive Erzeugung von Kurven und deren Linearsystemen s. auch *H. Kortum*, Preisschr. üb. geom. Aufg. dritten u. vierten Grades (zwei Abhdlgn.), Bonn, 1869; *Olivier* [358]); Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 209; *Joerres*, J. f. Math. 72 (1870), p. 327; *A. Milinowski*, Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 427; 23 (1878), p. 85, 211, 343; *E. Kötter*, Preisschrift, § 129 f. und [155]); eine Arbeit von *G. Härtenberger*, J. f. Math. 58 (1859), p. 54, gestützt auf die erste Abhandlung von *de Jonquières*, ist irrtümlich. — Die allgemeinen Ergebnisse von *Chasles* und *de Jonquières* fasst zusammen *Cremona*, Intr. art. 10; vgl. auch *„Clebsch-Lindemann"*, p. 375, 760; *v. Peschka* [48]), p. 53.

134) *Cremona*, Intr. n. 51, wo ein allgemeinerer Satz steht.

135) *Cremona*, Intr. n. 52. — Diese Sätze dehnt *Guccia*[32]), §§ 4, 5 aus, indem er die Singularitäten des Ortes (der Ordnung Σn_i) der Punkte untersucht, durch die $k + 1$ entsprechende Kurven von $k + 1$ zueinander projektiven ∞^k Linearsystemen der Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}$ gehen.

solchen, die erst aus jenen zu bestimmen sind, und zeigt, dass die Anzahl der Punkte der zweiten Gruppe $nn' - 1$ ist. *Chasles*[136]) geht von einem Büschel der Ordnung n aus, dessen Basispunkte alle auf C^m liegen: nachher bestimmt man, auf Grund des „Restsatzes" (Nr. **25**)[137]), ein zugehöriges Büschel der Ordnung n', dessen Basispunkte ebenfalls der C^m angehören. — Die Untersuchung des ersten Büschels geschieht bei *Chasles*[138]) in der Weise, dass für $n' \geqq n - 2$ noch $3n - 2$ seiner Basispunkte willkürlich (auf C^m) wählbar sind.

Aber die Schlüsse dieser beiden Autoren, nur auf einfachen Abzählungen beruhend, sind unzureichend und können zu falschen Ergebnissen führen: insbesondere unterliegt das obige Theorem Ausnahmen. Durch Betrachtung von Kurven mit Doppelpunkten haben das *K. Bobek*[139]) und *K. Küpper*[140]) nachgewiesen, die dabei von der Theorie der linearen Scharen (Nr. **23** ff.) Gebrauch machten und klarlegten, dass bei der Diskussion der Möglichkeit der projektiven Erzeugung einer C^m nicht nur auf die Anzahl der gegebenen Punkte Rücksicht zu nehmen ist, sondern auch auf ihre Lage[141]).

Die Konstruktion von Kurven (und Flächen) mittels zweier linearer reziproker Systeme — so dass deren Parameter an eine bilineare Gleichung gebunden sind — hat *G. von Escherich*[142]) verfolgt.

Eine andere Methode der Erzeugung einer Kurve, durch einen

---

136) Paris C. R. 45 (1857), p. 1061.

137) Vgl. *J. Bacharach,* Diss. [366]), § 2. — *Chasles* (und ebenso *Cremona*) stützt sich auf den Schnittpunktsatz von *Cayley* (Nr. **33**).

138) Paris C. R. 45 (1857), p. 393.

139) Math. Ann. 25 (1884), p. 448.

140) Prag Ber. 1896, Nr. 1 (und 1897, Nr. 5) = Math. Ann. 48 (1896), p. 401. Vgl. auch Prag Abh. (7) 1 (1884), Nr. 1 (n. 17); Prag Ber. 1888, p. 265 und besonders Math. Ann. 32 (1888), p. 282, wo *Küpper* den Mangel an Exaktheit in den mit jener Methode von *de Jonquières* [Paris C. R. 105 (1887), p. 917, 971, 1148; vgl. auch Pal. Rend. 2 (1888), p. 118] hinsichtlich der Konstruktion von C^m mit Doppelpunkten erhaltenen Resultaten nachweist.

141) *Küpper* hat eine präzise Bestimmung des Textsatzes gegeben, und die Möglichkeit erörtert, Kurven mit Doppelpunkten projektiv zu erzeugen. Es ergiebt sich, dass sich *sämtliche* $C^{2n+\nu}$ mit δ gegebenen Doppelpunkten erzeugen lassen durch zwei projektive Büschel von C^n, $C^{n+\nu}$, die jene δ Punkte zu Basispunkten haben, für $\nu > 0$ *nur dann,* wenn $\delta \leqq 3n - 2$, und für $\nu = 0$ *nur dann,* wenn $\delta \leqq 3n - 3$ ist. Allerdings unter der Voraussetzung, dass die δ Doppelpunkte den C^n lauter unabhängige Bedingungen auferlegen; andernfalls können obige Maximalwerte von δ überschritten werden. Vgl. [389]). — Konstruktionen von Kurven mit gegebenen Doppelpunkten erzielt mittels „Absplitterung" *H. Oppenheimer,* Zeitschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 305.

142) Wien Ber. 75 (1877), p. 523; 85 (1882), p. 526, 893; 90 (1884), p. 1036.

linearen Mechanismus, rührt von *Grassmann*[143]) her, der sich dabei auf die Prinzipien seiner Ausdehnungslehre stützt [III A B, 3 a, Nr. **23**, *Fano*; III A B, 9, *H. Burkhardt*, Systeme geometrischer Analyse]. Wenn die Lage eines (in einer Ebene) beweglichen Punktes x daran gebunden ist, dass ein Punkt und eine Gerade — die durch lineare Konstruktionen aus x und einem System von festen Punkten und Geraden hergeleitet sind — mit einander inzident sind (d. h. der Punkt auf der Geraden liegt), so beschreibt x eine algebraische Kurve, und zwar von der Ordnung m, wenn x bei diesen Konstruktionen m-mal verwendet worden ist[144]). Umgekehrt kann jede C^m so erzeugt werden[145]).

Allgemeiner, wenn in der Ebene m Geradenbüschel beliebig gewählt sind, so lässt sich zwischen ihnen eine m-lineare Korrespondenz herstellen, und der Ort des Punktes, in dem m homologe Gerade zu-

---

143) Ausdehnungslehre von 1844, § 145/8 = Werke 1, p. 245 f.; unabhängig von der Ausdehnungslehre, J. f. Math. 31 (1845), p. 111; 42 (1851), p. 187 = Werke 2^1, p. 49, 80; die Fälle $m = 3, 4$ auch J. f. Math. 36 (1847), p. 177; 52 (1855), p. 254 und resp. 44 (1851), p. 1 = Werke 2^1, p. 73, 218, 109 [Ausdehnungen auf den Raum in fünf Noten, J. f. Math. 49 (1852), p. 1—65 = Werke 2^1, p. 136 bis 198]. Vgl. auch *G. Bellavitis,* Ist. Venet. Atti (3) 1 (1854), p. 53; Ist. Venet. Mem. 8 (1859), p. 161. — Für solche Konstruktionen und ihren Zusammenhang mit andern, insbesondere durch projektive Büschel, s. die Anmerkungen von *G. Scheffers* in *Grassmann's* Ges. Werke 2^1 (1904), p. 370—421, 423—29; sodann *A. Clebsch,* Math. Ann. 5 (1872), p. 422; *V. Schlegel,* Math. Ann. 6 (1872), p. 321; *F. Dingeldey,* Diss. Leipzig 1885; *H. Schroeter,* J. f. Math. 104 (1888), p. 62; *„Clebsch-Lindemann“,* p. 536 f.; *A. N. Whitehead,* A treatise on universal algebra, Cambr. 1 (1898), p. 229 ff; vgl. auch *Klein* [160]), 1, p. 193; und Anwendung der Diff.- und Integralrechnung auf Geom., autogr. Vorl. Sommersem. 1901, Leipz. 1902, p. 266 ff. Übrigens hat *Grassmann* selbst [132]), wie auch *Scheffers* bemerkt, l. c. p. 395/8, gezeigt, wie sich aus seiner linealen Konstruktion diejenige vermöge zweier projektiver Büschel herleiten lässt.

144) So z. B. entsteht eine C^3 als Ort eines Punktes, der mit drei festen Punkten durch drei Geraden verbunden ist, derart, dass diese die Seiten eines gegebenen Dreiecks in drei Punkten einer Geraden treffen.

145) Eine in gewissem Sinne mit der obigen verwandte Konstruktion beruht darauf, dass man stets ein *Gelenksystem* finden kann, von dem ein Punkt eine gegebene algebraische Kurve beschreibt. Dieser Satz (dessen Umkehrung auf der Hand liegt) wurde zuerst von *A. B. Kempe* nachgewiesen, Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 213; How to draw a straight line, Lond. 1877, p. 33 ff. Hierüber und allgemein über Gelenksysteme (IV 3, Nr. **24**, **25**, *Schoenflies*) s. besonders *G. Koenigs,* Leçons de cinématique, Paris 1897, chap. 11. Eine reiche Bibliographie findet man bei *V. Liguine,* Bull. sci. math. (2) 7^1 (1883), p. 145; sowie bei *J. Neuberg,* Sur quelques systèmes de tiges articulées, Liège 1886, der auch eine Beschreibung vieler Gelenksysteme liefert. — Vgl. auch, für C^4, *F. Dingeldey* [143]).

sammenlaufen, ist eine C^m, die durch die Zentra der m Büschel hindurchgeht; umgekehrt kann jede C^m so erzeugt werden, indem auf ihr die Zentra der m Büschel beliebig wählbar sind[146]).

Wegen der Konstruktion von Kurven mittels Polarsystemen s. Nr. **11**.

11. Rein geometrische Untersuchungen [III A, B 3, Nr. **24—27**, *Fano*]. Der Gedanke, die Eigenschaften von algebraischen Kurven (und Flächen) rein geometrisch zu begründen, findet sich schon bei *J. Steiner* [s. z. B. [55])], wie auch in den Arbeiten von *Grassmann*, *Chasles* und *de Jonquières* über die Erzeugung der Kurven (Nr. **10**); und für die Kurven (und Flächen) 2. Ordnung wurde von *K. G. C. von Staudt*[147]), der diese als Fundamentalörter einer Polarität betrachtete, und überdies eine streng geometrische Theorie der imaginären Elemente entwickelte, vollständig ausgeführt.

Für die ebenen Kurven beliebiger Ordnung findet sich ein rein geometrisches Ausführungsprinzip in der „Introduzione" von *L. Cremona* (1861), der jedoch der Algebra einige Fundamentalprinzipien entlehnt, so das von *Lamé* über Büschel[29]), das Korrespondenzprinzip für rationale Formen ∞^1, u. a. Im besondern beruht die Theorie der Polarität, auf welche er grösstenteils die „Introduzione" gegründet hat, auf der der harmonischen Mittelpunkte, die (s. das. art. 3) auf Grund von Segmentrelationen entwickelt wird. Unabhängig von metrischen Begriffen, aber gestützt auf einige algebraische Theoreme, behandeln die Polarität, mittels der Methode von n auf $n+1$, *F. Schur*[148]), unter Verwendung der projektiven Erzeugung einer C^n aus zwei Büscheln von C^1 und C^{n-1}, und *G. Lazzeri*[149]), der von einigen Sätzen über die Polargerade eines Punktes in bezug auf ein n-Seit[150]) ausgeht.

146) *E. Kötter*, Preisschr. § 173 f.

147) S. [213]), und Beiträge zur Geom. d. Lage, 3 Hefte, Nürnberg 1856, 1857, 1860.

148) Zeitschr. Math. Phys. 22 (1876), p. 220 = *v. Peschka* [48]), p. 71. — Eine geometrische Darstellung der Polargruppen, zunächst im binären, dann im ternären Gebiet, mittels einer C^n mit $(n-1)$-fachem Punkt, gab *E. Waelsch*, Wien Ber. 88 (1883), p. 418. — *C. Rodenberg*, Math. Ann. 26 (1885), p. 557 leitet die Polareigenschaften konstruktiv her, indem er von der Konstruktion der ersten Polare mittels zweier, die gegebene Kurve projizierenden Kegel ausgeht.

149) Ist. Lomb. Rend. (2) 24 (1891), p. 1021.

150) Vgl. *E. Caporali*, Mem. di geom., Napoli 1888, p. 258; *A. Sannia*, Lez. di geom. projettiva, Napoli 1895, 2. ed., p. 438 ff. Der allgemeinste Satz lautet: „Kennt man für einen Punkt P die Polargeraden in bezug auf die r-Seite, die sich aus den Seiten eines gegebenen n-Seits durch Kombinierung zu je r ergeben, sowie in bezug auf die $(n-r)$-Seite, die durch die entsprechenden

H. Thieme[151]) hat zuerst auf streng geometrischem Wege das System der ersten Polaren einer C^{n+1} konstruiert, indem er die entsprechenden Konstruktionen für die C^n bereits als ausgeführt ansieht. Zu dem Behuf ordnet er den Punkten der Ebene projektiv die Kurven eines Netzes der Ordnung n zu, derart, dass die durch das Theorem über die gemischten Polaren involvierte Bedingung erfüllt wird; er erhält so auch eine rein geometrische Definition einer Kurve (und weiterhin von linearen Kurvensystemen), unabhängig von ihren Punkten, und darüber hinaus die Mannigfaltigkeit aller C^n der Ebene.

G. Kohn[152]) hat die Theorie der harmonischen Mittelpunkte auf die der Involutionen gegründet; er zeigt, dass die r^{te} Polargruppe eines Punktes P in bezug auf n mit ihm auf einer Geraden befindliche Punkte gebildet wird durch die $(r+1)$-fachen Punkte der Involution n^{ten} Grades r^{ter} Stufe, von der eine Gruppe aus den gegebenen Punkten besteht, und der zugleich alle Gruppen angehören, die sich aus $r-1$ beliebigen Punkten der Geraden und dem $(n-r+1)$-fach gezählten Punkte P zusammensetzen.

Die *Kohn*'sche Definition ist von *G. B. Guccia* und in anderer Weise von *G. Kohn* selbst[153]) auf die Polaren im ternären Gebiet ausgedehnt worden.

Restseiten geliefert werden, so ergeben sich zwei Vielseite, die sich in einer Homologie mit dem Zentrum P entsprechen, die als Axe die Polargerade von P in bezug auf das n-Seit besitzt, und deren charakteristisches Doppelverhältnis $\frac{-r}{n-r}$ ist." Für $r=1$ steht ein Teil des Satzes schon bei *Cayley*, J. f. Math. 34 (1847), p. 274 = Papers 1, p. 360; vgl. *Cremona*, Intr. n. 76.

151) Zeitschr. Math. Phys. 24 (1878), p. 221, 276; vgl. auch Math. Ann. 20 (1882), p. 144. *Thieme* entwickelt die Theorie für Flächen, indessen gilt sie für jedes Gebiet [auch für das binäre; vgl. Math. Ann. 23 (1884), p. 597]; in Math. Ann. 28 (1886), p. 133 wird der Fall der Fläche dritter Ordnung eingehend untersucht. — Zu einem analogen Ergebnis gelangte auf anderem Wege, aber auch mittels der Methode von n auf $n+1$, im binären Gebiet *H. Wiener,* Habilitationsschr., Darmstadt 1885. Vgl. auch *E. Kötter,* Preisschr; *R. de Paolis,* Torino Mem. (2) 42 (1891), p. 495; *H. Thieme,* Arch. Math. Phys. (3) 10 (1903), p. 137.

152) Wien Ber. 88 (1883), p. 424. Vgl. *G. B. Guccia,* Pal. Rend. 8 (1894), p. 245; *H. de Vries,* Nieuw Archief v. Wisk. (2) 5 (1901), p. 68. — Die Methode von *Kohn* hat *G. Castelnuovo* auf gemischte Polargruppen ausgedehnt, Ist. Venet. Atti (6) 4 (1886), p. 1167, 1559, der geometrisch die Theorie der Involution aus der der rationalen Normkurven von höheren Räumen herleitet, und hieraus die Polarität in bezug auf eine ebene Kurve. — Einzelne Sätze, u. a. den über gemischte Polaren, haben *Cremona* [58]) [s. auch [39]), n. 77], und *Kötter* [155]) geometrisch bewiesen.

153) Pal. Rend. 7 (1893), p. 263, resp. p. 307. Eine allgemeinere Eigenschaft giebt *E. Kötter* an, Jahrb. Fortschr. Math. 25 (1897), p. 980. Die Definition von

Indem wir von andern, auf speziellere Ziele gerichteten[154]) Arbeiten absehen, kommen wir zu der rein synthetischen Behandlung, die *E. Kötter* wenigstens mehreren Gebieten der Theorie der ebenen algebraischen Kurven hat werden lassen, in seiner *Preisschrift* von 1887[155]). Er geht (Kap. 1) aus von der realen Darstellung des Imaginären bei *v. Staudt*, und nachdem er (Kap. 2, 3) mittels der Methode von n auf $n+1$ die Involutionen n^{ter} Ordnung und deren Netze μ^{ter} Stufe, sowie die Involutionen μ^{ten} Ranges und m^{ter} Ordnung[156]) untersucht hat, bedient er sich derselben zur Aufstellung

---

Guccia hat *G. Aguglia* verallgemeinert [441]), p. 40. — Über die geometrische Theorie der Kurven und ihrer Linearsysteme, besonders der Polaren, vgl. auch *Guccia,* Pal. Rend. 16 (1902), p. 204.

154) Von *M. Chasles, A. Milinowski, F. Schur, Th. Reye, H. J. St. Smith, H. Kortum, F. Siebeck* u. a., wo es sich um C^3 und C^4 handelt, um kubische und biquadratische Probleme u. a. — In den Preisschriften von *Smith,* Ann. di mat. (2) 3 (1869), p. 112, 218 = Papers ed. by *J. W. L. Glaisher,* Oxford 1894, 2, p. 1, und von *Kortum* [133]) werden rein geometrische Konstruktionen zur Lösung aller kubischen und biquadratischen Probleme angegeben, im besondern der folgende, von der Berliner Akad. 1868 vorgeschlagen: Gegeben 13 der Schnittpunkte zweier C^4, die andern drei zu finden [*Smith,* l. c. p. 239 = Papers 2, p. 65 hat allgemeiner dieses gelöst: Gegeben $4n-3$ der Schnittpunkte einer C^4 und C^n, die andern drei zu finden]. Über dies Problem vgl. auch *J. N. Bischoff,* Ann. di mat. (2) 6 (1874), p. 145.

155) Ergänzungen (projektive Erzeugung von Kurven mit vielfachem Punkt, Theorie der Polaren, Jacobiana eines Netzes, Hessiana einer Kurve) lieferte *Kötter,* Math. Ann. 34 (1888), p. 123.

Ausgehend vom Studium eines n-Punktsystems r_{nn} (Gesamtheit der aus den Punkten einer Geraden herstellbaren Gruppen von n Punkten) und der darin enthaltenen Systeme $r_{n,n-i}$ geringerer, der $(n-i)^{\text{ten}}$ Stufe, gelangt auch *R. Schumacher,* J. f. Math. 110 (1892), p. 230, aber auf einem andern Wege (obgleich ebenfalls mittels der Methode von n auf $n+1$, wie es in der Natur der Sache liegt; auch *R. de Paolis* geht so vor) zu einer rein geometrischen Konstruktion (vermöge kollinearer und reziproker Beziehungen) von „Band" und „Kette", d. i. zu Involutionen höheren Ranges (es sind das zu einander duale Gebilde und entsprechen den Normbüscheln und Normkurven eines Raumes von n Dimensionen), und im besondern zur „Normalkette", dem Bilde einer algebraischen Gleichung des Grades n zwischen zwei Variabeln, deren eine als Parameter aufgefasst wird, während die andere die Punkte der Geraden bestimmt. Auf diesen letzteren Begriff baut *Schumacher,* J. f. Math. 111 (1893), p. 254 die geometrische Definition der C^n und ihrer Linearsysteme auf, durch Feststellung einiger, von der geometrischen Interpretation des Fundamentalsatzes der Algebra unabhängiger Eigenschaften. So giebt er eine Definition der ersten Polare, und die projektive Erzeugung einer C^n durch ein Büschel von Geraden und ein solches von C^{n-1}, bis er zur Mannigfaltigkeit aller C^n der Ebene gelangt.

156) Die *Kötter*'schen Involutionsnetze μ^{ter} Stufe sind identisch mit von *G. Battaglini, Em. Weyr, W. Fr. Meyer* u. a. untersuchten Involutionen μ^{ter} Stufe,

(Kap. 4) der fundamentalen Theoreme über ebene Kurven und deren lineare Systeme. Die Basis des Ganzen bildet die Konstruktion einer C^n aus zwei projektiven Büscheln von Kurven geringerer Ordnung, sowie die Methode von n auf $n+1$. So beweist er das *Bézout*'sche Theorem über die Anzahl der einer C^m und C^n gemeinsamen Punkte[157]), sowie die Schnittpunktsätze von *Gergonne*, *Plücker*, *Jacobi*, *Cayley* (Nr. **33**); sodann die wesentlichsten Sätze über Polarität, endlich die Erzeugung einer C^n aus n in n-linearer Korrespondenz stehenden Geradenbüscheln (Nr. **10**), aus der eine lineare Konstruktion einer C^n durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ — reelle oder nicht reelle — gegebene Punkte folgt.

Gleichzeitig mit *Kötter*, aber unabhängig von ihm, hat sich *R. de Paolis* eingehend mit derselben Frage beschäftigt, aber er konnte nur noch die einleitenden Teile seiner Theorie[158]) veröffentlichen. Während *Kötter* den von *Steiner* und *Chasles* für Kegelschnitte eingeschlagenen Weg erweiterte, indem er die Kurven mittels projektiver Büschel

---

und sind analytisch äquivalent mit den linearen Systemen ∞^{μ} binären Formen der Ordnung n. Eine Involution erster Stufe und n^{ter} Ordnung erzeugt *Kötter* als Ort der Gruppe der Koinzidenzelemente zweier fester Involutionen von den niedrigeren Ordnungen m und $n-m$, die, vermöge einer, in einem gegebenen Büschel variabeln Projektivität, auf einander bezogen sind, und aus ihnen gehen sukzessive [wie bei dem *Grassmann*'schen und *Riemann*'schen Prozesse für die Erzeugung eines linearen Raumes von μ Dimensionen, vgl. [50])] die Involutionsnetze μ^{ter} Stufe hervor. Die völlige Analogie, die diese letzteren mit jenen linearen Räumen darbieten, kommt bei *Kötter* zum Ausdruck zur sukzessiven Konstruktion und Untersuchung der Involutionen μ^{ten} Ranges und m^{ter} Ordnung, die gleichbedeutend sind mit der zwischen den Elementen zweier einförmiger Gebilde mittels einer algebraischen Gleichung von den Graden m und μ in zwei Variabeln hergestellten Beziehung. So führt die Analogie eines Involutionsnetzes zweiter Stufe mit einer Ebene zu den Involutionen zweiten Ranges, als den Analoga der durch zwei projektive Strahlbüschel erzeugten Kegelschnitte.

157) Von *J. Lüroth*, Math. Ann. 8 (1874), p. 145 (Auszug Gött. Nachr. 1873, p. 767) (§ 19) wird dies Theorem bewiesen durch Einführung der Theorie der *v. Staudt*'schen Imaginären in die nach der *Grassmann*'schen Methode definierten C^n.

158) Soc. ital. (dei XL) Mem. (3) 7 (1890), Nr. 6 [Auszug Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 93]; Torino Mem. (2) 42 (1891), p. 495. Die erstere Arbeit enthält, ausser andern zur Analysis situs gehörigen Dingen, die Theorie des Zusammenhanges der Flächen, sowie rein geometrische Beweise von Eigenschaften, die gleichbedeutend sind mit bekannten Sätzen von *K. Weierstrass*, *G. Cantor* u. a. aus der allgemeinen Funktionentheorie. Die zweite Arbeit beschäftigt sich spezieller mit den algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, und entspricht in der Sache, aber nicht in der Methode, den ersten drei Kapiteln der *Kötter*'schen Preisschrift. Den Ausgangspunkt bilden die n-linearen Korrespondenzen zwischen n Gebilden erster Stufe, die also analytisch durch eine Gleichung $a_x b_y c_z \cdots = 0$ definiert werden würden.

geringerer Ordnung erzeugte, scheint *de Paolis* vielmehr das Ziel verfolgt zu haben, die Idee von *v. Staudt*, die Kegelschnitte auf Grund der Polarität zu erzeugen, auf dem *Thieme*'schen Wege in geeigneter Weise auf höhere Kurven zu übertragen[159]).

II. Die singulären Punkte.

12. Auflösung der singulären Punkte durch birationale Transformationen. Den Gedanken, die singulären Punkte durch einen rein algebraischen Prozess aufzulösen, verdankt man *L. Kronecker*[160]), der vermöge birationaler Transformation der irreduzibeln Kurve $F(x, y) = 0$

159) Vgl. den „Bericht" von *C. Segre*, Torino Atti 27 (1892), p. 366, sowie seine „Cenni biografici su *R. de P.*", Pal. Rend. 6 (1892), p. 208; endlich die nachgelassene Note von *de Paolis,* Rom Linc. Rend. (5) 3^2 (1894, datiert vom 30. Dez. 1887), p. 225, mit Anhang von *Segre,* p. 227.

160) J. f. Math. 91 (1881), p. 301 = Werke, her. von *K. Hensel,* Leipz. 1897, 2, p. 193; der Berliner Akad. vorgelegt 1862, in Vorlesungen vorgetragen 1870/1. — Die *Kronecker*'sche Methode beruht auf der Tatsache, dass die „Diskriminante von y", d. i. die Resultante $Q(x)$ der Elimination von y aus $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, in zwei Faktoren D, D_1 zerfällt: der eine ist der „wesentliche Teiler", der andere der „ausserwesentliche", der quadratisch auftritt; so dass $Q = D D_1{}^2$. Der erste Faktor hängt nur von den Verzweigungspunkten x der Funktion y und deren Multiplizitäten ab: weder die einen noch die andern, also auch D nicht, ändern sich bei der Transformation. Der zweite Faktor hängt dagegen von den vielfachen Punkten der Kurve ab, und die Transformation erlaubt, seine quadratischen Faktoren von einander und von den Faktoren von D zu trennen. — Die genannte Zerlegung, die *Kronecker* direkt auf algebraischem Wege ausführt, hatte bereits *Riemann* auf transzendentem Wege geliefert [37]), art. 6. — Die *Kronecker*'sche Methode hat, mit einigen Abänderungen, *K. Weierstrass* adoptiert in seinen Vorl. üb. *Abel*'sche Funktionen, Sommersem. 1869. Vgl. dazu, wie zum ganzen Abschnitt II, den Bericht von *Brill-Noether,* Abschn. VI. — S. auch *F. Klein,* autogr. Vorl., *Riemann*'sche Flächen, Göttingen 1892, 1, p. 83, 105 ff.; sowie I B 1 c, Nr. **11**, *Landsberg;* II B, Ergänzungsteil, 2, *Hensel.* Zur arithmetischen Behandlung der Singularitäten ziehe man *K. Hensel* und *G. Landsberg,* Th. der alg. Funktionen etc., Leipzig, 1902, p. 365 ff. heran (die Reduktion der Singularitäten wird in Vorl. 24 behandelt), mit Ergänzungen von *G. Landsberg,* J. f. Math. 131 (1906), p. 152; wegen des Zusammenhanges mit der Theorie der Moduln und Ideale vgl. auch *E. Lasker,* Math. Ann. 60 (1904), p. 20. — Eine andere Methode, mit Anwendungen auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit mehrwertigen algebraischen Koeffizienten, entwickelt *L. W. Thomé,* J. f. Math. 126 (1903), p. 52. — Das Band zwischen der Theorie der Singularitäten (der ebenen Kurven, wie der Mannigfaltigkeiten von $n - 1$ Dimensionen in einem linearen Raume von n Dimensionen) und der der Elementarteiler, sowohl der gewöhnlichen (*Sylvester-Weierstrass*'schen) wie der höheren Stufen, verfolgt eingehend *S. Kantor,* Monatsh. Math. Phys. 11 (1899), p. 193.

(nicht der ganzen Ebene), wobei x ungeändert bleibt, schliesslich als Transformierte eine Kurve erhält, die im endlichen nur noch Doppelpunkte mit getrennten Tangenten aufweist.

Unabhängig von *Kronecker* hat *M. Noether*[161]) festgestellt, dass sich jede ebene algebraische, einfache oder zusammengesetzte Kurve f — wenn sie nur frei ist von vielfachen Bestandteilen — vermöge einer endlichen Zahl von quadratischen Transformationen (d. h. einer geeigneten *Cremona*'schen Transformation) in eine Kurve überführen lässt, die nur mit gewöhnlichen Singularitäten behaftet ist[162]). Um einen singulären, s-fachen Punkt A von f aufzulösen, genügt es, A als eine Ecke des Fundamentaldreiecks der (quadratischen) Transformation zu nehmen, und die beiden andern Ecken B, C ausserhalb f so, dass die drei Seiten des Dreiecks nicht etwa Tangenten von f werden. Die korrespondierende Kurve f' wird in den Fundamentalpunkten A', B', C' der zweiten Ebene gewöhnliche vielfache Punkte besitzen, während die von A verschiedenen vielfachen Punkte von f in vielfache, bez. gewöhnliche und nicht gewöhnliche Punkte von f', mit derselben

161) Gött. Nachr. 1871, p. 267; ausführlicher [169]), [197]). Dass die Reihe der quadratischen Transformationen abbrechen muss, bewies vor allem *M. Hamburger,* Zeitschr. Math Phys. 16 (1871), p 461. In mehr geometrischer Art bei *E. Bertini,* Ist. Lomb. Rend. (2) 21 (1888), p. 326, 413. Vgl. auch *E. Picard,* Traité d'analyse, 2, 2. éd., Paris 1905, p. 404.

162) Dasselbe Ziel erreicht mittels einer birationalen Transformation von f (nicht der ganzen Ebene) *G. Halphen,* Paris C. R. 80 (1875), p. 638; J. de math. (3) 2 (1876), p. 87; die zweite Methode [über diese s. auch *A. R. Forsyth,* Mess. of math. 30 (1900), p. 1] ist in *P. Appell* et *E. Goursat,* Th. des fonctions alg., Paris 1895, p. 276 ff. und in *A. R. Forsyth,* Theorie of functions of a complex variable, Cambr., 2. ed. 1900, p. 554 ff. wiedergegeben. — Vermöge einer derartigen Transformation lässt sich f auch stets reduzieren auf eine Kurve, die nur Doppelpunkte mit getrennten Tangenten besitzt, vgl. oben *Kronecker, Hensel-Landsberg* [160]); einen einfachen Beweis mittels einer ebenen ein-zweideutigen Transformation gab *E. Bertini,* Riv. mat. 1 (1891), p. 22 = Math. Ann. 44 (1894), p. 158 = *Picard* [161]), p. 408. Weitere Beweise bei *G. Simart,* Paris C. R. 116 (1893), p. 1047; *E. Vessiot,* Toulouse Ann. 10 (1896), D; *Halphen,* Étude, p. 630; *Appell-Goursat,* l. c.; *Forsyth,* l. c.; *del Re* [273]), n. 25. Das nämliche Theorem lässt sich durch Projektion gewinnen, indem sich eine ebene Kurve (ohne vielfache Teile) birational [wenn man will, auch durch eine birationale (*Cremona*'sche) Transformation *des ganzen Raumes*] auf eine von vielfachen Punkten freie Raumkurve beziehen lässt (auch lässt sie sich betrachten als Projektion einer derartigen Kurve eines geeigneten Raumes): vgl. *Veronese* [30]), p. 213; *H. Poincaré,* Paris C. R. 117 (1893), p. 18; *P. del Pezzo,* Napoli Rend. (2) 7 (1893), p. 15, 45; *M. Pieri,* Riv. mat. 4 (1894), p. 40; *E. Vessiot,* Soc. math. de France Bull. 22 (1894), p. 208; *C. Segre,* Ann. di mat. (2) 25 (1896), p. 43; *B. Levi,* Rom Linc. Rend. (5) 7^1 (1898), p. 111; *Hensel-Landsberg* [160]), p. 418.

Multiplizität übergehen. Wenn von den s Tangenten von f in A resp. $\tau_1, \tau_2, \ldots$ in die Geraden $t_1, t_2, \ldots$ fallen, so entstehen auf $B'C'$, ausserhalb B' und C', Punkte $A_1', A_2', \ldots$ von f', welche unter den Schnittpunkten von $B'\,C'$ mit f' resp. τ_1-, τ_2-, ...-fach zählen, also für f' gewisse vielfache Punkte sein werden, und zwar resp. s_1-, s_2-, ...-fache, wo jedenfalls $s_i \leqq \tau_i$, also auch $\sum s_i \leqq s$. Die Punkte A_i' sind für f' entweder von einer Multiplizität $< s$, oder aber sie können sich event. auch auf einen einzigen s-fachen Punkt A' reduzieren. Im letzteren Fall wende man auf f' wiederum eine quadratische Transformation an, indem man A' zu einem Fundamentalpunkt wählt, u. s. f. Nach einer endlichen Anzahl von Operationen gelangt man so von A zu Punkten geringerer Multiplizität[163]). Unterwirft man diese den nämlichen Prozessen, so wird man schliesslich eine Kurve erhalten, für die die Bilder von A lauter *einfache* Punkte sind. Verfährt man entsprechend mit allen nicht gewöhnlichen vielfachen Punkten von f, so gelangt man nach einer endlichen Zahl von Transformationen zu einer Kurve Φ, die nur mit gewöhnlichen vielfachen Punkten behaftet ist; überdies lässt sich erreichen, dass die Umgebungen aller vielfachen Punkte von f in Umgebungen einer gewissen (endlichen) Anzahl einfacher Punkte von Φ übergegangen sind.

Hiermit verbindet man eine von *Noether* verwendete Ausdrucksweise. Danach sind dem s-fachen Punkte A resp. auf den Tangenten $t_1, t_2, \ldots$ „unendlich benachbart“ gewöhnliche vielfache Punkte $A_1', A_2', \ldots$ von den Ordnungen $s_1, s_2, \ldots$ (die die *Umgebung erster Ordnung* von A auf f bilden). Geht dann der Punkt A_i' durch eine entsprechende quadratische Transformation über in vielfache Punkte $A_{i1}, A_{i2}, \ldots$ der Ordnung $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$, so sind mit *Noether* dem zu A unendlich benachbarten s_i-fachen Punkte wiederum benachbart —

163) S. [161]). Der geometrische Beweis von *Bertini* ist folgender. Ist n die Ordnung von f und $r_1, r_2, \ldots$ ihre Multiplizitäten ausserhalb A, so setze man:

$$\pi = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - \sum \frac{r(r-1)}{2},$$

und verstehe unter $\pi', \pi'', \ldots$ die analogen Ausdrücke für $f', f'', \ldots$ Besitzt f' in A_i' noch die Multiplizität s, so ist $\pi' = \pi - \frac{s(s-1)}{2}$. Fährt man so fort, und besitzt $f^{(k)}$ in einem der transformierten $A^{(k)}$ noch die Multiplizität s, so ist $\pi^{(k)} = \pi - k\,\frac{s(s-1)}{2}$. Wenn aber f, und also auch $f^{(k)}$, aus a getrennten irreduzibeln Teilen besteht, so folgt aus Formel (1) der Nr. 2, dass $\pi^{(k)} \geqq 1 - a$, so dass k die grösste in der (endlichen) Zahl $2\,\frac{(\pi + a - 1)}{s(s-1)}$ enthaltene ganze Zahl nicht überschreiten kann.

indem sie die *Umgebung zweiter Ordnung* von A auf f bilden — s_{i1}-, s_{i2}-, ...-fache gewöhnliche Punkte, wo $\sum_k s_{ik} \leqq s_i$; u. s. f.[164]).

13. Zweige (vollständige und partielle) als Punktörter und als Geradenörter. Reihenentwicklungen. Wenn vermöge der quadratischen Transformationen der Nr. **12** dem s-fachen Punkte A von f die einfachen Punkte $P, Q, \ldots$ (in endlicher Anzahl) auf Φ entsprechen, so entsprechen umgekehrt den Punkten von Φ in einer Umgebung eines der letzteren Punkte die Punkte einer gewissen Umgebung von A auf f; diese stellt dann einen „*Zweig*" von f dar mit dem (singulären) Punkt A als „*Ursprung*".

Eine allgemeine Gerade r, deren Abstand von A unterhalb einer gewissen Grenze bleibt, schneidet einen Zweig in einer konstanten Anzahl Δ von Punkten; Δ heisst die „*Ordnung*" des Zweiges, so dass die Summe der Ordnungen aller Zweige mit dem Ursprung A gleich

164) Diese Art der Auffassung eines singulären Punktes A lässt sich dadurch rechtfertigen, dass man sie von der Reihe der ausgeführten quadratischen Transformationen unabhängig macht, entweder durch Kontinuitätsbetrachtungen, oder indem man die Anzahl der in A fallenden Schnittpunkte von f mit einer andern durch A gehenden algebraischen Kurve ausdrückt. Vgl. Nr. **14**. — Die Singularität einer Kurve in einem Punkte, und der Begriff von unendlich benachbarten vielfachen Punkten lassen sich auch direkt definieren auf Grund der Differentiale verschiedener Ordnung der Koordinaten. Hierüber, und über die Theorie der „Elemente erster und höherer Ordnung", die für die Theorie der Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung bedeutungsvoll ist, s. *F. Engel,* Leipz. Ber. 45 (1893), p. 468; 54 (1902), p. 17 [Auszug Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 11 (1902), p. 187]; *E. Study,* Leipz. Ber. 53 (1901), p. 338; *M. Noether,* Math. Ann. 56 (1902), p. 677 [Auszug Erlanger Ber. 1902]; vgl. auch *Noether* [202]). — Im besondern kann man die Doppelpunkte mit einer einzigen Tangente in zwei Gattungen unterscheiden: eigentliche *Knotenpunkte* (tacnode, oscnode, ...), und *Spitzen* (erster, zweiter, ... Art), jenachdem sie sich nach einer endlichen Zahl k von quadratischen Tansformationen in zwei einfache Punkte auflösen oder aber in einem, oder auch (Nr. **13**), je nachdem sie Ursprung von zwei Zweigen sind, oder aber nur von einem einzigen. Im ersten Fall ist die Zusammensetzung nach *Noether*:

$$s = 2,\quad s_1 = 2,\quad s_{11} = 2,\quad \ldots,\quad s_{\underbrace{11\ldots1}_{k-1}} = 2,\quad s_{\underbrace{11\ldots1}_{k}} = 1,\quad s_{\underbrace{11\ldots12}_{k}} = 1;$$

im zweiten:

$$s = 2,\quad s_1 = 2,\quad s_{11} = 2,\quad \ldots,\quad s_{\underbrace{11\ldots1}_{k-1}} = 2,\quad s_{\underbrace{11\ldots1}_{k}} = 1.$$

Die charakteristische Form, die die Gleichung einer Kurve mit einer solchen Singularität im Ursprunge annimmt, giebt *B. Levi,* Torino Atti 40 (1905), p. 139 (n. 15, 16).

s ist. Es existiert jedoch eine Gerade a, eine der Tangenten von f in A derart, dass, wenn r mit a einen Winkel unterhalb einer gewissen Grenze bildet, r den Zweig in mehr als Δ Punkten trifft; a heisst die (singuläre) *Tangente* des fraglichen Zweiges in A. „*Klasse*" des Zweiges ist die Anzahl Δ' derjenigen seiner von einem von A verschiedenen Punkte ausgehenden Tangenten, deren Abstand von a unterhalb einer gewissen Grenze bleibt. Mit andern Worten, Ordnung und Klasse eines Zweiges sind die Grade der Multiplizität des, einmal als Punktort, das andere Mal als Geradenort betrachteten Zweiges [165]).

Die Betrachtung der Zweige ist für die Untersuchung der birationalen Korrespondenzen zwischen zwei Kurven wesentlich; einem Zweige entspricht dann wiederum ein Zweig, und zwei (singuläre) Punkte entsprechen sich, wenn sie Ursprünge zweier entsprechenden Zweige sind [166]).

A. Cayley [167]) und vollständiger *G. Halphen* [168]) haben die Ab-

165) Für einen gewöhnlichen einfachen Punkt, Wendepunkt, Spitze erster oder zweiter Art sind die Zahlen Δ, Δ' resp. gleich 1, 1; 1, 2; 2, 1; 2, 2. — Die Begriffe von Ordnung und Klasse eines Zweiges, wenn auch in der Beschränkung auf reelle Zweige, stammen von *Plücker* her [12]), p. 205 (vgl. auch Nr. **19**). — Über die Zweige und die bezüglichen Reihenentwicklungen s. *Picard* [161]), chap. 13; *Appell-Goursat* [162]), chap. 6; *C. Jordan,* Cours d'analyse, 2. éd., Paris 1893, 1, p. 397, 561; und besonders *Halphen,* Étude, und [168]). Für die reellen Zweige: *E. Cosserat,* Toulouse Ann. 4 (1890), O; *E. Vessiot,* Bull. sci. math. (2) 20^1 (1896), p. 29; über ihre Gestalt s. Nr **19**. Eine (analytische) Untersuchung einer Kurve in der Umgebung eines ihrer (im endlichen oder unendlich fernen) Punkte giebt *Ch. Biehler,* Nouv. Ann. de math. (2) 19 (1880), p. 492; 20 (1881), p. 97, 489, 537; (3) 2 (1883), p. 354, 397; 3 (1884), p. 367; 4 (1885), p. 153, 223, 249. — Synthetisch behandelt die höheren Singularitäten *M. de Franchis,* Pal. Rend. 11 (1897), p. 104.

166) Eine quadratische Transformation mit einem ihrer Fundamentalpunkte im Ursprunge eines Zweiges (Δ, Δ') verwandelt diesen in einen Zweig von der Ordnung Δ, wenn $\Delta \leqq \Delta'$, dagegen von der Ordnung Δ', wenn $\Delta' < \Delta$, und mit der Klasse $\Delta' - \Delta$ oder $\Delta - \Delta'$, je nachdem $\Delta' > \Delta$ oder $\Delta > \Delta'$, während sich für $\Delta = \Delta'$ nichts über die Klasse aussagen lässt. — Hieraus lässt sich, lediglich mittels der Zahlen Δ, Δ', die *Noether*'sche Komposition (Nr. **12**) des Δ-fachen Punktes (der Ursprung eines einzigen Zweiges von der Ordnung Δ ist) entnehmen, wenn Δ und Δ' teilerfremd sind. Sind $k, k_1, \ldots, \delta_1, \delta_2, \ldots$ die Quotienten resp. Reste bei dem auf $\Delta + \Delta'$ und Δ angewandten Verfahren des grössten gemeinsamen Teilers, so ist der Punkt äquivalent mit k (unendlich benachbarten) Δ-fachen, $k_1\,\delta_1$-fachen, ... So ist ein Zweig der zweiten Ordnung und ungeraden Klasse $2k - 1$ äquivalent mit k Doppelpunkten.

167) Quart. J. 7 (1866), p. 212 = Papers 5, p. 520 [Auszug J. f. Math. 64 (1865), p. 369 = Papers 5, p. 424].

168) Paris Mém. prés. (sav. étr.) (2) 26 (1877, vorgelegt 1874) [Auszug Paris C. R. 78 (1874), p. 1105], art. 4, 5.

bildung singulärer Punkte bei korrelativen Kurven untersucht. Einem Zweige (Δ, Δ') der einen Kurve entspricht ein Zweig (Δ', Δ) der andern, dem Ursprung des einen Zweiges die singuläre Tangente des andern. Die Anzahl der in A hineinfallenden Schnittpunkte des Zweiges (Δ, Δ') mit a ist gleich der Anzahl der von A ausgehenden und mit a zusammenfallenden Tangenten des Zweiges, nämlich gleich der Zahl $\alpha = \Delta + \Delta'$[169]) (III C 3, Nr. **3**).

Aus der Reihe von quadratischen Transformationen, vermöge deren ein singulärer Punkt A von f aufgelöst wird, folgt auf Grund eines Theorems von *A. L. Cauchy* (II B 1, Nr. **7**, *Osgood*), dass sich die Koordinaten x, y der Punkte eines Zweiges von f entwickeln lassen in Reihen von ganzen positiven Potenzen eines Parameters t, die für Werte von t mit hinreichend kleinem Modul konvergieren, während t in ein-eindeutiger Korrespondenz mit den Punkten des Zweiges steht (A selbst entspricht dem Werte $t = 0$); zudem ist t eine rationale Funktion der x, y (II B 1, Nr. **10**, **11**, **12**, *Osgood*; II B 2, Nr. **2**, **3**, *Wirtinger*).

Sind x_0, y_0 die Koordinaten von A, und ist, was sich stets annehmen lässt, die singuläre Tangente verschieden von $x = x_0$, so leitet man aus der obigen Darstellung her, dass:

$$y - y_0 = (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\Delta}} \left[(x - x_0)^{\frac{1}{\Delta}}\right],$$

wo $[k]$, nach *Halphen*, eine nach ganzen positiven Potenzen von k fortschreitende Reihe bedeutet, mit nicht verschwindendem Anfangsgliede; in jedem Gliede der rechten Seite hat man für $(x - x_0)^{\frac{1}{\Delta}}$ ein und dieselbe, im übrigen nach Belieben ausgewählte Δ^{te} Wurzel zu nehmen. Ferner ist $\alpha \geqq \Delta$; für $y = y_0$ als singuläre Tangente ist $\alpha > \Delta$, und zwar, nach dem Theorem von *Cayley-Halphen*[169]), $\alpha = \Delta + \Delta'$. Die (auf die kleinste Benennung gebrachten) gebrochenen Exponenten der Potenzen von $x - x_0$ haben Δ als kleinsten gemeinsamen Nenner[170]).

---

169) Angedeutet von *Cayley*[167]); bewiesen mittels der analytischen Darstellung der Zweige als Geradenörter von *Halphen*[168]). Vgl. auch *O. Stolz*[176]), p. 441 (nach einer Bemerkung von *Weierstrass*); *M. Noether*, Math. Ann. 9 (1875), p. 166 (bes. p. 182); *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 10 (1876), p. 210; *Halphen*, Étude, p. 544 f.; *Segre*[287]), n. 43.

170) Man hat auch die einfachere Darstellung:

$$x - x_0 = \tau^{\Delta}, \quad y - y_0 = \tau^{\alpha}[\tau],$$

wo τ ein neuer Parameter ist, von hinreichend kleinem Modul, der eindeutig den Punkten des Zweiges entspricht (aber im allgemeinen keine rationale Funk-

Cayley[167]) hat auch die *partiellen* Zweige in Betracht gezogen, die aus der obigen Darstellung des *vollständigen* Zweiges hervorgehen, wenn man einen der Δ Werte $(x - x_0)^{\frac{1}{\Delta}}$ festlegt. Von den Δ Schnittpunkten des vollständigen Zweiges mit einer zu A, aber nicht zu a benachbarten Geraden befindet sich stets je einer auf jedem partiellen Zweige[171]).

Ein vollständiger Zweig, bezogen auf das Gebilde $F = 0$, heisst nach *Weierstrass* „*Element des Gebildes*", nach *Cayley* „*superlinearer Zweig*" (superlinear branch) der Kurve, einfach „*Zweig*" nach *Noether*, endlich „*cyklische Gruppe*" (*groupe circulaire* oder *cycle*) nach *Halphen*.

Eine Methode, die obigen Reihenentwicklungen explizite zu gewinnen, findet sich schon bei *Newton*[172]), und ist verwendet und weiter vertieft von *Cramer*[212]); es kommt darauf an, die Ordnung des ersten Termes jeder Entwicklung zu erkennen; der Koeffizient dieses Termes berechnet sich dann mittels des „*Newton*'schen *Parallelogrammes*"[173]).

V. Puiseux[174]) hat die Methode vervollkommnet, indem er nach-

tion von x, y ist). Er tritt schon bei *Puiseux*[174]) auf, und wird (zugleich mit t) von *Weierstrass* in seinen Vorlesungen verwendet, indessen hat ihn *Riemann*[37]) zuerst betrachtet als unendlich klein von der ersten Ordnung für den Zweig. Besitzt dann ein Punkt des Zweiges vom Ursprunge einen Abstand, unendlichklein von der Ordnung Δ, so bildet seine Tangente mit der singulären einen unendlich kleinen Winkel von der Ordnung Δ'.

171) Anders liegt die Sache, wenn die Gerade Tangente ist: vgl. *Halphen*[168]), art. 2, 3, wo die partiellen Zweige eingehend untersucht werden.

172) Analysis per aequationes numero terminorum infinitas (um 1669), Lond. 1711 = Opuscula 1, p. 3—28; ausführlicher in Methodus fluxionum et serierum infinitarum (1671), ed. *J. Colson*, Lond. 1736 = Opuscula 1, p. 31—199. Vgl. auch den zweiten Brief an *H. Oldenburg* vom 24. Okt. 1676 = Opuscula 1, p. 328—357. *Newton* verdankt man den Begriff der algebraischen Funktion; übrigens dachte er, wie die Mathematiker seiner Zeit, weder an eine Trennung der verschiedenen einem singulären Punkte der Kurve zugehörigen Entwicklungen, noch an imaginäre Zweige der Kurve. Vgl. *Brill-Noether*, Bericht, Abschn. I.

173) l. c., Opuscula 1, p. 41, 351. *De Gua*[4]), p. 24 ff., gebraucht dafür den *triangle algébrique*, auch *Cramer*, p. 54 ff., 155 ff., unter dem Namen des *triangle analytique*.

174) J. de math. (1) 15 (1850), p. 365; 16 (1851), p. 228; deutsch von *H. Fischer*, Halle 1861. — Der Fall eines unendlich grossen y wird von *Puiseux* auf den obigen mittels einer rationalen Transformation von y zurückgeführt: dann treten in den Entwicklungen von y ausser positiven noch negative Potenzen von x auf, aber diese nur in endlicher Anzahl. — Derselbe Begriff und dieselbe Einteilung der Entwicklungen in Klassen findet sich schon, wenn auch nur für den Fall eines unendlich entfernten singulären Punktes, bei *E. F. A. Minding*,

weist, wie sich die Reihenentwicklungen in Klassen (systèmes circulaires) gruppieren, derart, dass zu einer und derselben Klasse Werte von y gehören, die, während x in der *Gauss*'schen Ebene einen kleinen Kreis mit dem Zentrum x_0 beschreibt, sich zyklisch unter einander vertauschen, aber nicht mit denen einer andern Klasse. Ein vollständiger Zweig entspricht einem *Puiseux*'schen zyklischen System von Bestimmungen der algebraischen Funktion y.

M. Hamburger[161]) gelangt zu den gesuchten Entwicklungen vermöge eines allgemeinen analytischen Prozesses, der eine vorangehende Bestimmung der Ordnungen des Unendlichkleinen nicht erfordert. Er verwendet eine Reihe spezieller quadratischer Transformationen (mit zwei benachbarten Fundamentalpunkten) vom Typus $y_1 = \frac{y - y_0}{x - x_0}$;[175]) dass die Reihe der analytischen Operationen abbricht, geht hervor aus der Diskriminante von F, F als Funktion von y aufgefasst. Die Entwicklungskoeffizienten werden berechnet, indem $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$ aus $F(x, y) = 0$ entnommen werden[176]).

Ohne die Existenz einer Entwicklung in einem einfachen Punkte vorauszusetzen, führt *A. Brill*[177]) direkt die Spaltung der — in geeigneter Weise nach dem „*Vorbereitungssatze*" von *Weierstrass*[178]) umgeformten — Funktion $F(x, y)$ in Linearfaktoren von y (Potenzreihen von x).

Ein direktes Verfahren zur Trennung der Entwickelungen von y

J. f. Math. 23 (1841), p. 255. — Über die Methode von *Newton-Puiseux* vgl. I B 1 b, Nr. **10**, *Netto*; II B 2, Nr. **2**, *Wirtinger*, und die dort zitierten Arbeiten; sodann noch, auch wegen der Berechnung der Reihen auf arithmetischer Grundlage, *Hensel-Landsberg* [160]), p. 25 ff., sowie II B 2, *Hensel*, Ergänzungsteil.

175) Über die Anwendung singulärer birationaler (quadratischer und kubischer) Transformationen s. *G. Riess*, Diss. Erlangen 1893.

176) Nicht wesentlich verschieden davon verfährt *Weierstrass* in Vorlesungen seit 1873 (vgl. Werke 4, Kap. 1), und *L. Königsberger*, Vorl. über die Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1874, 1, p. 189 ff.; vgl. auch *O. Biermann*, Theorie der analytischen Funktionen, Leipzig 1887, p. 193 ff. — *Plücker* [12]), p. 155 ff. hatte schon die sukzessiven Differentialgleichungen betrachtet, die sich für die Schnitte der Kurve mit einer Geraden durch A darbieten, und aus der Art und Weise, wie sich die $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... für A ergeben, hatte er die Singularität in A erschlossen, ohne auf Reihenentwicklungen Rücksicht zu nehmen. Vgl. auch *O. Stolz*, Math. Ann. 8 (1874), p. 415.

177) München Ber. 21 (1891), p. 207.

178) Abh. aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, p. 107 = Werke 2, p. 135 (II B 1, Nr. **45**, *Osgood*).

und zur Bestimmung der Koeffizienten hat *L. W. Thomé*[179]) aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen hergeleitet.

14. Anwendungen; Multiplizität des Schnittes. Gegeben seien zwei Kurven f, f_1 der Ordnung n, n_1 mit beliebigen Singularitäten, jedoch ohne gemeinsame Bestandteile; um die Multiplizität eines gemeinsamen Punktes A innerhalb der Anzahl nn_1 (Nr. **2**) ihrer Schnittpunkte zu bestimmen, wähle man etwa den Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ausserhalb dieser Schnittpunkte und ihrer Verbindungsgeraden, und eliminiere sodann x_3 aus $f = 0$, $f_1 = 0$. Die Schnittpunkte beider Kurven werden durch die Linearfaktoren der Resultante R geliefert; als Definition der Multiplizität in A (von der sich zeigen lässt, dass sie unabhängig vom Koordinatensystem ist) wähle man die des entsprechenden Linearfaktors von R.[180]) Haben f, f_1 in A die Multiplizität s, r, so ist die des Schnittpunktes $\geqq sr$, und zwar $> sr$ nur dann, wenn beide Kurven in A irgend eine gemeinsame Tangente besitzen[181]). — *Cayley*[167]), und mit ihm *Halphen* (s. z. B.[168]), Étude, ...) und *H. J. St. Smith*[182]) legen als Definition der Resultante die des

179) J. f. Math. 104 (1888), p. 1; 108 (1891), p. 335; 112 (1893), p. 165; 122 (1900), p. 1 (bes. p. 21—23).

180) Vgl. *O. Stolz*, Math. Ann. 15 (1879), p. 122; *Noether*[197]), p. 315 ff.; *Segre*[25]).

181) Rein rationale Beweise gaben *Noether*[180]); *A. Voss*[284]), p. 533. Den Prozess von *Voss* hat *Segre*[25]) weiter verfolgt, und *L. Berzolari* hat ihn auf die Flächen ausgedehnt, Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 165.

182) Lond. Math. Soc. Proc. 6 (1873/76), p. 153 = Papers 2, p. 101. — Die Multiplizität lässt sich nach *Weierstrass* auch so definieren, dass man in f_1 die (auf f bezüglichen) Entwicklungen von x, y in Potenzreihen des Parameters t (Nr. **13**) einsetzt und die kleinste Potenz von t ermittelt. Diese Definition ist übrigens nur ein besonderer Fall einer allgemeineren von *Weierstrass*, Werke 4, Kap. 2, 6, die dann auch *Halphen* entwickelt hat, Soc. math. de France Bull. 4 (1875), p. 59; Étude, p. 575 ff. Wenn man in einer rationalen Funktion $\varphi(x, y)$, die ausser x, y auch die Ableitungen von y nach x enthalten kann, für y und ihre Ableitungen die auf einen Zweig der gegebenen Kurve f bezüglichen Potenzreihen nach t einsetzt und das Resultat nach wachsenden Potenzen von t ordnet, so ist der Grad des ersten Terms unabhängig von der Auswahl des den Punkten des Zweiges ein-eindeutig entsprechenden Parameters t und heisst *Ordnungszahl* des Zweiges in bezug auf φ. Die Summe der Ordnungszahlen aller Zweige von f in bezug auf φ ist gleich Null; ein Satz, den *Halphen*, l. c., anwendet auf die Untersuchung der Anzahl der Punkte, für die die infinitesimalen Elemente von f einer gegebenen, von der Kurve unabhängigen projektiven Beziehung genügen (d. h. der Punkte, für die eine gegebene Differential-Invariante oder -Kovariante verschwindet). S. auch *Halphen*, J. de math. (3) 2 (1876), p. 257, 371 [Auszug Paris C. R. 81 (1875), p. 1053]; Thèse sur les invariants différentiels, Paris 1878; *R. F. Gwyther*, Lond. Trans. 184 (1893), p. 1171; Lond. R. Soc. Proc. 53

Produktes der Differenzen der Werte von y zu Grunde, die vermöge $f = 0$, $f_1 = 0$ einem und demselben Werte von x entsprechen. Für $A = (x_0, y_0)$ genügen die Bestimmungen der y, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmen: setzt man für die y ihre Entwickelungen nach Potenzen von $x - x_0$ ein, so giebt der kleinste Exponent, mit dem $x - x_0$ im Resultate behaftet ist, die gesuchte Multiplizität an[183].

Die Definition der Schnittpunktmultiplizität lässt sich nach *Halphen*[184] (III C 3, Nr. 2, *Zeuthen*) in eine geometrische Form bringen als die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Segmente, die zwischen den beiden Kurven auf einer Transversalen angeschnitten werden, deren Abstand von A unendlich klein von der ersten Ordnung ist. *Cayley*[167] und mit ihm *Halphen*[185] führen formal auch gebrochene Multiplizitäten ein für die isoliert betrachteten partiellen Zweige: die Multiplizität wird dann sr, vermehrt um die Summe der Ordnungen der Berührung, die alle partiellen Zweige von f mit allen denen von f_1 eingehen[186].

(1893), p. 420; und I B 2, Nr. **20**. Im besondern, für die Differentialgleichung einer C^n, vgl. *Halphen,* Thèse zit.; *J. J. Sylvester,* Paris C. R. 103 (1886), p. 408; Nature 34 (1886), p. 365; Am. J. of math. 9 (1887), p. 345; *M. Philippoff,* Diss. Heidelberg 1892.

Aus den Untersuchungen von *Halphen* geht hervor, dass auf einer C^n der Klasse n' die Anzahl der Punkte, in deren jedem eine Differentialkovariante der 1ten Ordnung verschwindet, *unabhängig von der Kurve,* den Wert $\omega n' + \omega' n$ besitzt, wo ω, ω' lediglich von der Kovariante abhängige Zahlen sind. Diese Formel drückt einen Satz aus, mit dem *G. Fouret*, Soc. math. de France Bull. 2 (1874), p. 72 einen Satz von *M. Chasles*[100] über algebraische ∞^1 Systeme von Kurven ausgedehnt hat, vgl.[102]. Die Formel gilt auch für Differentialkovarianten beliebiger Ordnung, so lange C^n nur lineare Zweige besitzt; andernfalls ist für eine Kovariante Γ der 2ten Ordnung die genaue Formel $\omega n' + \omega' n + \gamma \sum(\Delta - \Delta')$, wo γ den Grad von Γ bez. $\frac{d^2y}{dx^2}$ bedeutet (oder auch die Anzahl der Integralkurven der Differentialgleichung 2ter Ordnung $\Gamma = 0$, die durch einen gegebenen Punkt gehen und daselbst eine gegebene Gerade berühren), und die Summe sich erstreckt auf alle Zweige von C^n, für die $\Delta > \Delta'$. Hinsichtlich der Kovarianten einer Ordnung > 2 vgl.[209].

183) Der Beweis der Äquivalenz beider Definitionen ist durch *Stolz*[180] mittels der charakteristischen Kombinationen (Nr. **16**) geführt worden. Vgl. auch *Smith*[182]; *Halphen,* Étude, p. 637; *Noether*[199].

184) Über diese und andere Formen vgl. *Halphen*[168], art. 1, 4; Soc. math. de France Bull. 1 (1873), p. 133; 2 (1873), p. 35; er macht verschiedene Anwendungen davon, vornehmlich auf die Charakteristikentheorie der Systeme von Kegelschnitten und Flächen 2. Ordnung (III C 3, Abschn. V, VI, *Zeuthen*).

185) S.[168], art. 1; Étude, p. 648. Anwendungen giebt *J. de la Gournerie,* J. de math. (2) 14 (1869), p. 425; 15 (1870), p. 1; Paris C. R. 77 (1873), p. 573.

186) Von diesem Satze ging *Halphen* aus, Soc. math. de France Bull. 3

Noether[169]), [197]) geht nicht auf die Betrachtung der Ordnungen des Unendlichkleinen ein, sondern spaltet die Schnittmultiplizität in Teile, indem er zurückgeht auf die quadratischen Transformationen, die die Singularitäten von f und f_1 in A auflösen (Nr. **12**). Bedeuten $r_i, r_{ik}, \ldots$ für f_1 die analogen Zahlen, wie $s_i, s_{ik}, \ldots$ für f, so ist die Anzahl der in A fallenden Schnittpunkte von f und f_1 gleich rs, vermehrt um die in $A_1', A_2', \ldots$ fallenden der transformierten Kurven f', f_1', daher wenigstens gleich $rs + \sum\limits_i r_i s_i$ (wo einige der r_i, s_i verschwinden können). Diese Zahl wird überschritten, wenn f', f_1' in einem der Punkte A_i' eine gemeinsame Tangente besitzen; dann ist die Anzahl der in A_i' fallenden Schnittpunkte von f', f_1' gleich $r_i s_i + \sum\limits_k r_{ik} s_{ik}$; u. s. f. Treibt man den Prozess so weit, bis eine von zwei homologen Zahlen s, r Null ist, so drückt sich die genaue Schnittmultiptizität von f und f_1 in A aus durch:

$$rs + \sum_i r_i s_i + \sum_{i,k} r_{ik} s_{ik} + \cdots;$$

sie ist gerade dieselbe, als wenn f und f_1 nur gewöhnliche vielfache Punkte von der Multiplizität s, r; s_1, r_1; ... gemein hätten und überdies noch eine gewisse Anzahl einfacher Punkte, alle zu A benachbart und zu je zweien ohne gemeinsame Tangenten.

Hieran knüpft sich ein weiterer Charakter eines singulären Punktes, auf den *C. Segre*[187]) aufmerksam gemacht hat. Bei einigen Fragen genügt es nicht, auf die *Noether*'sche Zusammensetzung des singulären Punktes und auf die Ordnungen der von ihm ausgehenden Kurvenzweige zu achten; sondern bei der Folge von unendlich benachbarten Punkten mit den Multiplizitäten s, s_i, s_{ik}, ... kommt auch die Natur der durch sie laufenden Kurvenzweige zur Geltung. So können z. B. drei benachbarte Punkte von f zwei verschiedene Fälle darbieten, je nachdem durch sie lineare oder nur superlineare Zweige hindurchgehen[188]).

Eine andere Methode zur Bestimmung der Schnittmultiplizität

(1875), p. 76, in der Absicht — nach Massgabe der Formulierung der Frage bei *L. Painvin,* Nouv. Ann. de math. (2) 6 (1867), p. 113; Bull. sci. math. (1), 4 u. 5 (1873), p. 131 und 138 — eine allgemeine Formel zu finden für die Schnittmultiplizität, wennn f und f_1 gegeben wären durch ihre Gleichungen. Über rationale Prozesse s. Nr. **15**, Ende.

187) S. [162]), p. 5—10; [416]).

188) Im zweiten Falle könnten sie also nicht als (unendlich benachbarte) Basispunkte einer quadratischen Transformation genommen werden, vgl. [416]).

in Verbindung mit dem *Noether*'schen Fundamentalsatz (Nr. **23**) und der Schnittpunkttheorie (Nr. **33**) hat *F. S. Macaulay*[188a]) angegeben.

15. Das Geschlecht und die adjungierten Kurven bei beliebig singulären Kurven; Erweiterung der Plücker'schen Formeln. Die *Noether*'sche Auffassung der Singularitäten bietet den Vorteil, dass sich die für Kurven mit nur gewöhnlichen Singularitäten gültigen Begriffe und Sätze in derselben Gestalt auf irgendwie singuläre Kurven (nur ohne vielfache Bestandteile) ausdehnen lassen, sobald man mit den *unmittelbaren* Multiplizitäten auch die *sukzessiven* oder *benachbarten* berücksichtigt.

Für das Geschlecht p einer solchen Kurve f der Ordnung n findet man:

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \tfrac{1}{2}s(s-1), \tag{9}$$

wo sich die Summe erstreckt auf alle — unmittelbaren und benachbarten — Multiplizitäten s von f.[189]) Für eine irreduzible Kurve f ist $p \geqq 0$ (für $p = 0$ entstehen die rationalen Kurven); zerlegt sich dagegen f in a getrennte und irreduzible Teile, so wird $p \geqq 1 - a$ (vgl. Formel (1) in Nr. **2**), oder genauer $p = \sum_i p_i - a + 1$, unter $p_1, p_2, \ldots, p_a$ die Geschlechter der Komponenten verstanden.

Auch die *Zeuthen*'sche Formel (4) für eine algebraische Korrespondenz (x, x') zwischen zwei Kurven mit den Geschlechtern p, p' (Nr. **4**) erweitert sich auf irgendwie singuläre Kurven[190]) wie folgt:

188a) Siehe die in [366]) zitierten Arbeiten von *Macaulay* und *Scott*.

189) *Weierstrass*, Werke 4, Kap. 6; *Noether*, z. B. [49]), p. 501. — In einer rein algebraischen Theorie kann (9) als *Definition* von p gewählt werden (so z. B. bei *Noether* [197]), p. 332): alsdann ergiebt sich, dass p gleich dem Geschlecht der mit nur gewöhnlichen Singularitäten behafteten Kurve ist, die aus f durch quadratische Transformationen hervorgeht, so dass auch für irgendwie singuläre Kurven der Satz von *Riemann* folgt (Nr. **4**).

Bedeutet C die Anzahl der linearen Bedingungen, die einer Kurve aufzuerlegen sind, damit sie in einem gegebenen Punkte eine gegebene Singularität aufweist, E die Erniedrigung, die diese Singularität im Geschlecht der Kurve hervorbringt, und I die Schnittmultiplizität, die in diesem Punkte zwei Kurven mit der gegebenen Singularität besitzen, so rührt von *G. B. Guccia*, Paris C. R. 103 (1886), p. 594 [vgl. auch *M. Noether*, Pal. Rend. 4 (1890), p. 300] die Relation $C = I - E$ her. Sie ist eine unmittelbare Folge aus (9) und aus der Identität $\frac{1}{2}s(s+1) = s^2 - \frac{1}{2}s(s-1)$: *Brill-Noether*, Bericht, p. 385. Sätze ähnlicher Art gab *Guccia*, Paris C. R. 107 (1888), p. 656, 903; Rom. Linc. Rend. (4) 5^1 (1889), p. 18 [vgl. *H. G. Zeuthen*, Pal. Rend. 3 (1889), p. 171]; Pal. Rend. 3 (1889), p. 241.

190) *G. Halphen*, Soc. math. de France Bull. 5 (1876), p. 7; Étude, p. 626. Einen mehr geometrischen Beweis, auf Grund des Satzes $\alpha = \Delta + \Delta'$ (Nr. **13**)

$$(10) \qquad \sum (\nu' - \nu) = 2x(p' - 1) - 2x'(p - 1),$$

die Summe erstreckt auf alle Paare entsprechender Punkte A, A' derart, dass, wenn ein Punkt gegen A (resp. A') auf einem Zweige von f (resp. f') unendlich nahe rückt, sich unter den x' (resp. x) entsprechenden Punkten ν' (resp. ν) befinden, die auf einem und demselben Zweige von f' (resp. f) gegen A' (resp. A) unendlich nahe rücken.

Adjungiert zu f heisst irgend eine Kurve (irreduzibel oder nicht), die in allen s-fachen ($s > 1$), unmittelbaren und benachbarten Punkten von f (wenigstens) die Multiplizität $s - 1$ besitzt[191]. Diese Adjungierten, bei genügend hoher Ordnung, existieren stets und bilden ein lineares System; solche sind z. B. die ersten Polaren, die aber unter den Adjungierten nur projektiv ausgezeichnet sind. Über die Definition von p auf Grundlage der Adjungierten s. Nr. 27.

Die *Noether*'sche Methode für die Schnittmultiplizität kann im besonderen auf die Bestimmung der Klasse n' von f angewendet werden, d. h. (Nr. 2) auf die Schnittpunkte von $f = 0$ mit einer der ersten Polaren $\sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ [192]. Ist $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0$ ein allgemeines Geradenbüschel, so liefert die Elimination der x_i aus dieser und den beiden vorigen Gleichungen eine Resultante $D(\lambda_1, \lambda_2)$ vom

giebt *Zeuthen* [202], n. 5; einen andern, mittels desselben Gedankenganges, wie bei der Definition von p durch lineare Scharen ∞^1 (Nr. 24), *Segre* [287], § 10. — Wiederum einen andern Beweis entnimmt *A. Hurwitz* [379], p. 416, der Formel $2P - 2 = W + n(2p - 2)$, die das Geschlecht P einer n-blättrigen *Riemann*'schen Fläche mit W einfachen Verzweigungspunkten liefert, die über einer gegebenen *Riemann*'schen Fläche vom Geschlecht p ausgebreitet ist. Diese Formel, die für $p = 0$ in die *Riemann*'sche Formel (2) übergeht, leitet *Hurwitz* aus der Betrachtung der endlichen Integrale her; einen Beweis auf Grund der Analysis situs hatte er schon Math. Ann. 39 (1891), p. 53 gegeben. — Ebenfalls mittels Analysis situs beweist und erweitert die Formel (10) *X. Stouff*, Ann. éc. norm. sup. (3) 5 (1888), p. 222, und wendet sie auch bei den *Fuchs*'schen Funktionen an; sowie *de Paolis*, erstes Zitat [158], n. 201.

191) *Brill-Noether* [287], § 7; *Noether* [197], p. 336 ff. — Zur Diskussion der die Adjunktion definierenden Gleichungen s. *Noether*, l. c., §§ 26, 30, 31; [350], n. 9—13; sodann *O. Biermann*, Monatshefte Math. Phys. 10 (1899), p. 373; *J. C. Fields*, Acta math. 26 (1901), p. 157; J. f. Math. 124 (1902), p. 179; 127 (1904), p. 277; *H. Stahl*, Arch. Math. Phys. (3) 6 (1902), p. 177; 7 (1902), p. 15. — Das Verhalten einer Adjungierten in einem singulären Punkte von f untersucht mit Reihenentwickelungen *W. Köstlin*, Diss. Tübingen 1895 = Zeitschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 1.

192) *Noether* [169], [197].

Grade $n(n-1)$ in λ_1, λ_2, die *Noether* in zwei Faktoren D_0 und D_p zerlegt; von diesen hängt der erstere nicht von den p_i ab, sondern allein von den vielfachen Punkten von f, während der letztere keinen von den p_i unabhängigen Linearfaktor enthält. Weiterhin spaltet sich D_0, mittels quadratischer Transformationen, eindeutig in zwei Faktoren, deren einer, der *Doppelfaktor* T^2 von D, im Quadrat auftritt; das Produkt V des andern mit D_p — so dass $D = T^2 V$ — nennt *Noether* den *Verzweigungsfaktor* von D. Einem bestimmten s-fachen Punkt A, dem (gewöhnliche) s_i-, s_{ik}-...-fache Punkte unendlich benachbart sind, entspricht als Grad von T^2:

$$s(s-1) + \sum_i s_i(s_i - 1) + \sum_{i,k} s_{ik}(s_{ik} - 1) + \cdots;$$

andererseits ist der bezügliche Grad des zweiten Faktors von D_0, wenn man mit Δ die Ordnungen der von A ausgehenden superlinearen Zweige bezeichnet, nach *Riemann*[160]) gleich $\sum(\Delta - 1)$. Diese Anzahl (die übereinstimmt mit $s - \varrho$, unter ϱ die Anzahl der von A ausgehenden Zweige verstanden) heisst nach *Noether* die „*Verzweigung*" der singulären Stelle (nach *Smith* der „*Kuspidalindex*" von A), d. i. die Anzahl der daselbst festliegenden einfachen Verzweigungspunkte[193]). Der Grad von T^2 ist die Schnittmultiplizität von f in A mit irgend einer Adjungierten, während die von f mit einer allgemeinen ersten Polare jene Anzahl um die Verzweigung übertrifft[194]).

---

193) Die obige Spaltung hängt zusammen mit der *Kronecker*'schen [160]) der Diskriminante von y in wesentliche und ausserwesentliche Teiler. Der zweite Faktor gehört ganz dem festen Faktor D_0 an, der erste dagegen zum Teil D_0, zum Teil dem beweglichen Faktor D_p. — $\sum s(s-1)$ und $\sum(\Delta - 1) + n'$ sind resp. die Grade des ausserwesentlichen und des wesentlichen Faktors der Diskriminante in bezug auf eine allgemeine erste Polare; beim zweiten sind $\sum(\Delta - 1)$ und n' resp. die Grade seines festen und beweglichen Teilers. — Eine mehr geometrische Bestimmung der Verzweigung findet sich bei *Bertini* [161]), und Ist. Lomb. Rend. 23 (1890), p. 307.

194) Obige Anzahlen ergeben sich auch, wenn man, wie *Cayley* [167]), ausgeht von der Definition der Diskriminante als Produkt der Quadrate der Differenzen der y-Werte, und in diese ihre Reihenentwickelungen nach Potenzen von x einsetzt. Der Grad von D_0 für den Punkt A ergiebt sich so als das Doppelte der Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Segmente, die durch f auf einer Sekante ausgeschnitten werden, deren Abstand von A unendlich klein von der ersten Ordnung ist, und die nicht mit einer der Tangenten in A zusammenfällt: *Halphen* [168]), art. 5; *Zeuthen* [169]). Man kann auch sagen, dass dieser Grad gleich $s(s-1)$ ist, vermehrt um das Doppelte der Summe der Berührungsordnungen aller partiellen von A ausgehenden Zweige, zu je zweien: *Cayley*, l. c.; *Halphen*, Étude, p. 646.

Man hat daher:

$$(11) \qquad n' = n(n-1) - \sum s(s-1) - \sum (\Delta - 1),$$

nebst der dualen Formel:

$$(11') \qquad n = n'(n'-1) - \sum s'(s'-1) - \sum (\Delta' - 1),$$

wo sich die ersten Summen resp. auf alle Punkt- und Tangenten-Multiplizitäten (unmittelbare und benachbarte) s und s' von f erstrecken, die letzteren dagegen auf alle bezüglichen Zweige, die als Punktörter die Ordnung Δ (>1), als Geradenörter die Klasse Δ' (>1) besitzen.

Wendet man sodann das Theorem von *Riemann* an auf die Punktkurve f und das Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten, so folgt aus (9):

$$(12) \qquad n(n-3) - \sum s(s-1) = n'(n'-3) - \sum s'(s'-1).$$

Die Formeln (11), (11′), (12) treten für eine Kurve mit irgendwelchen Singularitäten an die Stelle der gewöhnlichen *Plücker*'schen Formeln (Nr. 8). Bei Einführung des Geschlechts lassen sie sich (vgl. Formeln (8)) [195]) auch so schreiben:

$$(13) \qquad \begin{aligned} 2p-2 &= n(n-3) - \sum s(s-1) = \sum (\Delta - 1) + n' - 2n \\ &= n'(n'-3) - \sum s'(s'-1) = \sum (\Delta' - 1) + n - 2n'. \end{aligned}$$

Hieraus gehen bemerkenswerte Erweiterungen von andern *Plücker*schen Relationen hervor (III C 3, Nr. 3), z. B. (s. (7)):

$$\sum (\Delta - \Delta') = 3(n - n'), \qquad \sum (2\Delta + \Delta' - 3) = 3(n + 2p - 2),$$

wo die erste Summe auf alle solche Zweige der Kurve, für welche $\Delta \gtrless \Delta'$, die zweite auf alle solche, für welche $\Delta\Delta' > 1$, zu erstrecken ist.

Eliminiert man p aus der letzten Formel und aus (9) und bezeichnet mit r' die Anzahl der in einfache Punkte fallenden Wendepunkte, jeden die erforderliche Anzahl von Malen gerechnet (Nr. 7), so kommt:

$$r' = 3n(n-2) - 3\sum s(s-1) - \sum (2\Delta + \Delta' - 3),$$

wo sich die zweite Summe auf die Zweige mit $\Delta > 1$ bezieht.

---

195) Für alle diese Formeln vgl. *Noether* [169]), p. 182. Über den zweiten der Ausdrücke (13) von p — der äquivalent mit (2) ist — und für die auf ihm beruhenden Beweise der Invarianz von p s. *Noether,* l. c., und [49]), p. 499; *Smith* [182]), n. 17; *Halphen,* Paris C. R. 78 (1874), p. 1833; [162]); Ass. Franç. 4e session, Nantes, 1875, p. 237; Soc. math. de France Bull. 4 (1875), p. 29; Étude, p. 624; *Zeuthen* [169]). Vermöge derselben Formel leitet *Thomé* [179]) aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen eine Bestimmung von p her.

Demnach erniedrigt ein singulärer Punkt von f das Geschlecht, die Klasse, und die Anzahl der Wendepunkte resp. um:

$$\tfrac{1}{2}\sum s(s-1),\quad \sum s(s-1)+\sum(\Delta-1),$$
$$3\sum s(s-1)+\sum(2\Delta+\Delta'-3),$$

wo sich die Summen auf die *Noether*'schen Komponenten des vielfachen Punktes und auf die durch ihn gehenden superlinearen Zweige erstrecken[196]).

Eine rein *rationale* Ausführung aller beschriebenen Prozesse (d. h. derart, dass bei beliebig gegebener Gleichung $f=0$ nur die Lösung linearer Gleichungen erfordert wird), insbesondere zur Bestimmung des Geschlechts und der adjungierten Kurven, verdankt man *Noether*[197]).

16. Charakteristische Zahlen eines Zweiges. *Smith* und *Halphen*[198]) haben beobachtet, dass in der Entwickelung von y nach wachsenden Potenzen (mit positiven, gebrochenen Exponenten) von x, die zu einem Zweige mit dem Ursprunge $x=y=0$ und mit der Tangente $y=0$ gehört, lediglich die Exponenten $t, t_1, \dots, t_k$ gewisser in endlicher Anzahl vorhandener Terme — *kritische* bei *Smith*, *charakteristische* bei *Halphen* genannt — in die Definition der auf die

---

196) Z. B. für einen Zweig der Ordnung Δ und der Klasse Δ', wo Δ, Δ' teilerfremd und $\alpha=\Delta+\Delta'$ gesetzt ist, betragen diese Erniedrigungen

$$\tfrac{1}{2}(\Delta-1)(\alpha-1),\quad \alpha(\Delta-1),\quad 3\Delta\alpha-2(\Delta+\alpha),$$

vgl. [166]). — Für einen s-fachen Punkt mit t ($<s$) verschiedenen, $(s+1)$-punktig treffenden Tangenten sind sie $\frac{1}{2}s(s-1)$, s^2-t, $s(3s-1)-2t$.

197) Math. Ann. 23 (1883), p. 311. Vgl. überdies, zu dem Problem der Schnittpunktsmultiplizität, *L. Painvin* [186]); *A. Brill*, München Ber. 18 (1888) p. 81; zu p: *L. Raffy,* Ann. éc. norm. sup. (2) 12 (1883), p. 156; Math. Ann. 23 (1883), p. 527; zu p und den Adjungierten: *M. Tikhomandritzky,* Bull. sci. math. (2) 17^1 (1893), p. 51; Ann. éc. norm. sup. (3) 10 (1893), p. 151, der sich auch mit der rationalen Untersuchung der vielfachen Punkte beschäftigt: Charkow Ber. (2) 2 (1890), p. 114; in arithmetischer Hinsicht (II B Ergänzungsteil 2, *Hensel*) s. *K. Hensel,* J. f. Math. 109 (1892), p. 1 (Auszug Deutsche Math. Ver. Jahresb. 1 (1892), p. 56); Acta math. 18 (1894), p. 247. — Zur praktischen Ermittelung von p und der Adjungierten s. auch *H. F. Baker,* Cambr. Trans. 15^4 (1894), p. 403 (Auszug Math. Ann. 45 (1894), p. 133). — Von den *Noether*'schen Ergebnissen haben *D. Hilbert* und *A. Hurwitz,* Acta math. 14 (1889), p. 217 eine Anwendung gemacht auf die Aufsuchung aller ganzzahligen Lösungen einer Gleichung $f(x_1, x_2, x_3)=0$, wo f eine ganze ganzzahlige homogene Funktion der x ist, und die Kurve $f=0$ das Geschlecht Null besitzt; oder, was dasselbe ist, auf die Aufsuchung aller Punkte dieser Kurve, deren Koordinaten rationale Zahlen sind.

198) *Smith* [182]); *Halphen* [168]), art. 3, 4; J. de math. (3) 2 (1876), p. 87; Étude, p. 636. Vgl. auch *Königsberger* [176]); *Briot* [40]); *Stolz* [180]); *Brill* [177]); *Jordan* [165]), p. 567 ff.

Singularität des Zweiges bezüglichen Zahlen (Erniedrigung des Geschlechtes, der Klasse u. s. w.) eintreten. Es sind das solche, die, auf die kleinste Benennung gebracht, im Nenner einen im Gegensatz zu den Nennern der vorangehenden Exponenten neuen Faktor aufweisen; sie sind invariant gegenüber linearen Transformationen der Ebene. *Halphen* hat sie auf die Form gebracht:

$$t = \frac{s}{q}, \quad t_1 = t + \frac{s_1}{q q_1},$$
$$t_2 = t_1 + \frac{s_2}{q q_1 q_2}, \ldots, t_k = t_{k-1} + \frac{s_k}{q q_1 \ldots q_k},$$

wo s_i, q_i ganze, positive, relativ prime Zahlen sind, und $q q_1 \ldots q_k$ der allen Exponenten gemeinsame Nenner Δ; die t_i nennt er die *charakteristischen Exponenten* und die Brüche $\frac{s_i}{q_i}$ die *charakteristischen Zahlen* des Zweiges.

Setzt man:

$$q = \frac{\Delta}{\Delta_1}, \quad q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \ldots, \quad q_{k-1} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}, \quad q_k = \Delta_k,$$
$$s = \frac{\alpha}{\Delta_1}, \quad s_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta_2}, \ldots, \quad s_{k-1} = \frac{\alpha_{k-1}}{\Delta_k}, \quad s_k = \alpha_k,$$

so verwendet *Smith* die Zahlen $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$, sowie:

$$\gamma = \alpha, \quad \gamma_1 = \alpha + \alpha_1, \ldots, \quad \gamma_k = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k,$$

und nennt die $\frac{\gamma_i}{\Delta}$ (oder t_i) die *kritischen Exponenten.*

Noether[199]) hat diese Zahlen geometrisch aus der Reihe der quadratischen Transformationen erhalten, die den singulären Punkt auflösen; er nennt *charakteristische Kombinationen* der Singularität des Zweiges die Zahlenpaare Δ, α; Δ_1, α_1; ...; Δ_k, α_k.[200])

199) Pal. Rend. 4 (1890), p. 89, 300.

200) Δ ist die Ordnung des Zweiges, α die Multiplizität des Schnittes mit der singulären Tangente; Δ_i erhält man als grössten gemeinsamen Teiler von Δ_{i-1} und α_{i-1}, und man hat $\alpha > \Delta$, $\Delta \geqq \Delta_1$, $\Delta_1 > \Delta_2 > \cdots > \Delta_{k+1} = 1$. Die Entwickelung von y nach Potenzreihen in x nimmt die Form an:

$$y = x^{\frac{\alpha}{\Delta}}\left[x^{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\right] + x^{\frac{\alpha+\alpha_1}{\Delta}}\left[x^{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right] + \cdots + x^{\frac{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_k}{\Delta}}\left[x^{\frac{1}{\Delta}}\right],$$

wo für die Potenzreihen die *Halphen*'sche Bezeichnung (Nr. **13**) gebraucht ist. Kehrt man die Reihe um, so ändern sich die charakteristischen Kombinationen im wesentlichen nicht, denn sie werden α, Δ; Δ_1, α_1; ...; Δ_k, α_k: vgl. *Halphen*, *Stolz* [198]). Stellt man den Zweig als Geradenort dar (Nr. **13**), so gelangt man zu den charakteristischen Kombinationen $\Delta' = \alpha - \Delta$, α; Δ_1, α_1; ...; Δ_k, α_k: *Smith* [182]), n. 18; *Halphen* [168]), art. 4; Étude, p. 642; s. auch *Manchester* [210]).

Nach *Smith* (s. auch *Halphen, Noether*, l. c.) drücken sich die Reduktionen K und Π, die ein Zweig der Kurve f an der Klasse („*Diskriminant-Index*" des Zweiges) und am Geschlecht hervorbringen, mittels der α und Δ so aus:

$$(14)\qquad \begin{cases} K = \alpha(\Delta - 1) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\Delta_i - 1), \\ \Pi = \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\Delta - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\Delta_i - 1), \end{cases}$$

so dass:

$$K = 2\Pi + (\Delta - 1).$$

Es seien $\bar{\Delta}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\Delta}_i$, $\bar{\alpha}_i$, $\bar{K}$, $\bar{\Pi}$ die den obigen Zahlen analogen für einen Zweig einer andern Kurve f_1, mit demselben Ursprunge; besitzt dann der erste Term, in dem sich die Entwickelungen von y für f, f_1 unterscheiden, den Exponenten

$$\frac{\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu}{\Delta} + \varrho\,\frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta} \quad (\varrho > 0),$$

so ist die Schnittmultiplizität S beider Zweige[201]):

$$(15)\qquad S = \alpha\bar{\Delta} + \alpha_1\bar{\Delta}_1 + \cdots + \alpha_\nu\bar{\Delta}_\nu + \varrho\,\Delta_{\nu+1}\overline{\Delta_{\nu+1}}.$$

Gehören beide Zweige derselben Kurve an, und bedeuten K_0 und Π_0 die von ihnen zusammen an der Klasse und dem Geschlecht hervorgebrachten Reduktionen, so ist (*Noether*, l. c.):

$$\Pi_0 = \Pi + \bar{\Pi} + S,$$
$$K_0 = K + \bar{K} + 2S = 2\Pi_0 + (\Delta - 1) + (\bar{\Delta} - 1).$$

17. Formeln von Halphen, Smith, Zeuthen. *Halphen* und *Smith* haben die Existenz von Relationen bemerkt, die nur die *unmittelbaren* (Punkt- und Tangenten)-Multiplizitäten enthalten, deren Anwendung also keinerlei Bestimmung von Ordnungen des Unendlichkleinen (oder irgendeine äquivalente Untersuchung) erfordert. Derart ist schon:

$$(16)\qquad \alpha = \Delta + \Delta',$$

und die Formel (10) von *Zeuthen* (und *Halphen*), die die Ausdehnung des *Riemann*'schen Theorems über die Erhaltung des Geschlechts (Nr. **15**) liefert.

201) *Stolz* [180]); *Smith* [182]), n. 8; *Halphen*, Étude, p. 637; *Noether* [199]). Der Ausdruck für S bestätigt dessen Invarianz bei linearen Transformationen der Ebene.

Einen Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Relationen hat *Zeuthen*[202]) ermittelt, ohne auf die Reihenentwickelungen zu rekurrieren, sondern, bei Ausgang von (16), unter Anwendung von (10) auf geeignete Korrespondenzen.

Sind K' und Π' die zu K und Π dualen Zahlen, so folgen aus (14) die Formeln von *Smith*[203]):

$$(17)\quad \begin{cases} K - K' = \Delta^2 - \Delta'^2, \\ \Pi - \Pi' = \frac{1}{2}\Delta(\Delta - 1) - \frac{1}{2}\Delta'(\Delta' - 1) = \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\Delta - \Delta'). \end{cases}$$

Für zwei Kurven der Ordnung n, $\bar{n}$, resp. Klasse n', $\bar{n}'$, die die *unmittelbaren* Punkt- resp. Tangentenmultiplizitäten s, $\bar{s}$, resp. s', $\bar{s}'$ besitzen, gilt[204]):

$$n\bar{n} - n'\bar{n}' = \sum s\bar{s} - \sum s'\bar{s}'.$$

Für eine einzige Kurve gilt hingegen die *Zeuthen*'sche Formel[205]):

$$n(n-3) - \sum s(s-1) = n'(n'-3) - \sum s'(s'-1),$$

die sich von der *Noether*'schen Formel (12) dadurch unterscheidet,

---

202) Acta math. 1 (1882), p. 171. Von diesen und weiteren Eigenschaften hat *Noether*, Chicago Congr. Math. Papers 1896 (1893), p. 253 nachgewiesen, wie sie sich aus den Begriffen „konsekutiver" und „koinzidierender" Elemente einer Kurve ableiten lassen, indem ein „Kurvenelement" [oder „Element 1ter Ordnung", vgl. [164])] durch einen Punkt eines Zweiges und die bezügliche Tangente gebildet wird. Stellt man einen Punktzweig mit dem Ursprunge $x = 0$, $y = 0$ durch zwei Potenzreihen in t (Nr. **13**) dar, die für $t = 0$ verschwinden, so erhält man (von einander verschiedene) „konsekutive" Punkte, entsprechend den sukzessiven Werten 0, dt, $2dt$, ... von t. Der Begriff „koinzidierender" Punkte bezieht sich auf *verschiedene*, in $x = y = 0$ hineinfallende Punkte, die im übrigen ebensowohl getrennten Zweigen angehören, wie konsekutive Punkte des nämlichen Zweiges sein können: im letzteren Falle liegt ein Punkt *in* der Stelle $x = y = 0$, oder aber er ist dieser Stelle nur benachbart, je nachdem für ihn $\frac{y}{x}$ keinen oder aber einen bestimmten Wert hat.

203) S. [182]), n. 12. Aus der ersten Formel folgt, dass für einen vollständigen Zweig die Summe der Ordnungen von den Berührungen der zu je zwei genommenen partiellen Zweige, als Punktorte betrachtet, und die duale Summe voneinander ebenso abweichen, wie die Hälfte der Ordnung und der Klasse des Zweiges (vgl. *Halphen,* Étude, p. 643). Hingegen [vgl. (15)] für zwei vollständige Zweige (ein und derselben oder zweier verschiedener Kurven) mit demselben Ursprung und derselben Tangente, ist die Summe der Ordnungen von den Berührungen der partiellen Zweige des einen mit denen des andern gleich der dualen Summe; oder, mit andern Worten, die Anzahl der Schnittpunkte zweier Zweige ausserhalb des Ursprunges, aber diesem unendlich benachbart, ist gleich der dualen Anzahl: *Smith,* l. c., n. 13; *Halphen* [168]), art. 4; Étude, p. 643.

204) *Halphen* [168]), art. 1, 4; *Smith,* l. c., n. 13; vgl. *Zeuthen,* l. c., n. 6.

205) l. c., n. 8; vgl. *Halphen,* Étude, p. 647.

dass sich hier die Summen lediglich auf die *unmittelbaren* Multiplizitäten beziehen.

18. Plücker'sche Äquivalente; Erzeugung der Singularität durch Grenzübergang. Die *Plücker*'schen Formeln (Nr. 8) lassen sich auch auf Kurven mit höheren Singularitäten anwenden, sobald man in ihnen jeden singulären Punkt resp. Tangente als *äquivalent* ansieht mit gewissen Anzahlen δ, ε von Doppelpunkten und Spitzen resp. δ', ε' von Doppel- und Wendetangenten[206]). Diese vier Zahlen, die die *„Plücker'schen Aquivalente"* der Singularität (nach *Zeuthen*[169]) die „allgemeinen Werte" der Äquivalente) heissen, sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, da zu ihrer Bestimmung nur die drei *Plücker*'schen Gleichungen vorliegen[207]).

Berücksichtigt man noch die Gleichung für das Geschlecht p, so hat *Cayley*[208]) auf Grund der Reihen bewiesen, dass diese Zahlen völlig bestimmte Werte δ_1, ε_1, δ_1', ε_1' (die *„Prinzipaläquivalente"* nach *Zeuthen*; δ_1, ε_1 *„Nodalindex"* und *„Kuspidalindex"* nach *Smith*) annehmen, mittels deren die allgemeinen Werte den Ausdruck erhalten:

$$\delta = \delta_1 - 3\alpha, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + 2\alpha, \quad \delta' = \delta_1' - 3\alpha, \quad \varepsilon' = \varepsilon_1' + 2\alpha,$$

unter α irgendeine ganze Zahl verstanden, die die rechten Seiten positiv macht.

Die Prinzipaläquivalente sind, für einen Zweig (Δ, Δ'), der die Klasse und Ordnung der Kurve um K, K' erniedrigt, bestimmt durch die Formeln:

$$\varepsilon_1 = \Delta - 1, \quad \varepsilon_1' = \Delta' - 1, \quad 2\delta_1 + 3\varepsilon_1 = K, \quad 2\delta_1' + 3\varepsilon_1' = K'.$$

Zwischen ihnen besteht die *Smith*'sche Relation (l. c., n. 12):

$$\delta_1 - \delta_1' = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1')(\varepsilon_1 + \varepsilon_1' - 1),$$

die aus der ersten Gleichung (17) abgeleitet werden kann. *Zeuthen*[205]) hat ihr die Erweiterung gegeben:

$$\overline{\delta_1} - \overline{\delta_1'} = \tfrac{1}{2}(\overline{\varepsilon_1} - \overline{\varepsilon_1'})(\overline{\varepsilon_1} + \overline{\varepsilon_1'} + 2\gamma - 3),$$

die sich auf γ einander berührende Zweige bezieht, deren Äquivalente $\overline{\varepsilon_1}$, $\overline{\varepsilon_1'}$, $\overline{\delta_1}$, $\overline{\delta_1'}$ sind.

---

206) Dieser Gedanke, wie auch der der Betrachtung einer gegebenen Singularität als Grenze von gewöhnlichen, findet sich schon bei *Plücker* [12]), p. 216 ff.

207) Nichtsdestoweniger treten sie oft in Anwendungen auf, z. B. bei der Untersuchung der Formeln für die Reziprokalfläche, vgl. *Zeuthen*, Math. Ann. 10 (1876), p. 446.

208) S. [167]); Ergänzungen bei *Stolz* [176]), p. 442; *Smith* [182]); *Zeuthen* [169]). S. auch *C. F. E. Björling*, Stockh. Öfvers. 35 (1878), p. 33.

Die *Cayley*'schen Prinzipaläquivalente können eine beliebige Singularität nicht nur in den *Plücker*'schen Formeln darstellen, sondern überall da, wo es sich um birationale Transformationen der Kurve handelt[209]).

A. Brill[210]) hat diese Ergebnisse wesentlich vervollständigt durch den mittels der Reihen geführten Nachweis, dass jede höhere Singularität auf Grund eines systematischen Deformationsprozesses als Grenzfall gewöhnlicher Singularitäten angegeben werden kann. Wird ein Zweig dargestellt durch: $x = t^{\Delta}$, y = Potenzreihe nach t, und bricht man die Reihe bei einer genügend hohen Potenz ab, so erhält man eine rationale Kurve C, die für die in Rede stehende Singularität die gegebene Kurve mit beliebiger Genauigkeit ersetzen kann. Die Koeffizienten dieser parametrischen Darstellung lassen sich so variieren, dass man zu einer andern Kurve gelangt, die mit C Ordnung, Klasse und Geschlecht gemein hat, bei der aber die gegebene Singularität ersetzt ist durch äquivalente gewöhnliche Singularitäten[211]).

---

209) Aber nicht darüber hinaus! Allgemeiner, es giebt Fragen, bei denen singuläre Punkte nicht durch Äquivalente in endlicher Anzahl ersetzt werden dürfen (III C 3, Nr. **3**, *Zeuthen*), und deren Definition unabhängig wäre sowohl von der betrachteten Kurve wie von der speziellen in Rede stehenden Frage. Derart sind die Probleme, die zum Ziel haben, auf einer gegebenen Kurve die Zahl der Punkte zu ermitteln, in denen eine, von der Kurve unabhängige und die Differentiale der Koordinaten enthaltende projektive Relation von höherer Ordnung als der zweiten erfüllt ist: *G. Halphen*, J. de math. (3) 2 (1876), p. 281 ff.: Étude, p. 608; [105]), p. 76; ferner die Probleme, die sich auf Berührungen mit nicht adjungierten Kurven beziehen (Nr. **34**): *W. Weiss*, Prag Deutsche math. Ges. Mitt. 1892, p. 139; Wien Ber. 102 (1893), p. 1025.

210) Math. Ann. 16 (1879), p. 348; Katalog d. math. Ausst. d. deutschen Math.-Ver., München 1892, p. 27. Vgl. auch *J. E. Manchester*, Diss. Tübingen 1899. — Ein anderer Weg, um in bestimmter Weise die gewünschte Deformation der Kurve zu erzielen, wird durch die Reihe der die Singularität auflösenden quadratischen Transformationen geliefert: vgl. *Noether* [169]); sodann *Ch. A. Scott*, Am. J. of math. 14 (1892), p. 301; 15 (1893), p. 221, wo der Prozess durch viele Zeichnungen erläutert wird; *Baker* [197]), der mit dem *Newton*'schen Polygon operiert.

211) Die C ist ein besonderer Fall der von *Brill*, l. c., unter dem Namen „rational-ganze Kurve" untersuchten, von gleicher Ordnung und Klasse, für die sich ebenso die Punktkoordinaten x, y, wie die Linienkoordinaten u, v (so dass $y = ux - v$) ausdrücken lassen als rational-ganze Funktionen eines Parameters t, nämlich in der Gestalt:

$$x = \int \varrho\, dt, \quad u = \int \omega\, dt, \quad y = \int u \varrho\, dt, \quad v = \int x \omega\, dt,$$

wo die Wurzeln von $\varrho(t) = 0$, $\omega(t) = 0$ die Parameter der im Endlichen gelegenen Rückkehr- und Wendepunkte sind. — Die rationale Kurve wird von *Brill*

III. Realitätsfragen und metrische Eigenschaften.

19. Reelle Zweige und Züge einer ebenen algebraischen Kurve[212]). Nach *Plücker* lässt sich eine ebene Kurve f erzeugen durch stetige Bewegung eines Punktes P auf einer Geraden t, während sich gleichzeitig t um P dreht; t ist die Tangente von f in P und dreht sich so ohne Gleitung entlang f. Die beiden Bewegungen von P und f lassen sich resp. auf einen festen Punkt auf der Tangente und auf eine feste Gerade in der Ebene von f beziehen: deren Bewegungssinne wechseln nur in einzelnen singulären Lagen der erzeugenden Elemente, die „*Rückkehrelemente*" heissen. Bezeichnet $+$ den Fall eines rückschreitenden Elementes, und $-$ den entgegengesetzten Fall, so bieten sich bei jedem Paar Pt von f vier mögliche Fälle dar: $--$, $-+$, $+-$, $++$, d. i. der gewöhnliche einfache Punkt, der gewöhnliche Wendepunkt, die gewöhnliche Spitze und die Spitze zweiter Art. Für zwei reziproke Kurven entsprechen sich die Fälle xy und yx, es ist also die Anzahl der Wendepunkte jeder von beiden gleich der Anzahl der (gewöhnlichen) Spitzen der andern[213]).

Für einen reellen Zweig darf seine Darstellung durch Potenzreihen nach einem Parameter t (Nr. **13**) mit reellen Koeffizienten

---

(l. c. § 11) auch noch benützt zur Herstellung von Kurven, die sich in einer gegebenen Singularität adjungiert (Nr. **15**) verhalten.

212) Die ersten Untersuchungen über die Gestalt ebener Kurven rühren von *Newton*[52]) her, der erkannte, wie sich perspektivisch alle C^3 aus fünf fundamentalen Typen (III C 5, spezielle Kurven, *Kohn*) herleiten lassen. Mit der Gestalt einer Kurve in der Nachbarschaft eines singulären (im Endlichen oder Unendlichen gelegenen) Punktes hat sich, unter Erläuterung durch viele Beispiele und Zeichnungen, *Cramer*[4]) beschäftigt, der *Newton*'s Verfahren der Reihenentwickelungen [s. [172]) und [173])] (chap. 7, 8 und p. 517 ff.) anwendet, manchmal auch (p. 33—37, 288, 616, 626, 636, 638) besondere (rationale und nichtrationale) Transformationen, um die verschiedenen Zweige zu trennen, oder um die Konstruktion der ganzen Kurve zu vereinfachen. — Die Analogie zwischen den Zweigen im Unendlichen und den singulären Punkten im Endlichen war schon von *De Gua*[4]), p. 148, 194 bemerkt und mit den Mitteln der Perspektive behandelt worden.

213) Diese Betrachtungen sind von *Plücker*[12]), p. 200 ff., und finden sich auch bei *v. Staudt*, Geom. d. Lage (Nürnberg 1847, ital. von *M. Pieri*, Torino 1888), n. 197—204, der die Bezeichnungen $+-$ übernommen hat, und durch weitere Sätze der obigen Theorie einer ebenen Kurve [vgl. *A. Kneser*, Math. Ann. 34 (1888), p. 205] eine grössere Bestimmtheit verliehen hat; in n. 205—212 giebt er die Ausdehnung auf Raumkurven. Vgl. auch *Chr. Wiener*, Lehrb. d. darstell. Geom., Leipzig 1 (1884), p. 204, 214, mit vielen Abbildungen. — Analytische Kriterien liefert *A. Meder*, J. f. Math. 116 (1895), p. 50, 247 (bes. § 7).

vorausgesetzt werden derart, dass die reellen Punkte des Zweiges reellen Werten von t entsprechen. Der Ursprung A $(t=0)$ teilt den reellen Zweig in zwei Teile, je nachdem t positiv resp. negativ ist. Bedeuten wiederum Δ, Δ' Ordnung und Klasse des Zweiges, so durchsetzt für ungerades Δ eine allgemeine Gerade durch A den Zweig, und falls auch Δ' ungerade, so lässt allein die Tangente den Zweig nur auf der einen Seite, während er bei geradem Δ' auch von der Tangente durchsetzt wird. Ist dagegen Δ gerade, so hat eine allgemeine Gerade durch A den Zweig ganz auf der einen Seite; bei ungeradem Δ' durchsetzt allein die Tangente den Zweig, während bei geradem Δ' auch die Tangente den Zweig nur auf der einen Seite hat. In den vier Fällen ist die Gestalt des Zweiges resp. die eines gdwöhnlichen einfachen Punktes, eines Wendepunktes, eine Spitze erster, zweiter Art[214]). Hierzu vergleiche auch III D 1, 2, Nr. **19**, *von Mangoldt.*

214) *Plücker* [213]), der zuerst zum Begriffe der Ordnung und Klasse eines (reellen) Zweiges gelangte, indem er ihn als Grenze eines polygonalen Zuges auffasste, und die Anzahlen der aufeinanderfolgenden Sinnesänderungen in dessen Seiten und Winkeln beachtete. — Eine bestimmtere Vorstellung von den verschiedenen Gestalten der Zweige erhält man durch Vergleichung der letzteren und durch Beachtung der Innigkeit ihrer Berührung mit der Tangente. Vergleicht man z. B. die Krümmung eines Zweiges mit der eines Kreises, so ergiebt sich, dass, je nachdem $\Delta' > \Delta$ oder $\Delta > \Delta'$, der Zweig schwächer oder stärker gekrümmt ist, als *irgendein* berührender Kreis; hingegen existiert für $\Delta = \Delta'$ ein bestimmter Kreis (der oskulierende), der mit dem Zweige eine innigere Berührung eingeht als jeder andere und im allgemeinen den Zweig in A durchsetzt. Vgl. *Stolz* [176]), p. 433; *Smith* [182]), n. 14, 15, 16. Hinsichtlich der Krümmung (III D 1, 2, Nr. **14**, **17**, *von Mangoldt*) s. auch [248]), [257]), sowie *Mac Laurin* [247]); *Plücker* [255]), Anm. zu p. 159; J. f. Math. 6 (1830), p. 210; 9 (1832), p. 411 = Abh. 1, p. 220; *O. Hesse,* J. f. Math. 28 (1844), p. 97; 38 (1847), p. 241 = Werke, p. 123, 192; *P. Breton (de Champ),* Nouv. Ann. de math. (1) 13 (1854), p. 127; *de la Gournerie* [185]); *L. Painvin,* Ann. di mat. (2) 4 (1869), p. 215; Bull. sci. math. (1) 3 (1872), p. 174; *S. Gundelfinger,* Vorl. a. d. anal. Geom. der Kegelschnitte, her. von *F. Dingeldey,* Leipzig 1895, § 21; *Segre* [11]). Die Krümmung der Polaren haben untersucht *T. Moutard,* Nouv. Ann. de math. (1) 19 (1860), p. 195, 431; *C. Servais*, Brux. Bull. (3) 21 (1891), p. 362; *M. Stuyvaert,* Brux. Mém. cour. 55 (1898), Nr. 6; die Krümmungsverhältnisse eines Büschels in einem Basispunkte *Em. Weyr*, Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 486. Sätze über die Krümmung in Verbindung mit der Hessiana bei *„Clebsch-Lindemann"*, Anm. zu p. 325; *R. Mehmke,* Böklen mat.-nat. Mitt. 2 (1887), p. 101. — Über die Gestalt der reellen Zweige, die aus den die Singularität auflösenden quadratischen Transformationen hervorgeht, s. *Scott* [210]). — Es sei noch bemerkt, dass man hinsichtlich der Gestalt einer ebenen Kurve in der Nähe eines einfachen Punktes auch (bez. der infinitesimalen Elemente 3ter Ordnung) die *Abweichungskegelschnitte* heranziehen kann [277]); *Ch. Dupin,* Paris C. R. 25 (1847), p. 689, 769; 26 (1848), p. 321, 393 hat hierfür noch eine andere Figur vorgeschlagen, die er „geometrischen Telegraph" nennt.

Nach *v. Staudt*[215]) kann ein geschlossener Kurvenzug[216]) von zweierlei Art sein, ein *paarer* oder ein *unpaarer*, je nachdem er von einer willkürlichen Geraden der Ebene in einer geraden oder ungeraden Anzahl von Punkten getroffen wird. Zwei Züge schneiden sich in einer geraden oder ungeraden Anzahl von Punkten, je nachdem wenigstens einer der beiden Züge ein paarer ist, oder aber beide unpaar. Ein paarer Zug ohne vielfache Punkte teilt die Ebene in zwei Gebiete, von denen das eine („*äussere*") unpaare Züge enthalten kann, das andere („*innere*") nicht[217]). Ein Zug hat eine gerade oder ungerade Anzahl von Wendepunkten, je nachdem er paar oder unpaar ist[218]).

Zu denselben Ergebnissen gelangte gleichzeitig *Möbius*[219]) bei

---

215) S. [213]), § 12, wo auch die analogen Unterscheidungen für geschlossene Raumkurven und Flächen getroffen werden, in n. 15—17 für die vollständigen und geschlossenen Kegelflächen.

216) *Branche complète* nach *Zeuthen*[227]), *vollständiger Zug* nach *Harnack*[223]), *circuit* nach *Cayley*, vgl. Litteratur = Papers 11, p. 480. Ein solcher Zug (Teil einer ebenen Kurve, der sich stetig von einem Punkt durchlaufen lässt, der nach im allgemeinen nur einmaliger Durchlaufung eines jeden Punktes des Zuges zur Ausgangslage zurückkehrt) kann sich im Endlichen auch in verschiedene Äste spalten (wie bei der Hyperbel). Allen diesen Untersuchungen liegt der Gesichtspunkt der projektiven Geometrie zugrunde, so dass das Dualitätsprinzip stets anwendbar ist und das Unendlichferne nur als specieller Fall erscheint. — Einen Satz über die Begegnungen zweier Punkte, die sich auf einer sich selbst nicht schneidenden geschlossenen Bahn bewegen, der sich auf jeden sich selbst nicht schneidenden Zug einer algebraischen Kurve anwenden lässt, giebt *E. Kötter*, Diss. Berlin 1884, p. 7, und wendet ihn an auf die Untersuchung von Realitätseigenschaften der Punkte, in denen eine gegebene C^3 eine C^n $3n$-punktig berührt.

217) Einfache Beweise, ohne aus der Ebene herauszugehen, liefert *Zeuthen*[227]). Vgl. auch *Jordan*[165]), p. 90 ff. — *Ch. A. Scott*, Am. Math. Soc. Trans. 3 (1902), p. 388 nennt *Ordnung* und *Index* eines Zuges die grösste resp. kleinste Anzahl von Punkten, in denen er von einer Geraden getroffen werden kann, und beweist mittels *Cremona*-Transformationen, dass für jedes n C^n vom Geschlecht $p=0$ und $p=1$ existieren, die aus einem einzigen Zuge vom Index $n-2r$ gebildet sind, wo r jeden ganzen positiven Wert von 1 bis $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, annehmen kann.

218) *v. Staudt*[213]), n. 203. — *Möbius*, Leipz. Abh. 1 (1852), p. 1 = Werke 2 (1886), her. von *F. Klein*, p. 91 (§§ 10, 17) hat überdies bemerkt, dass ein unpaarer, von Knoten und Spitzen freier Zug mindestens drei Wendepunkte besitzt, und auch nicht mehr, falls er von keiner Geraden in mehr als drei Punkten geschnitten wird; andere Beweise bei *A. Kneser*, Math. Ann. 41 (1891), p. 349 (bes. p. 368). — Über die Lage der reellen Wendepunkte auf einer C^n s. *Ch. A. Scott*, Am. Math. Soc. Trans. 3 (1902), p. 399.

219) S. [218]). Andere Eigenschaften, betreffend die Gestalt der von singulären Punkten freien sphärischen Kurven, in Leipz. Ber. 1848, p. 179 = Werke 2,

Abbildung der projektiven Geometrie der Ebene auf die Geometrie der Kugel vermöge Projektion der Ebene auf die Kugel von deren Zentrum aus[220]). Der Trennung der Züge in paare und unpaare entspricht dann die der geschlossenen sphärischen Kurven in Zwillingskurven und Doppelkurven, je nachdem sie von ihrer Gegenkurve verschieden sind oder nicht (im ersteren Fall ist die Zwillingskurve die Gesamtheit beider Gegenkurven).

A. Kneser[221]) hat die vorstehenden Untersuchungen auf synthetischem Wege verfolgt und ausgedehnt, indem er für Bogen, die entweder frei von Singularitäten oder aber mit Doppelpunkten, Doppel- und Wendetangenten behaftet sind, die Zahl der Schnittpunkte mit einer Geraden der Ebene resp. die der von einem Punkte ausgehenden Tangenten bestimmte[222]).

---

p. 185. — Die Untersuchungen von *Möbius*, die mit 1846 beginnen, waren schon anfangs 1848 abgeschlossen: vgl. l. c., p. 12 = Werke 2, p. 179, und Werke 4, p. 721—22.

220) Dadurch wird zwischen der Ebene und der Kugel eine (1, 2)-Korrespondenz hergestellt, was darauf hinauskommt, dass man sich die Ebene der projektiven Geometrie doppelt denkt und die beiden Blätter derselben längs irgendeiner Geraden (z. B. der unendlichen) verbindet: eine von *F. Klein* wiederholt benutzte, von *L. Schläfli* angeregte Auffassung, z. B. Math. Ann. 7 (1874). p. 549; vgl. auch [160]), 1, p. 198.

221) S. [213]) und bes. [218]). Vgl. auch Math. Ann. 31 (1887), p. 507, wo die gegenseitige Lage benachbarter Krümmungskreise irgendeiner ebenen Kurve (im besonderen die Anzahl der reellen unter ihnen, die durch einen gegebenen Punkt laufen) untersucht wird. Die Methode besteht in der stereographischen Projektion der Ebene auf eine Kugel und der Anwendung der zuvor für die sphärischen Kurven erhaltenen Ergebnisse; in der That sind die Bilder der Oskulationskreise die Schnitte der Kugel mit den Schmiegungsebenen der sphärischen Bildkurve. Ähnlich werden, mittels der Projektion eines einschaligen Hyperboloides von einem seiner Punkte aus auf die Ebene, aus den Eigenschaften der Schmiegungsebenen einer auf der Fläche gezogenen Kurve die des Systems von Kegelschnitten abgeleitet, die durch zwei reelle feste Punkte gehen und eine gegebene Kurve oskulieren.

222) Vgl. auch *E. Czuber*, Monatshefte Math. Phys. 3 (1892), p. 337. — Unter den *Kneser*'schen Sätzen sei der folgende von ihm durch Kontinuitätsprozesse gewonnene erwähnt: „Bestehen die Singularitäten eines paaren Zuges nur aus $2w$ Wendepunkten und δ Doppeltangenten, so gilt die Kongruenz $\delta \equiv w$ (mod. 2); auch für einen unpaaren Zug mit nur $2w + 3$ Wendepunkten und δ Doppeltangenten". — Die reellen im Endlichen liegenden geschlossenen Kurven und Flächen, die mit jeder sie durchsetzenden Geraden zwei und nur zwei Punkte gemein haben („Ovale" und „Eiflächen"), hat *H. Brunn* studiert, Diss. München 1887; desgl. die reellen ebenen Kurven, an die sich von jedem unendlichfernen Punkte eine feste Zahl N von Tangenten legen lassen (für $N = 2$ die Ovale), Habilit.-Schr. München 1889; vgl. auch München Ber. 24 (1894), p. 93; sodann

Auf Grund von Kontinuitätsbetrachtungen hat *A. Harnack* [223]) gezeigt, dass eine reelle (d. h. eine durch eine Gleichung mit reellen Koeffizienten dargestellte) algebraische Kurve vom Geschlecht p (mag sie im übrigen beliebige Singularitäten aufweisen) nicht mehr als $p+1$ reelle Züge besitzen kann; überdies [224]), dass für jedes Geschlecht p wirklich Kurven mit $p+1$ Zügen existieren. Die gegenseitigen Lagen, die in diesem Falle die $p+1$ Züge einnehmen können, sind noch wenig untersucht worden; für Kurven C^n ohne vielfache Punkte hat *D. Hilbert* [225]) gefunden, dass bei geradem n von solchen Zügen (die alsdann alle paar sind) höchstens $\frac{n-2}{2}$ ineinander eingeschachtelt sein können, d. h. so, dass der erste völlig innerhalb des zweiten liegt, der zweite innerhalb des dritten u. s. f., während bei ungeradem n einer der Züge unpaar ist, und von den übrigen (sämtlich paaren) höchstens $\frac{n-3}{2}$ dieselbe Einschachtelung aufweisen. Kurven mit solchen Maximalzahlen von ineinander geschachtelten Zügen existieren immer, während die noch verbleibenden Züge alle voneinander getrennt verlaufen.

Für eine reelle algebraische Kurve der Ordnung n und Klasse k, mit w' reellen Wendungen, t'' reellen aber isolierten Doppeltangenten (d. i. deren Berührungspunkte konjugiert imaginär sind), r' reellen Spitzen, und d'' reellen aber isolierten (d. i. mit konjugiert imaginären Tangenten versehenen) Doppelpunkten hat *F. Klein* [226]), in Verall-

---

H. Minkowski, Geom. der Zahlen, Leipz. 1896, p. 236 ff. — *C. Juel*, Kjöbenh. Skrift. 1899, p. 1 untersucht die geschlossenen (algebraischen oder nicht algebraischen) Kurven, von denen man nur weiss, dass sie von einer Geraden höchstens in einer gegebenen Anzahl von Punkten getroffen werden (die er Ordnung der Kurve nennt), insbesondere die der 2ten, 3ten, 4ten Ordnung. Er benützt die Tatsache, dass in bestimmten Fällen eine reelle Korrespondenz (m, n) immer $m+n$ reelle Koinzidenzen hat.

223) Math. Ann. 10 (1876), p. 189. Einige Beobachtungen über den „Realitätsgrad" einer algebraischen reellen Kurve stellt *P. Appell* an, Arch. Math. Phys. (3) 4 (1902), p. 20; von einer Gleichung mit einer Unbekannten vom Grade n und mit reellen Koeffizienten sagt er, sie besitze die Realität $n-2i$ bei $n-2i$ reellen Wurzeln; es handelt sich dann um die Ausdehnung dieses Begriffes auf Kurven.

224) Dies giebt schon *F. Schottky* an, Diss. Berlin 1875 = J. f. Math. 83 (1877), p. 300 (bes. p. 314).

225) Math. Ann. 38 (1890), p. 115 (mit Ausdehnungen auf Raumkurven). Andere Beweise bei *L. S. Hulburt,* Am. Math. Soc. Bull. 1 (1892), p. 197; mit Ausdehnungen auf C^n mit höchstens n Doppelpunkten, Am. J. of Math. 14 (1892), p. 246. — Nach *Hilbert,* l. c., Anm. zu p. 118, können z. B. die elf Züge einer C^6 keinesfalls sämtlich ausserhalb und voneinander getrennt verlaufen.

226) Math. Ann. 10 (1876), p. 199 (= Erlanger Ber. 1875). Vgl. auch

gemeinerung von *Zeuthen*'schen Sätzen[227]) über reelle Doppeltangenten einer C^4, auf Grund von kontinuierlichen Gestaltsänderungen[228]) der Kurve, die Relation abgeleitet:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''\ ^{229)}.$$

Das algebraische Fundament derselben erkannte *A. Brill*[230]) in der Zerfällbarkeit der Diskriminante der Doppelpunkts- und Doppeltangentengleichung einer „rational-ganzen" Kurve [vgl. [211])][231]). Es ergiebt sich weiter, dass, wenn r', w' d', t' die Anzahlen der reellen Rückkehr- und Wendepunkte, isolierten Doppelpunkte und Doppel-

---

R. Perrin, Soc. math. de France Bull. 6 (1877), p. 84; *C. Juel*[6]); *Klein*[143]), letztes Zitat, p. 371 ff. — Eine Reihe weiterer Realitätsrelationen stellt *W. F. Meyer* auf, Monatshefte Math. Phys. 4 (1893), p. 354. — Die *Klein*'sche Relation hat *F. Schuh* auf Kurven mit höheren Singularitäten ausgedehnt: Amsterdam Wet. Versl. (2) 12 (1904), p. 845; vgl. auch *Juel,* zweites Zitat[6]), p. 85.

227) Math. Ann. 7 (1873), p. 410. Vgl. auch Paris C. R. 77 (1873), p. 270; Tidsskr. f. Math. (3) 3 (1873), p. 97.

228) Über die stetige Deformation der durch Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten definierten Kurven, Flächen u. s. w. und über die Zerlegung ihrer Singularitäten höherer Ordnung vgl. *D. J. Korteweg,* Math. Ann. 41 (1891), p. 286. — Hier sind auch die zahlreichen Arbeiten von *J. B. Listing, P. G. Tait, T. P. Kirkman, C. N. Little, O. Simony, H. Brunn* u. a. aus dem Gebiet der Topologie (III A, *Heegaard* und *Dehn*) zu erwähnen. Über deren Zusammenhang mit *Kronecker*'s Charakteristik eines Funktionensystems (I B 3a, Nr. 7, *Runge*), sowie hinsichtlich der Litteratur, vgl. *W. Dyck,* Math. Ann. 32 (1888), p. 457 [Auszug Leipz. Ber. 37 (1885), p. 314; 38 (1886), p. 53; 39 (1887), p. 40]. Die topologische *Tait*'sche Theorie der Knoten hat *W. Fr. Meyer,* Diss. München 1878 verwendet zur Untersuchung der Gestalten der ebenen algebraischen Kurven mit Knoten, bes. der rationalen C^4 und C^5; eine algebraische Begründung und Ergänzung dieser Ergebnisse liefert er in Edinb. R. Soc. Proc. 13 (1886), p. 931. — Einen Existenzhilfssatz über reelle ebene algebraische Kurven stellt *D. Hilbert* auf, Acta math. 17 (1892), p. 169, bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über ternäre *definite* Formen. — Über algebraische Kurven, die sich beliebig eng an gegebene Kurvenpolygone anschliessen, vgl. *O. Herrmann,* Städt. Realgymn. Leipzig, Jahresber. 1897.

229) Vereinigt man eine *komplexe* Kurve (d. i. eine, die zwar in einer reellen Ebene liegt, aber deren Gleichung komplexe Koeffizienten besitzt) von der Ordnung n, der Klasse k, mit δ reellen isolierten Punkten und τ reellen isolierten Tangenten, mit ihrer komplex-konjugierten, so resultiert eine Kurve der Ordnung $2n$, der Klasse $2k$, die ausser δ isolierten Doppelpunkten und τ isolierten Doppeltangenten im allgemeinen keine weiteren reellen Elemente aufweist. Die *Klein*'sche Formel giebt dann die Relation $n + \tau = k + \delta$.

230) Math. Ann. 16 (1879), p. 388.

231) Diese Zerspaltung hat *W. F. Meyer* ausgedehnt auf beliebige rationale ebene Kurven, Math. Ann. 38 (1890), p. 369 (Auszug Gött. Nachr. 1888, p. 73); weiterhin auf beliebige (insbesondere rationale) Raumkurven, Monatshefte Math. Phys. 4 (1893), p. 354 (I B 2, Nr. **25**, *Meyer*).

tangenten sind, die bei der Auflösung irgendeiner Singularität in äquivalente elementare Singularitäten (Nr. **18**) auftreten, die Zahl $r' - w' + 2(d' - t')$ bei jeder Auflösungsart einen und denselben Wert (positiv, negativ oder Null) behält [232]).

20. Klein-Riemann'sche Flächen. Beim Studium einer algebraischen Funktion y von x bedient man sich zweier anschauungsmässiger Hilfsmittel, einmal der gewöhnlichen analytischen Geometrie, die x, y als Cartesische Koordinaten eines Punktes der Ebene auffasst, sodann der Funktionentheorie, die die komplexe Variable x als reellen Punkt einer reellen Ebene deutet; das Bild der Funktion ist im ersten Falle die ebene algebraische Kurve, im zweiten die über der x-Ebene konstruierte *Riemann*'sche Fläche (Nr. **1**). Zwischen beiden Anschauungsbildern hat *Klein* [233]) einen Übergang geschaffen durch Einführung einer neuen Art *Riemann*'scher Flächen. Betrachtet man die algebraische Kurve f als Klassenkurve, so lasse man einer jeden Tangente einen bestimmten reellen Punkt von ihr entsprechen, nämlich, bei imaginärer Tangente, ihren einzigen reellen Punkt (den Schnittpunkt mit der konjugiert-imaginären), und (folglich) bei reeller Tangente ihren Berührungspunkt. Die ∞^2 reellen, so hervorgehenden Punkte bilden eine geschlossene Fläche F, die die verschiedenen Gebiete der Ebene mit einer Anzahl von Blättern bedeckt, gleich der Anzahl der imaginären Tangenten, die von irgendeinem Punkte des fraglichen Gebietes an die Kurve gehen [234]). Längs der etwaigen reellen Züge hängen jedesmal zwei der Blätter zusammen.

232) Diese von *Brill* „Realitätsindex der betrachteten Singularität" genannte Anzahl spielt für die *Klein*'sche Formel dieselbe Rolle, wie die Äquivalenzzahlen für die *Plücker*'schen Formeln. — *Plücker* [54]), p. 266 und [12]), p. 208 hatte schon aus der C^3 erschlossen, dass die sechs von einem Doppelpunkte absorbierten Wendepunkte alle imaginär sind, falls dieser isoliert ist, während andernfalls nur zwei reell sind; desgleichen, dass von den acht durch eine reelle Spitze absorbierten Wendepunkten zwei reell sind. Einen Beweis mittels Lagenbetrachtungen gab *Möbius* [218]).

233) Math. Ann. 7 (1874), p. 558 (vorher zwei Noten in Erl. Ber. 1874); 10 (1876), p. 398; [160]), 1, p. 208 ff. — In Math. Ann. 9 (1875), p. 476 entwickelt *Klein* das enge Band zwischen der neuen Art *Riemann*'scher Flächen („projektiver Flächen") und der *v. Staudt*'schen Theorie des Imaginären. — Eine andere Konstruktion, die sich schon bei *Juel,* Diss. Kopenh. 1884 findet [vgl. auch Math. Ann. 47 (1895), p. 72], giebt *Klein* [160]), 1, p. 220 ff., indem er jedem imaginären Kurvenpunkt den reellen Punkt der ihn mit einem der Kreispunkte verbindenden Geraden zuordnet. Die so erhaltenen Flächen („metrische Flächen") haben ihre Verzweigungspunkte in den Brennpunkten (Nr. **21**) der Kurve; sie wurden von *F. H. Loud,* Ann. of Math. 8 (1893), p. 29 untersucht.

234) Ist z. B. die Kurve eine Ellipse, so erfüllen diese Punkte deren Inneres

Die Fläche F, die ein vollständiges Bild der durch die Kurve f definierten algebraischen Funktion darstellt, ist auf die gewöhnliche *Riemann*'sche Fläche im allgemeinen eindeutig bezogen; indessen existieren auf der letzteren, entsprechend den reellen isolierten Doppeltangenten und den reellen Wendetangenten von f, Fundamentalpunkte, deren Bilder auf F ganze Linien sind [235]).

Klein hat (unter Annahme einer Kurve mit nur einfachen Singularitäten) die Anordnung und Verzweigung der Blätter bestimmt. Wenn f reell ist — so dass jeder Teil der Ebene mit einer geraden (inkl. 0) Anzahl von Blättern bedeckt ist, die sich zu je zweien derart zusammenordnen, dass die Punkte der einen die konjugiert imaginären Werte zu denen der Punkte der andern repräsentieren — so entstehen Verzweigungspunkte [236]) nur durch die isolierten Doppelpunkte von f und durch die reellen Schnittpunkte zweier konjugiert imaginärer Wendetangenten. Ist f vom Geschlechte p und besitzt w' reelle Wendetangenten und t'' isolierte Doppeltangenten, so wird der Zusammenhang von F gleich $2p + w' + 2t''$, wie sich entweder aus der Beziehung von F zur gewöhnlichen *Riemann*'schen Fläche (vom Zusammenhange $2p$) ergiebt, oder auch direkt aus der Gestalt der Klassenkurve. *Klein* hat auch die Bedeutung der reellen Züge der (reellen) Kurve für die zugehörige *Riemann*'sche Fläche dargelegt und die Kurven in zwei Arten getrennt, die *orthosymmetrischen* und die *diasymmetrischen*, je nachdem die *Riemann*'sche Fläche, längs aller Züge aufgeschnitten, zerfällt oder nicht [237]).

doppelt, so dass F die Gestalt eines ellipsoidischen Doppelblattes annimmt, mit der Ellipse als scheinbarer Kontur. *Klein* behandelt auch die Kurve 3[ter] Klasse und einige Beispiele von Kurven 4[ter] Klasse. Bez. der ersteren s. auch *A. Harnack*, Diss. Erlangen 1874 = Math. Ann. 9 (1874), p. 1; mit der speziellen Kurve 4[ter] Klasse $u_1{}^3 u_2 + u_2{}^3 u_3 + u_3{}^3 u_1 = 0$, die in enger Beziehung zu der Theorie der Modulfunktionen 7[ter] Stufe steht (II B 4, *Fricke*) [und bes. studiert wurde bei *F. Klein*, Math. Ann. 14 (1878), p. 428; 15 (1879), p. 251; *P. Gordan*, Math. Ann. 17 (1880), p. 217, 359; 20 (1882), p. 487, 515; *F. Brioschi*, Rom Lincei Trans. (3) 8 (1884), p. 164 = Opere 3, p. 399; *F. Klein* und *R. Fricke*, Vorl. über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen 1, Leipzig 1890, p. 369—385 und 692—762; *E. Ciani*, Pal. Rend. 14 (1899), p. 16], beschäftigt sich *M. W. Haskell*, Diss. Göttingen 1889 = Am. J. of Math. 13 (1890), p. 1. — Erweiterungen bei *P. del Pezzo*, Pal. Rend. 6 (1892), p. 115.

235) Hieraus lässt sich die eindeutige Korrespondenz herleiten, indem man F längs jener Tangenten zerschneidet: *F. Klein*, l. c., Math. Ann. 10 (1876), p. 399 und [160]), 1, p. 213.

236) Eigentlich „Doppelverzweigungspunkte", in denen sich sowohl zwei obere als zwei untere Blätter der *Riemann*'schen Fläche miteinander verzweigen. Bei einer reellen Kurve können nur solche Doppelverzweigungspunkte auftreten.

237) Seine neuen *Riemann*'schen Flächen hat *Klein* angewendet auf die

Zu weiteren Ergebnissen ist *Klein*[238]) auf Grund der allgemeinen *Riemann*'schen Theorie (II B 2, Nr. **54**, *Wirtinger*) gelangt. Eine konforme Abbildung einer Fläche auf sich selbst ist von der ersten oder zweiten „Art", je nachdem sie die Winkel nicht umlegt oder aber umlegt; man nennt *symmetrisch* solche Flächen, die eine konforme Abbildung zweiter Art, mit der Periode zwei (die also, zweimal angewandt, zur Identität führt), auf sich zulassen. Es ist ein fundamentaler Satz[239]), dass den reellen algebraischen Kurven symmetrische *Riemann*'sche Flächen zugehören und dass umgekehrt unter den unendlich vielen algebraischen Kurven, die einer solchen Fläche entsprechen, sich immer reelle befinden. Die „Symmetrielinien" der Fläche, d. h. solche Kurven, deren Punkte bei der genannten symmetrischen Abbildung ungeändert bleiben, entsprechen genau den reellen Zügen der reellen Kurve. Hierauf beruht die Scheidung der symmetrischen Flächen und der entsprechenden reellen Kurven in $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten (die auch wirklich existieren), je nach der Zahl und Art solcher Symmetrielinien. Es giebt resp. $p+1$ und $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ Arten diasymmetrischer und orthosymmetrischer Flächen (Kurven) mit resp. $0, 1, \ldots, p$ und $p+1, p-1, p-3, \ldots$ Symmetrielinien (reellen Zügen): längs aller Symmetrielinien aufgeschnitten, bilden die ersteren Flächen noch ein zusammenhängendes Ganze, während die andern in zwei zueinander symmetrische Stücke zerfallen[240]). Der Satz von *Harnack* (Nr. **19**) geht hieraus als ein Korollar hervor.

Anschauungsbehandlung des Verlaufs der überall endlichen Integrale bei reellen Kurven. Für die Kurven 3^{ter} Klasse, Math. Ann. 7 (1874), p. 558 [sowie *Harnack* [234])]; für die 4^{ter} Klasse mit $p=3$ (Realitätsverhältnisse des *Jacobi*'schen Umkehrproblems, reelle Lösungen des Problems der Berührungskurven etc., vgl. Nr. **34**), Math. Ann. 10 (1876), p 365; 11 (1876), p. 293.

238) S. [344]), p. 64 ff.; sowie Math. Ann. 19 (1881/2), p. 159, 565; u. insbes. [160]), 1, p. 227, und 2, p. 117 ff., und Math. Ann. 42 (1892), p. 1 [Auszug Gött. Nachr. 1892, p. 310; Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 2 (1893), p. 61].

239) S. [344]), p. 74; [160]), 2, p. 118. — Vgl. auch für einen allgemeineren Satz *Segre* [7]), p. 441.

240) Die Flächen ein- und derselben Art (sowie die zugehörigen algebraischen Gebilde) machen ein zusammenhängendes Kontinuum aus, und jede Art hängt von $3p-3+\sigma$ *reellen Moduln* ab, wo σ die Anzahl der reellen Parameter ist, die in die reellen eindeutigen Transformationen der betrachteten Flächen in sich eintreten ($\sigma=3, 1, 0$, je nachdem $p=0, 1, >1$). Vgl. *Klein* [160]), 2, p. 133—37 und auch [344]), p. 75—78; Math. Ann. 19 (1881), p. 159. — Ausführlicheres über die Einteilung der symmetrischen Flächen in Arten bei *G. Weichold,* Diss. Leipzig 1883 = Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 321, wo für die Fläche gewisse Normalformen, sowie ein kanonisches Querschnittsystem gegeben werden,

Die Untersuchung der allgemeinen Realitätsverhältnisse bei algebraischen Kurven irgendeines Geschlechtes p hat *Klein* [241]) auf *Riemann*'s Existenztheorem der algebraischen Funktionen [vgl. Nr. **30** und [342])] gegründet, und auf die Eigenschaften der *Abel*'schen Integrale, unter Herannahme der Normalkurven der φ [vgl. [319])], die zu den symmetrischen Flächen gehören. Im besonderen hat er durch Kontinuitätsprozesse (Übergang zum hyperelliptischen Gebilde und Einführung eines isolierten Doppelpunktes) die auf die Berührungsgebilde [242]) bezüglichen Realitätsfragen gelöst.

21. Asymptoten, Durchmesser, Mittelpunkt, Brennpunkte. Die Eigenschaften der unendlichfernen Punkte [243]) einer C^n (III D 1, 2, Nr. 8, *von Mangoldt*) untersucht man am einfachsten mittels homogener Koordinaten x, y, z, indem man in der Kurvengleichung $z = 0$

---

und bei *Klein* [160]), 2, p. 117—191 und p. 218—253. Vgl. auch *W. Dyck* [228]). — Zahlreiche symmetrische Flächen werden bei *Klein-Fricke* [234]) betrachtet. Vgl. auch *F. Klein* und *R. Fricke*, Vorl. über die Theorie der automorphen Funktionen 1, Leipzig 1897, p. 180 ff.

241) S. [160]), 2, p. 141 ff.; Math. Ann. 42 (1892), p. 1.

242) Ist λ die Anzahl der reellen Züge der gegebenen (reellen) Kurve f, so ist die der reellen Berührungs-φ (d. i. der, die f überall berühren, wo sie sie treffen, also in $p-1$ Punkten: s. die Definition der „Berührungskurven" Nr. **34**), für $\lambda = 0$ gleich Null oder 2^{p-1}, je nachdem p gerade oder ungerade ist; sie ist $2^{p+\lambda-2}$ in den diasymmetrischen Fällen mit $\lambda > 0$, und $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ in den orthosymmetrischen. *Klein* untersucht auch die Verteilung der reellen Berührungspunkte dieser φ auf die verschiedenen Züge von f. Für $p = 3$ gelangt man zu den Sätzen von *Zeuthen* [227]) über die Doppeltangenten der C^4 zurück.

243) Mit den unendlichen Zügen und ihren gerad- und krummlinigen Asymptoten beschäftigten sich *Newton; Stirling* [8]), p. 41 ff.; *F. Nicole*, Paris Mém. 1729, p. 194; *De Gua* [4]), p. 31; *Cramer* [4]), p. 215; *Euler* [4]), p. 83, 99, deren erster die Asymptoten als Tangenten in den unendlichfernen Kurvenpunkten auffasste [[23]), lib. 1, Prop. 27, Scholium], die unendlichen Züge in hyperbolische und parabolische unterschied und einen bekannten Satz über die Hyperbel (III C 1, Nr. **11**, *Dingeldey*) dahin ausdehnte, dass jede Gerade eine C^n und ihre Asymptoten in zwei Gruppen von Punkten mit demselben Zentrum der mittleren Abstände trifft [[52]) = Opuscula 1, p. 249, 250]. Einen Satz, den man durch Projektion hieraus ableitet, hat *Mac Laurin* [51]) = *de Jonquières*, Mélanges, p. 201 gegeben. Vgl. *O. Terquem*, Nouv. Ann. de math. (1) 9 (1850), p. 440. — Ausführlich untersucht *Plücker* [12]), p. 14 ff. die Asymptoten, der auch den Begriff der Asymptote m^{ter} Ordnung einführt, d. i. eine C^m, die m geradlinige Asymptoten vertritt. Einige seiner Sätze erhält *Plücker* als besondere Fälle der Schnittpunktsätze (Nr. **33**): vgl. auch *A. Cayley*, Cambr. math. J. 4 (1843), p. 102 = Papers 1, p. 46. Vgl. *Kötter*, Bericht, p. 455 ff. — Die *Plücker*'schen Betrachtungen hat *O. Stolz*, Math. Ann. 11 (1877), p. 41 mit Reihenentwickelungen verfolgt und so strenger gestaltet.

setzt. Ist diese $\sum_{i=0}^{n} u_i z^{n-i} = 0$, wo u_i eine binäre Form in x, y der Ordnung i bedeutet, so besitzen die unendlichfernen Punkte der Kurve Richtungen, die durch $u_n = 0$ bestimmt sind; die einem solchen als einfach vorausgesetzten Punkte $(x_0, y_0, 0)$ angehörige Tangente oder „*Asymptote*" ist somit dargestellt durch:

$$x \frac{\partial u_n}{\partial x_0} + y \frac{\partial u_n}{\partial y_0} + u_{n-1}(x_0, y_0) = 0.$$

Analoge Gleichungen erhält man, wenn der Punkt ein vielfacher ist[244]).

„*Durchmesser*", gerad- und krummlinige, sind die sukzessiven Polaren der verschiedenen unendlichfernen Punkte[245]); ihre Eigenschaften entnimmt man alle[246]) den Formeln der Anm. [51]); viele davon[247]) gehören der Theorie der Transversalen an[248]).

---

244) *D. F. Gregory,* Cambr. math. J. 4 (1843), p. 42 = The math. writings, ed. by *W. Walton,* Cambr. 1865, p. 261; *L. Painvin,* Nouv. Ann. de math. (2) 3 (1864), p. 145, 193, 241; *Em. Weyr,* Časopis 1 (1872), p. 161; *F. Casorati,* Ist. Lomb. Rend. (2) 12 (1879), p. 117; Pal. Rend. 3 (1889), p. 49; *G. Lazzeri,* Per. di mat. (3) 3 (1905), p. 6. — Hinsichtlich der Klassifikation der Gestalten der C^3 und C^4 auf Grund der Anzahl und Natur der unendlichen Züge, s. III C 5, Spezielle algebraische Kurven, *G. Kohn.*

245) S. [52]). — Eine Erweiterung („Begleitkurven" eines endlichen Punktes in Bezug auf eine C^n) bei *H. R. Hugi,* Diss. Bern 1900. — *E. Dewulf,* Nouv. Ann. de math. (1) 18 (1859), p. 322; 19 (1860), p. 175; (2) 11 (1872), p. 297; Bull. sci. math. (2) 2^1 (1878), p. 41, 372 hat die *schiefe Polare* eines Punktes P in bezug auf C^n untersucht, d. i. den Ort eines Punktes M derart, dass die Polargerade von M mit dem Radiusvektor PM einen konstanten Winkel bildet, und sie angewendet auf die *schiefe Enveloppe* [*developpoïde,* nach *A. Lancret,* Par. Mém. prés. (Sav. étr.) (1) 2 (1811), p. 1] einer C^n, d. i. die Enveloppe der von den Punkten von C^n ausgehenden und mit den resp. Tangenten einen gegebenen Winkel bildenden Geraden. Über diese Gerade s. auch *M. Chasles,* Paris C. R. 74 (1872), p. 1146, 1277; Erweiterungen ib. 80 (1875), p. 505.

246) Insbesondere den zu den geradlinigen Durchmessern führenden Satz von *Newton,* sowie den von *R. Cotes,* der davon eine Erweiterung ist, in bezug auf die Polargerade (*harmonische Axe*) eines im Endlichen gelegenen Punktes: s. [52]). Wie schon *Stirling* [8]), p. 71 f. bemerkte, ist der Satz von *Newton,* sowie der der Anm. [247]) eine unmittelbare Folge der Relationen, die die Koeffizienten und die Wurzeln einer algebraischen Gleichung verknüpfen (I B 1a, Nr. 8, *Netto*). — Über Durchmesser (und harmonische Axen) und insbesondere über die Symmetrieaxen s. auch *L. Euler,* Berlin Mém. 1 (1745), p. 71; [4]), p. 181; *Waring* [4]), p. 66 ff.; [258]), p. 4 ff.; *Poncelet,* Traité, 2, sect. 4, § 3; *L. Wantzel,* J. de math. 14 (1849), p. 111; *P. Breton (de Champ),* Nouv. Ann. de math. (1) 14 (1855), p. 7; *Steiner* [254]); *M. Chasles,* Paris C. R. 72 (1871), p. 794 [= Nouv. Ann. de math. (2) 10 (1871), p. 529]; 73 (1871), p. 229, 1241, 1289, 1405; 74 (1872), p. 21; *A. de Saint-Germain,* Nouv. Ann. de math. (2) 19 (1880), p. 350; *E. Ciani,* Pisa Scuola

Nach *Plücker*[249]) heisst „*Brennpunkt*" (*foyer, focus, fuoco*) einer Kurve ein Punkt, für den zwei seiner an die Kurve gehenden Tan-

---

norm. Ann. 6 (1889), p. 1. — Über die Existenzbedingungen für Symmetriezentren und -axen einer Kurve und über ihre Bestimmung, falls sie existieren (und über analoge Fragen bei Flächen) s. *S. Mangeot,*, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 9; Soc. math. de France Bull. 25 (1897), p. 54; Nouv. Ann. de math. (3) 15 (1896), p. 403; 17 (1898), p. 215; über die Ähnlichkeit und Symmetrie (in bezug auf einen Punkt) zweier algebraischer Kurven (oder Flächen), Ann. éc. norm. (3) 15 (1898), p. 385; Nouv. Ann. de math. (3) 19 (1900), p. 451.

247) Es sei erwähnt der Satz von *Newton*[52]) = Opuscula 1, p. 249: „Schneiden zwei von einem Punkte P ausgehende Gerade eine C^n in $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_n$, so bleibt das Verhältnis $\frac{PA_1 \ldots PA_n}{PB_1 \ldots PB_n}$ konstant bei Veränderung von P, falls jene Geraden sich parallel mit sich selbst bewegen"; sodann der Satz von *L. N. M. Carnot,* Géom. de position, Paris 1803, p. 291, 436: „Schneiden die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks die C^n resp. in den Punkten A_i, B_i, C_i $(i = 1, \ldots, n)$, so ist

$$\frac{BA_1 \ldots BA_n}{CA_1 \ldots CA_n} \cdot \frac{CB_1 \ldots CB_n}{AB_1 \ldots AB_n} \cdot \frac{AC_1 \ldots AC_n}{BC_1 \ldots BC_n} = 1$$

(und entsprechend für ein beliebiges Polygon)." Jeder der beiden Sätze kann aus dem andern abgeleitet werden. Vgl. *Poncelet,* Traité 1, p. 73 ff. und [52]); *M. Chasles,* Géom. sup., Paris 1852, 2. éd. 1880, p. 315—336; *Cremona*, Intr., n. 38—40; „*Clebsch-Lindemann*", p. 829; *C. A. Laisant,* Nouv. Ann. de math. (3) 9 (1890), p. 5; *L. Ravier,* ib. 11 (1892), p. 349; *A. Cazamian,* ib. 14 (1895), p. 30; *F. Ferrari,* ib. p. 41; *A. Demoulin,* Brux. Mém. 45 (1891); *A. Gob,* Ass. franç. 22. session, Besançon 1893, p. 258; Brux. Bull. (3) 28 (1894), p. 57. — Aus dem *Newton*'schen Satze folgt, dass die von einem Punkte P gelegten Transversalen, für die das Produkt $PA_1 \ldots PA_n$ ein Maximum oder Minimum ist, von P unabhängige Richtungen besitzen; über diese s. *J. Steiner,* J. f. Math. 55 (1858), p. 356 = Werke 2, p. 663; *C. Stephanos,* Soc. math. de France Bull. 9 (1881), p. 49; *R. Molke,* Diss. Breslau 1897, der (wie auch, für Kegelschnitte, *O. Gutsche,* Breslau Progr. 1896) noch verschiedene weitere, von *Steiner,* l. c., nur ausgesprochene Sätze bezüglich der durch einen Punkt an eine C^n gezogenen Transversalen beweist. — Anwendungen der Sätze von *Newton, Mac Laurin, Carnot* auf die graphische Konstruktion von Tangenten, oskulierenden Kreisen und Kegelschnitten giebt *Mac Laurin*[51]), § 14 ff. = Mélanges, p. 206 ff.; *Poncelet,* Traité 2, Sect. 4, § 4; Applic. d'anal. et de géom. 2, p. 78 ff.; *M. Chasles,* Férussac Bull. 13 (1830), p. 391; [4]), Anm. zu p. 221 und p. 846; *H. J. St. Smith,* Cambr. Dubl. math. J. 7 (1852), p. 118 = Papers 1, p. 25.

248) S. insbesondere *Mac Laurin*[247]); *Poncelet*[52]) und *Steiner*[254]); sodann *E. F. Minding,* J. f. Math. 11 (1833), p. 20; *Reiss,* Corr. math. 9 (1837), p. 249; *S. Gundelfinger,* Zeitschr. Math. Phys. 19 (1874), p. 68; vgl. *Kötter,* Bericht, p. 219 ff. Von *Reiss* stammt der Satz: „Sind φ_i die Winkel, unter denen eine C^n einer Geraden begegnet, und r_i die Krümmungsradien in den Schnittpunkten, so gilt $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i \sin^3 \varphi_i} = 0$; s. auch *A. Mannheim*, Nouv.

genten mit einer beliebigen Geraden Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten $\pm i$ $(i = \sqrt{-1})$ sind, oder [250]), was dasselbe ist, der Schnittpunkt zweier („isotroper") Tangenten, von denen die eine durch den einen und die andere durch den andern der beiden Kreispunkte geht. Ist also in Linienkoordinaten u, v, w (die mit den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y durch die Relation $ux + vy + w = 0$ verbunden sind), $\varphi(u, v, w) = 0$ die Gleichung der Kurve, so bestimmen sich die Brennpunkte aus

$$\varphi(-1, -i, x + iy) = 0.$$ [251])

Ann. de math. (2) 1 (1862), p. 123; Cours de géom. descriptive, 2e éd., Paris 1886, p. 215; Géom. cinématique, Paris 1894, p. 56; *A. Chemin*, Nouv. Ann. de math. (2) 7 (1868), p. 120; *A. V. Bäcklund*, Lund Arsskr. 8 (1868) (n. 79); *E. Ch. Catalan*, Mélanges math. 2 (1877) [Liège Mém. (2) 13 (1886)], p. 132. — *M. d'Ocagne*, Nouv. Ann. de math. (3) 9 (1890), p. 445; Soc. math. de France Bull. 19 (1891), p. 26 hat auch die Formel $\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t_i^3} = 0$ gegeben, wo die t_i die Längen der von einem Punkte an eine Kurve der Klasse n gelegten Tangenten bedeuten, und r_i die Krümmungsradien in den Berührungspunkten; sie rührt jedoch von *A. Mannheim* her, Nouv. Ann. de math. (2) 4 (1865), p. 430; 7 (1868), p. 181, und findet sich auch, nebst weiteren Sätzen über die Krümmung, am Ende der Arbeit von *Bäcklund* [268]), und wurde erweitert von *A. Demoulin*, Brux. Bull. (3) 23 (1892), p. 527. Ähnliche Sätze bei *A. Ribaucour*, Nouv. Ann. de math. (2) 7 (1868), p. 189; 11 (1872), p. 331; *E. Ghysens*, Nouv. Corr. math. 3 (1877), p. 194; Brux. Bull. (2) 43 (1877), p. 544; 45 (1878), p. 231; *M. d'Ocagne*, J. de math. spec. (3) 10 (1886), p. 193; Soc. math. de France Bull. 19 (1891), p. 31; Mathesis (2) 2 (1892), p. 100.

249) J. f. Math. 10 (1832), p. 84 = Abh. 1, p. 290. Für den Fall der Kegelschnitte s. jedoch *Poncelet*, Traité 1, p. 252 ff., vgl. auch *Plücker* [255]), p. 64.

250) *A. Cayley*, J. de math. (1) 15 (1850), p. 354 = Papers 1, p. 478; *G. Salmon*, J. f. Math. 42 (1851), p. 275; [3]), p. 119. — Weitere Eigenschaften bei *E. E. Kummer*, J. f. Math. 35 (1847), p. 5, wo bewiesen wird, dass orthogonale Kurven stets homofokal sind; *L. Cremona*, Nouv. Ann. de math. (2) 3 (1864), p. 21, wo der Ort der Brennpunkte der Kurven eines Büschels untersucht wird; *E. Laguerre*, ib. p. 141 (fehlt in den Oeuvres); *M. Cornu*, ib. 4 (1865), p. 518; *W. K. Clifford*, Papers, p. 130 (Auszug Brit. Ass. Rep., Exeter 1869, p. 9) (s. insbesondere p. 147, 164 und auch p. 612); *A. Fuchs*, Diss. Marburg 1887; *E. Goursat*, Nouv. Ann. de math. (3) 6 (1887), p. 465; *E. Amigues*, ib. 11 (1892), p. 163. Über die Konstruktion der Brennpunkte und deren Leitlinien [*Leitlinie (Directrix)* eines Brennpunktes heisst die Gerade, die die Berührungspunkte der beiden durch den Brennpunkt gehenden isotropen Geraden verbindet] s. *O. Zimmermann*, J. f. Math. 126 (1903), p. 171.

251) *Salmon* [3]), p. 120; *H. Siebeck*, J. f. Math. 64 (1864), p. 175. Bei *Siebeck* tritt durch die Auffassung von $\varphi(-1, -i, x + iy)$ als monogene Funktion von $x + iy$ das Band zwischen der Theorie der Brennpunkte der algebraischen Kurven und der Algebra der binären Formen deutlich hervor; daraus werden

Eine Kurve der Klasse m besitzt m^2 Brennpunkte, von denen bei reeller Kurve nur m reell sind[252]).

„*Mittelpunkt*" (*centre, centro*)[253]) heisst gewöhnlich ein Punkt, der Symmetriezentrum für die C^n ist; für $n > 2$ giebt es im allgemeinen keinen; wenn aber, nur einen einzigen (falls nicht etwa die C^n in lauter parallele Gerade zerfällt); je nachdem n gerade oder ungerade ist, geht die Kurve eine gerade (inkl. 0) oder aber ungerade Anzahl von Malen durch ihn hindurch. Ausgedehnte Untersuchungen über C^n mit Mittelpunkt hat *Steiner*[254]) angestellt.

---

eine Reihe von Sätzen abgeleitet, von denen einige durch andere Autoren wiedergefunden wurden. So z. B.: „Die Wurzelpunkte (bei der *Gauss*'schen Darstellung) der Ableitung einer algebraischen Gleichung mit n getrennten Wurzeln sind die reellen Brennpunkte einer Kurve der Klasse $n-1$, die die $\frac{n(n-1)}{2}$, die Wurzelpunkte der ursprünglichen Gleichung zu je zweien verbindenden Strecken in ihren Mittelpunkten berührt", ein später von *F. J. van den Berg* [und noch von *J. Juhel-Rénoy,* Paris C. R. 142 (1906), p. 700] gegebener Satz, Nieuw Arch. v. Wisk. 15 (1888), p. 140 (in einem Anhang ein allgemeinerer, auf Gleichungen mit vielfachen Wurzeln bezüglicher Satz). S. auch [257]) und [263]).

252) Man erkennt leicht die Reduktionen dieser Anzahlen, wenn die Kurve die unendlich ferne Gerade berührt oder durch die Kreispunkte geht, vgl. *A. Cayley,* Edinb. R. Soc. Trans. 25 (1868), p. 1 = Papers 6, p. 470 (n. 105—110); „*Salmon-Fiedler*", p. 151. Wenn die Kurve reell ist und s-mal durch jeden der Kreispunkte geht, so existieren $m-2s$ reelle Brennpunkte, als die Schnittpunkte der isotropen Tangenten, deren Berührungspunkt nicht in einen der Kreispunkte fällt, sowie noch weitere s reelle Brennpunkte (deren jeder doppelt zu zählen ist), die durch die Tangenten in den Kreispunkten geliefert werden. Sie besitzen im allgemeinen verschiedene Eigenschaften, und werden von *Laguerre*[259]) als *gewöhnliche* resp. *singuläre* bezeichnet.

253) *Centrum generale* nach *Newton*[247]); *de Gua*[4]), p. 1; *Cramer*[4]), p. 144.

254) J. f. Math. 47 (1854), p. 7, 106 = Werke 2, p. 503, 599. S. auch *P. Breton (de Champ),* J. de math. (1) 10 (1845), p. 430; 11 (1846), p. 153; Nouv. Ann. de math. (1) 7 (1848), p. 187. — *Steiner,* l. c., hat auch solche Kurven betrachtet, die sich bei einer allgemeinen C^n darbieten. Durch jeden Punkt P der Ebene gehen $\frac{n(n-1)}{2}$ Gerade („Sehnen"), die zwei in bezug auf P symmetrische Punkte von C^n enthalten, und letztere, die „Endpunkte" der Sehnen, liegen auf einer Kurve J^{n-1} mit P als Mittelpunkt (der „inneren Polare" von P bez. C^n). Variiert C^n in einem Büschel (und damit auch J^{n-1}), so erfüllen die Endpunkte aller Sehnen durch P eine Kurve der Ordnung $2n-1$ mit P als Mittelpunkt, die „innere Panpolare" von P. — Einige der vielen von *Steiner,* l. c., nur ausgesprochenen Sätze beweisen *J. N. Bischoff,* J. f. Math. 56 (1858), p. 166; Zweibrücken Progr. 1866; *E. de Jonquières,* J. f. Math. 59 (1861), p. 313; *P. Güssfeldt,* Math. Ann. 2 (1868), p. 65; *A. Milinowski,* J. f. Math. 78 (1873), p. 177; *K. Bobek,* Wien Ber. 98 (1888/9), p. 5, 394, 526; *B. Sporer,* Böklen math.-nat. Mitt. 3 (1890), p. 55; Zeitschr. Math. Phys. 37 (1891), p. 65, 340. Vgl. auch *R. Sturm,* ib. 45 (1900), p. 239.

Die Definition des Mittelpunktes eines Kegelschnitts lässt sich aber noch nach andern Richtungen hin erweitern, indem man darunter z. B. einen der Pole resp. den Pol der unendlichfernen Geraden in bezug auf die C^n versteht, jene als Punkt- resp. Tangentenort [255]) aufgefasst.

Bemerkenswert ist insbesondere jener letztere Punkt, der — wenn nur die C^n keine parabolischen Züge besitzt — auch das Zentrum der mittleren Entfernungen ist: 1. für die Berührungspunkte aller in irgendeiner festgehaltenen Richtung gezogenen Tangenten [256]); 2. für die Krümmungsmittelpunkte solcher Berührungspunkte; 3. für die $(n-1)^2$ Pole der unendlichfernen Geraden; 4. für die $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte je zweier Asymptoten; 5. für die reellen Brennpunkte der C^n und die aller sukzessiven Polaren der unendlichfernen Geraden in bezug auf die gegebene Kurve als Klassenkurve [257]).

---

255) Andere Erweiterungen bei *Plücker,* Anal.-geom. Entw., Essen 2 (1831), Anm. zu p. 97—101.

256) *Chasles* [52]); [4]), p. 622; Géom. sup., p. 332; *Poncelet,* Traité 2, p. 277; Applic. d'anal. et de géom. 2, p. 159; *L. Painvin,* Nouv. Ann. de math. (2) 5 (1866), p. 55; *S. Roberts,* Quart. J. 9 (1868), p. 25; *Serret* [257]); *M. d'Ocagne,* Nouv. Ann. de math. (3) 3 (1884), p. 521; 9 (1890), p. 445; (4) 1 (1901), p. 433; Soc. math. de France Bull. 18 (1890), p. 108; *L. Geisenheimer,* Zeitschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 193; *Weill,* Nouv. Ann. de math. (3) 6 (1887), p. 82.

257) Die zweite Eigenschaft folgt sofort aus der Bemerkung von *J. M. C. Duhamel,* dass die Summe der Krümmungsradien in jenen Berührungspunkten verschwindet: s. *Liouville* [258]), der bewies, dass auch die Summe der Reziproken jener Krümmungsradien Null ist, und weiter die Sätze 3) und 4). Der fünfte Satz rührt von *Siebeck* her [251]), wurde wiedergefunden von *P. Serret,* Paris C. R. 86 (1878), p. 39, 116, 385; ausgedehnt von *E. Laguerre,* Soc. philom. Bull. (6) 4 (1867), p. 15 = Oeuvres 2, p. 23 und [64]) und Nouv. Ann. de math. (2) 18 (1879), p. 57 = Oeuvres 2, p. 537; weitere Folgerungen aus der *Serret*'schen Methode bei *J. v. Puzyna,* Krak. Abh. 22 (1892), p. 1. Zu den obigen Sätzen s. noch *O. Terquem,* Nouv. Ann. de math. (1) 4 (1845), p. 153, 178; *Bäcklund* [248]), [268]), [359]); *C. Servais,* Brux. Bull. (3) 21 (1891), p. 587; 22 (1892), p. 512; *F. Balitrand,* Nouv. Ann. de math. (3) 12 (1893), p. 256. — Zu beachten ist, dass mittels Transformation durch reziproke Polaren aus dem Satze von *Duhamel* der von *Reiss* [248]) folgt, und aus diesem der von *Mannheim* [248]): vgl. *Mannheim,* Nouv. Ann. de math. (3) 11 (1892), p. 431; eine korrelative Transformation der Sätze von *Newton* [246]) und *Chasles* [256]) gab *M. d'Ocagne,* Coordonnées parallèles et axiales, Paris 1885, p. 34. — Die Bemerkung von *C. Neumann,* Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 280 = Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 172, 425, dass derselbe Punkt zugleich der „Krümmungsschwerpunkt" der C^n ist [nach *Steiner,* J. f. Math. 21 (1840), p. 33, 101 = Werke 2, p. 99, der Schwerpunkt der materiell gedachten Kurve, bei einer dem jeweiligen Krümmungsradius umgekehrt proportionalen Dichtigkeit], findet sich bereits bei *H. Grassmann,* J. f. Math. 25 (1842), p. 67 = Ges. W. 2^1, p. 43.

Die ersten der genannten Eigenschaften (nebst weiteren) hat *J. Liouville* [258]) aus Sätzen über Elimination (I B 1b, Nr. **13**, **23**, *Netto*) abgeleitet; andere stellten *E. Laguerre* und *Ell. Holst* [259]) auf, indem sie nach einer geometrischen Deutung der Grösse $F(\alpha, \beta)$ suchten, wenn α, β die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten eines Punktes P sind und $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer C^n; *Holst* bringt dabei diese Gleichung auf eine Normalform analog der *Hesse*'schen für die Gleichung einer Geraden [260]).

Alle diese Sätze (die teilweise auch auf den Raum übertragen

---

258) J. de math. (1) 6 (1841), p. 345 [Auszug Paris C. R. 13 (1841), p. 412]; 9 (1844), p. 337, 435; Anfänge bei *E. Waring,* Proprietates algebraicarum curvarum, Cantabr. 1762, p. 53 ff. — Im besondern ergiebt sich so die Erweiterung eines Satzes von *Newton* [243]): „Das Zentrum der mittleren Entfernungen der Schnittpunkte zweier (nicht parabolischer) algebraischer Kurven fällt zusammen mit dem der Schnittpunkte ihrer Asymptoten“; sodann: „Die Summe der Kotangenten der Winkel, unter denen zwei Kurven sich schneiden, ist gleich der analogen Summe bezüglich ihrer Asymptoten.“ Vgl. auch *Bäcklund* [248]) und [359]); *S. Roberts,* Quart. J. 9 (1868), p. 63; *G. Humbert,* J. de math. (4) 1 (1885), p. 347; *G. Fouret,* Pal. Rend. 5 (1890), p. 75. Der Fall, wo eine der beiden Kurven ein Kreis ist, bei *M. d'Ocagne,* Nouv. Ann. de math. (3) 5 (1886), p. 295; Soc. math. de France Bull. 30 (1902), p. 83; *R. W. Genese,* Nouv. Ann. de math. (3) 6 (1887), p. 297; Lond. Math. Soc. Proc. 18 (1887), p. 304.

259) *Laguerre,* Paris C. R. 60 (1865), p. 70 = Oeuvres 2, p. 18; *E. Holst,* Math. Ann. 11 (1876/77), p. 341, 575; Soc. math. de France Bull. 8 (1879), p. 52; *A. R. Johnson,* Quart. J. 22 (1887), p. 325. Über analoge Fragen vgl. auch *E. Beltrami,* Giorn. di mat. 4 (1866), p. 76 = Opere mat. 1, Milano 1902, p. 281; *C. A. Laisant,* L'enseignement math. 3 (1901), p. 406; sodann (auch hinsichtlich der Sätze von *Chasles, Reiss, Duhamel, Mannheim*) *E. Holst,* Archiv f. Math. og Nat. 7 (1882), p. 109, 177, 240; Christiania Forh. 1882, Nr. 11; 1883, Nr. 13 (vgl. III C 3, Nr. **11**, *Zeuthen*).

260) Ist $k(x + \alpha_1 y)(x + \alpha_2 y) \dots (x + \alpha_n y)$ die in ihre linearen Faktoren zerlegte homogene Gruppe n^{ten} Grades von F, so nimmt man als linke Seite $\Phi(x, y)$ der Normalgleichung: $\Phi(x, y) = \frac{F(x, y)}{k\sqrt{(1 + \alpha_1^2) \dots (1 + \alpha_n^2)}}$. Bedeuten (A), (B) resp. die Produkte der Abstände von P von den Asymptoten und den (reellen) Brennpunkten, ferner (T), (N) die Produkte der Längen der von P an die Kurve gelegten Tangenten und Normalen, endlich (ϑ) das Produkt der Radienvektoren, die von P aus gelegt die C^n unter einem gegebenen Winkel ϑ treffen, so gilt:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{(N)}{(B)} = \frac{(A) \cdot (T)}{(B)} = \frac{(\vartheta) \sin^n \vartheta}{(B)}.$$

Allgemeiner, sind T, N die Produkte der zwei algebraischen Kurven gemeinsamen Tangenten resp. Normalen, N_1, N_2 die Produkte der Normalen, die der ersten Kurve und den Asymptoten der zweiten gemein sind resp. vice versa, so ist: $N = TN_1N_2$.

wurden) beruhen auf Ausdrücken für gewisse symmetrische Funktionen der Koordinaten der Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven, genauer, für Summe und Produkt der Werte, die in jenen Punkten eine bestimmte rationale Funktion der Koordinaten annimmt. Deren Berechnung hat *G. Humbert*[261]) mittels der Theorie der *Fuchs*'schen Funktionen aus derjenigen der im *Abel*'schen Theorem (vgl. Nr. **33**; II B 2, C, *Wirtinger*, und II B 5, *Wellstein*) auftretenden Integrale abgeleitet und hat zahlreiche Anwendungen[262]) davon gemacht, auf Flächeninhalte, auf die Orientierung von Richtungen[263]), auf Abstände[264]),

261) J. de math. (4) 3 (1887), p. 327 [Auszug Paris C. R. 103 (1886), p. 919]; 4 (1888), p 129; *Appell-Goursat*[162]), p. 520; *Ch. Michel,* Ann. éc. norm. (3) 18 (1901), p. 77 [Auszug Paris C. R. 130 (1900), p. 885].

262) Einige der Sätze von *Chasles, Liouville, Laguerre, Humbert* nebst weiteren bewiesen mehr elementar *G. Humbert,* Nouv. Ann. de math. (3) 6 (1887), p. 526; *G. Fouret,* Pal. Rend. 3 (1889), p. 42; Nouv. Ann. de math. (3) 9 (1890), p. 258; *E. Borel,* ib. p. 123; s. auch *Ch. Michel,* Nouv. Ann. de math. (3) 19 (1900), p. 169. — Unter den Sätzen der zweiten Abhandlung von *Fouret* sei der folgende [ausgesprochen von *Humbert,* Soc. math. de France Bull. 16 (1887), p. 188] erwähnt: „Der Ort eines Punktes, für den die Quadratsumme der Längen der von ihm an eine gegebene C^n gelegten Normalen konstant bleibt, ist ein Kegelschnitt; die den verschiedenen Werten der Konstanten entsprechenden Kegelschnitte sind konzentrisch und homothetisch, und für deren gemeinsamen Mittelpunkt ist jene Summe ein Minimum." Vgl. auch *C. A. Laisant,* Soc. math. de France Bull. 18 (1889), p. 141; *K. Birkeland*, Monatshefte Math. Phys. 1 (1890), p. 417.

263) Nach *E. Laguerre*, Soc. philom. Bull. (6) 4 (1867), p. 15 = Oeuvres 2, p. 23, besitzen zwei Gruppen von gleichvielen Geraden die nämliche Orientierung, wenn die Differenz zwischen den Summen der Winkel, die die Geraden beider Gruppen mit einer gegebenen (im übrigen willkürlichen) Geraden bilden, ein Vielfaches von π ist. — Als Orientierung eines Systems von Geraden, die vom Ursprung ausgehen und durch die homogene Gleichung $f(x, y) = 0$ definiert werden, nimmt *Humbert* das Verhältnis $\frac{f(1, i)}{f(-1, i)}$, Am. J. of Math. 10 (1888), p. 258; Nouv. Ann. de math. (3) 12 (1893), p. 37, 123; s. *F. Franklin,* Am. J. of math. 12 (1890), p. 161; *P. H. Schoute,* Amsterdam Versl. 1 (1892), p. 53, 62. — Von den *Humbert*'schen Sätzen führen wir folgende an: „Die beiden Gruppen von Geraden, die von einem Punkte P aus die Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven derselben Ordnung mit einer andern algebraischen Kurve f projizieren, besitzen die nämliche Orientierung, falls von den Kurven des von den beiden ersten bestimmten Büschels eine existiert, die durch alle Punkte geht, in denen f die von P ausgehenden isotropen Geraden trifft." „Die beiden Systeme von Tangenten, die resp. zwei Kurven gleicher Klasse mit einer andern algebraischen Kurve f gemein sind, besitzen die nämliche Orientierung, wenn unter den Kurven der von den beiden ersten bestimmten Schar eine existiert, die alle Brennpunkte von f zu Brennpunkten hat." Einige besondere Fälle des zweiten Satzes hatte *E. Laguerre*[259]), und Soc. philom. Bull. (6) 7 (1870), p. 140 = Oeuvres 2, p. 18, 131 ausgesprochen; aus dem Satze,

sodann auf Kurven, deren Bogen sich durch ein zugehöriges *Abel*sches Integral ausdrückt [265]), indem er insbesondere alle Kurven bestimmte, deren Bogen durch ein Integral erster Gattung darstellbar ist [266]).

---

dass die zweien Kurven gemeinsamen Tangenten mit dem System der die reellen Brennpunkte der einen mit denen der andern verbindenden Geraden die gleiche Orientierung aufweisen, hat *Humbert,* Nouv. Ann. de math. (3) 7 (1888), p. 5 [vgl. auch J. éc. pol. cah. 57 (1887), p. 171] einen Satz über die Bogen algebraischer Kurven abgeleitet, der eine Erweiterung des Satzes von *C. Graves* und *M. Chasles* über die Bogen von Kegelschnitten (III C 1, Nr. 69, *Dingeldey*) darstellt. Jedoch war der spezielle Fall, wo sich eine der beiden Kurven, als Geradenort, auf einen Punkt reduziert, den man gewöhnlich *Laguerre* [259]) zuschreibt, bereits von *Siebeck* [251]) bewiesen worden.

264) Z. B.: „Das Zentrum der mittleren Entfernungen der Schnittpunkte einer Kurve f mit der variierenden Kurve eines Büschels bleibt fest, wenn jede Asymptote von f eine solche einer Büschelkurve ist.“ Analoge Sätze gelten für das Produkt der Abstände und für die Summe der Reziproken der Abstände jener Punkte von einer festen Geraden. — Es ergiebt sich weiter, dass das Zentrum der mittleren Entfernungen der Fusspunkte von den Loten, die sich von einem Punkte P auf die gemeinsamen Tangenten zweier algebraischer Kurven fällen lassen, sowie die Quadratsumme der Abstände, die P von jenen Tangenten besitzt, fest bleiben, wenn eine der beiden Kurven derart variiert, dass ihre Brennpunkte und deren Leitlinien dieselben bleiben; desgleichen, wenn eine der beiden Kurven eine Schar durchläuft, falls nur unter den Kurven der Schar eine existiert, die zu Brennpunkten und zugehörigen Leitlinien die der zweiten ursprünglichen Kurve besitzt. — Weitere Sätze über Schwerpunkte bei *Weill,* Soc. math. de France Bull. 10 (1882), p. 137; 16 (1888), p. 155; *M. d'Ocagne*, Paris C. R. 99 (1884), p. 744, 779.

265) Solche Kurven lassen sich auffassen als Enveloppen von Halbgeraden, d. i. von Geraden mit einem bestimmten Sinne, und unter diesem Gesichtspunkte sind sie zuerst von *E. Laguerre,* Soc. math. de France Bull. 8 (1880), p. 196 = Oeuvres 2, p. 592; Paris C. R. 94 (1882), p. 778, 832, 933, 1033, 1160 = Oeuvres 2, p. 620; ib. 96 (1883), p. 769 = Oeuvres 2, p. 671; Nouv. Ann. de math. (3) 1 (1882), p. 542; (3) 2 (1883), p. 65, 97; (3) 4 (1885), p. 5 = Oeuvres 2, p. 608, 651, 660, 675 (s. auch Recherches sur la géom. de direction, Paris 1885) unter dem Namen „Richtungskurven“ („courbes de direction“) untersucht worden. Ihre allgemeine Gleichung in Linienkoordinaten u, v (die mit den orthogonalen Cartesischen x, y durch $ux + vy + 1 = 0$ verbunden sind) lautet $(u^2 + v^2)\,\varphi^2(u, v) = \psi^2(u, v)$, unter φ, ψ zwei ganze Polynome in u, v verstanden. Hierauf, und über die damit verbundene Transformation von *Laguerre* mittels Halbstrahlen, vgl. auch *Dautheville,* Soc. math. de France Bull. 14 (1886), p. 45; *C. Juel,* Nyt Tidsskr. f. Math. 3 (1892), p. 10. — *Laguerre,* Nouv. Ann. de math (3) 2 (1883), p. 16 = Oeuvres 2, p. 636, zeigt, dass jede Richtungskurve auf unendlich viele Arten als Reflexions-Anticaustica (bei parallel einfallenden Strahlen) einer algebraischen Kurve angesehen werden kann; auch die Umkehrung gilt, bis auf einen von *G. Humbert,* J. de math. (4) 4 (1888), p. 141 bemerkten Ausnahmefall.

266) Vgl. auch *G. Kobb,* Stockh. Öfvers. 44 (1887), No. 10, p. 713; *T. Brodén,*

J. Hadamard[267]) hat dieselben Eigenschaften aus der Resultante mehrerer algebraischer Gleichungen erhalten.

22. Evolute und andere abgeleitete Kurven. Die Evolute (III D 1, 2, Nr. **16**, **17**, *von Mangoldt*) E einer C^n mit nur gewöhnlichen Singularitäten (deren Anzahlen wie in Nr. 8 bezeichnet seien), und ohne spezielle Beziehungen zur unendlichfernen Geraden ist von der Ordnung $3n + r'$ und von der Klasse $n + n'$, besitzt im Endlichen $\frac{1}{2}(n'^2 + 2nn' - 4n' - r)$ Doppeltangenten (Doppelnormalen der C^n), keinen Wendepunkt, $\frac{1}{2}(3n' + r)^2 - 5(3n' + r) + 4(n + n')$ Doppelpunkte und $5n - 3n' + 3r'$ Spitzen (Mittelpunkte ebensovieler Kreise, die mit C^n eine Berührung dritter Ordnung besitzen); die noch übrigen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten von E fallen in die unendlichferne Gerade, die selbst eine n-fache Rückkehrtangente darstellt; die n entsprechenden Spitzen geben die zu den Asymptoten der C^n senkrechten Richtungen an[268]).

Die Erniedrigungen, die ein irgendwie singulärer Punkt P der

Stockh. Vetensk. Bihang 15 (1890), No. 5. — *W. Wirtinger,* Monatshefte Math. Phys. 5 (1894), p. 92 hat die Bedingungen dafür angegeben, dass für eine gegebene algebraische Kurve f ein Kegelschnitt derart existiert, dass, wenn auf letzterem eine projektive Massbestimmung im Sinne *Cayley*'s (III A 1, *Enriques,* Prinzipien der Geometrie, Abschn. IV) getroffen wird, bei dieser der Bogen von f als ein zu f gehöriges *Abel*'sches Integral dargestellt wird.

267) Acta math. 20 (1897), p. 201.

268) *Salmon* [3]), p. 109 ff.; *H. G. Zeuthen,* Diss. Kopenh. 1865, p. 88 = Nouv. Ann. de math. (2) 5 (1865), p. 534; mittels des Geschlechtes von C^n, *A. Clebsch,* J. f. Math. 64 (1864), p. 99 und Anm. zu p. 293; für eine von vielfachen Punkten freie C^n, *J. Steiner,* J. f. Math. 49 (1854), p. 333 = Werke 2, p. 623 (unrichtig bezüglich der Wendetangente von E); *A. V. Bäcklund,* Lund Årsskr. 6 (1869), p. 37. Dass die Evolute, die Kaustik, die Diakaustik etc. einer algebraischen Kurve algebraisch sind, bemerkten *Joh. Bernoulli,* Lectiones math. de methodo integralium, aliisque (1691/92), lect. 15, coroll. = Opera, Laus. et Gen. 1742, 3, p. 434, und *Jac. Bernoulli,* Acta erud. 1692, p. 209; 1693, p. 245 = Opera, Genevae, 1744, 1, p. 495, 552. — *Waring* [28]) gab an, dass durch einen Punkt höchstens n^2 Normalen an eine C^n gehen; dass es gerade n^2 sind, fand *O. Terquem,* J. de math. (1) 4 (1839), p. 176; s. auch *G. Salmon,* Cambr. Dublin math. J. 3 (1847), p. 46; *Steiner,* l. c. Allgemeiner, zwei Kurven der Ordnung m, n und der Klasse m', n' besitzen $mn' + m'n + m'n'$ gemeinsame Normalen: *M. Chasles,* Paris C. R. 76 (1873), p. 126; *G. Fouret,* Soc. math. de France Bull. 6 (1877), p. 43. — *A. Cayley,* Phil. Mag. 29 (1865), p. 344; Quart. J. 11 (1871), p. 183 = Papers 5, p. 473; 8, p. 31 betrachtet die projektive Evolute („Quasi-Evolute") einer C^n, d. i. die Enveloppe der „Quasi-Normalen", die den beweglichen Punkt der C^n mit dem Pole seiner Tangente in bezug auf einen festen Kegelschnitt verbinden; vgl. auch *A. Voss,* München Abh. 16² (1887), p. 291; *Halphen* [269]); „*Salmon-Fiedler*", p. 114 ff.

C^n in der Ordnung und Klasse von E hervorbringt, wie auch die Natur von E in den entsprechenden Punkten, hat in allen Fällen *G. Halphen* [269]) auf Grund von Reihenentwicklungen bestimmt. Ein endlicher Punkt P erniedrigt die Klasse von E ebenso wie die von C^n selbst, und die Ordnung von E um die Anzahl der von P absorbierten Wendepunkte der C^n, vermindert um die Anzahl der „*effektiven Wendepunkte*", die in P, in den Zweigen von C^n enthalten sind, deren Tangenten nicht isotrop sind (indem die Anzahl solcher effektiven Wendepunkte gegeben ist durch die Multiplizität des Schnittes der Evolute mit der unendlichfernen Geraden im entsprechenden Punkte). — Für einen unendlichfernen Punkt P sind verschiedene Fälle zu unterscheiden; ist er kein Kreispunkt, so bewirkt er an der Klasse von E eine Erniedrigung, gleich der für die Klasse von C^n, vermehrt um die Summe der Ordnungen der Berührungen, die C^n in P mit der unendlichfernen Geraden eingeht; hingegen an der Ordnung von E eine Erniedrigung, die das dreifache der obigen ist.

Beachtenswert sind auch die von *Halphen* für die sukzessiven Evoluten einer C^n aufgestellten Sätze. Diese sind sämtlich homofokal mit C^n und besitzen mit der unendlichfernen Geraden, in einem Kreispunkte, die nämliche Schnittmultiplizität. Von einer bestimmten Evolute (in der Reihe der Evoluten) an sind alle endlichen Punkte einer Evolute derart, dass die ihnen bei allen folgenden korrespondierenden Punkte niemals im Unendlichen liegen; überdies, wiederum von einer bestimmten Evolute an, bilden die Ordnungen und Klassen der sukzessiven Evoluten zwei arithmetische Reihen mit derselben Differenz (der auch Null sein kann, wie z. B. bei den algebraischen Epizykloiden) [270]).

Jede algebraische Kurve, die algebraisch rektifizierbar ist, d. h. für die die Länge des von einem festen Ausgangspunkt aus gerechneten Bogens eine algebraische Funktion der Koordinaten des Endpunktes ist, ist die Evolute einer algebraischen Kurve und umgekehrt. Der Bogen s einer solchen Kurve $f(x, y) = 0$ wird durch einen Aus-

269) S. [168]), art. 5—7; vgl. auch J. de math. (3) 2 (1876), p 87; Étude, p. 563 (in der ersteren Abhandlung werden, in dualer Gestalt, die sukzessiven Quasi-Evoluten einer C^n untersucht); sodann *C. F. E. Björling*, Upsala Nova Acta 1879.

270) Bei einer allgemeinen C^n gilt dieser Satz von der zweiten Evolute inkl. an. Die Ordnungen $n_1, n_2, \ldots$ und die Klassen $n_1', n_2', \ldots$ der sukzessiven Evoluten sind gegeben durch

$$n_1 = 3n(n-1), \quad n_2 = n(9n-13), \; \ldots, \; n_{i+2} = n_2 + 2in(3n-5);$$
$$n_1' = n^2, \quad n_2' = 4n(n-1), \; \ldots, \; n'_{i+2} = n_2' + 2in(3n-5).$$

druck von der Gestalt $s = \omega + P\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ gegeben, wo x, y die Koordinaten des Endpunktes bedeuten, ω eine von der Wahl des Ausgangspunktes abhängige Konstante, und P eine rationale Funktion von x, y [271]) (vgl. III D 1, 2, Nr. **11**, *von Mangoldt*).

Vielfach sind noch andere Kurven untersucht, die aus einer gegebenen durch metrische Konstruktionen hervorgehen, insbesondere hinsichtlich ihrer *Plücker*'schen Anzahlen.

Es seien erwähnt [272]) die Reflexionskaustiken (oder Katakaustiken, vgl. III D 1, 2, Nr. **22**, *von Mangoldt*) [273]); die Parallelkurven [274]); die positiven und negativen Fusspunktkurven (III D 1, 2, Nr. **7**, *von Mangoldt*) [275]); die isoptischen Kurven, die durch die Spitze eines konstanten einer gegebenen Kurve umschriebenen Winkels erzeugt werden (speziell, bei rechtem Winkel, orthoptisch) [276]); die Abweichungs-

---

271) *G. Humbert,* J. de math. (4) 4 (1888), p. 133 [Auszug Paris C. R. 104 (1887), p. 1051]; vgl. auch *L. Königsberger,* Math. Ann. 32 (1888), p. 589. — *Humbert,* l. c., bestimmt auch alle ebenen algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch eine *rationale* Funktion der Koordinaten ausdrücken lässt: es sind die Evoluten der „einfachen" algebraischen Richtungskurven, wenn man einfache Kurven solche nennt, die von ihren Normalen nur je in einem einzigen Punkte orthogonal getroffen werden. — *Humbert,* J. éc. pol., cah. 57 (1887), p. 171 [Auszug Paris C. R. 104 (1887), p. 1826]; J. de math. (5) 1 (1895), p. 181 beweist, dass sich auf irgendeiner (ebenen oder nicht ebenen) algebraischen Kurve stets, und noch auf unendlich viele Weisen, eine gewisse Anzahl von Bögen bestimmen lässt, deren algebraische Summe durch rationale Funktionen darstellbar ist; auch hier spielen eine Hauptrolle die Richtungskurven (Nr. **21**).

272) Wegen dieser und anderer abgeleiteter Kurven s. *„Salmon-Fiedler"*, Kap. 3; *G. Loria,* Spezielle . . . Kurven, Leipzig 1902, Abschn. 7 (p. 592 ff.).

273) *Zeuthen,* Diss. [268]), p. 93; *M. Chasles,* Paris C. R. 72 (1871), p. 394 = Nouv. Ann. de math. (2) 10 (1871), p. 97; *A. del Re,* Modena Mem. (2) 10 (1895), p. 415 (bei denen auch die Evolute behandelt wird); *G. F. Steiner,* Diss. Lund 1896; *W. A. Versluys,* Amsterdam Verh. 8 (1903), n. 5; Amsterdam Versl. (2) 12 (1903), p. 709. — Hinsichtlich des Problems der Glanzpunkte s. *P. H. Schoute,* Wien Ber. 90 (1884), p. 983; *del Re,* l. c.

274) *A. Cayley,* Quart. J. 11 (1871), p. 183 = Papers 8, p. 31; *S. Roberts,* Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 209; *Björling* [269]). — Über die Zerlegung der einem Zuge einer algebraischen Kurve parallelen Linien s. *A. Ferrari,* Rom Lincei Rend. (5) 14² (1905), p. 275.

275) Über positive Fusspunktkurven s. *de Jonquières* [127]) und J. de math. (2) 6 (1861), p. 113; *M. Chasles,* Paris C. R. 51 (1860), p. 860; *R. Sturm,* Math. Ann. 6 (1872), p. 241; *C. Juel,* Tidsskr. f. math. (3) 3 (1873), p. 177; 4 (1874), p. 3; über negative Fusspunktkurven *A. Ameseder,* Arch. Math. Phys. 64 (1879), p. 164; über sukzessive positive und negative *A. Rosén,* Diss. Lund 1884.

276) [Unrichtig bei *Steiner* [268]), p. 343 = Werke 2, p. 632; *E. Dewulf,* Nouv. Ann. de math. (1) 18 (1859), p. 174]; *G. Salmon,* Nouv. Ann. de math. (1) 18

kurve, der Ort der Mittelpunkte der mit einer gegebenen Kurve in Berührung 4^ter^ Ordnung befindlichen Kegelschnitte [277]); die Radialen, Ort der Endpunkte von Segmenten, die von einem festen Punkte ausgehen und mit den Krümmungsradien der gegebenen Kurve gleich und gleichgerichtet sind [278]); ferner die Kurve, die ein Punkt eines ebenen starren Systems beschreibt, das sich in seiner Ebene so bewegt, dass zwei seiner Punkte zwei gegebene algebraische Kurven oder auch eine und dieselbe durchlaufen (IV 3, Nr. **11**, *Schoenflies*) [279]).

Zahlreiche metrische Sätze abzählenden Charakters rühren von *M. Chasles* her, der sie auf Grund seines Korrespondenzprinzips ableitete: über ähnliche [280]) oder isoperimetrische [281]), gegebenen Kurven ein oder umbeschriebene Dreiecke; über Geraden, die zu einer oder mehreren Kurven tangent oder normal sind, über Segmente, die auf

(1859), p. 314; *E. de Jonquières,* ib. 20 (1861), p. 206; *C. Taylor,* Lond. R. Soc. Proc. 37 (1884), p. 138; Brit. Ass. Rep. 1885, p. 909; Messenger 16 (1886), p. 1; *A. T. Ljungh,* Diss. Lund. 1895; *M. Bernhard,* Diss. Tübingen 1897; *Zimmermann* [250]), p. 183.

277) *W. Bouwman,* Diss. Groningen 1896 = Math. Ann. 49 (1897), p. 24. — Die Abweichungs- oder Deviationsaxe a eines gewöhnlichen Punktes P einer Kurve f ist die Gerade, die P mit dem Mittelpunkte einer zur Tangente in P parallelen und unendlich benachbarten Sehne verbindet, also der Ort der Mittelpunkte der mit f in P sich in 3^ter^ Ordnung berührenden Kegelschnitte. Der Winkel von a mit der Normalen in P an f heisst die *Abweichung* oder *Deviation* von f in P. Die Einführung dieser für das Studium der Gestalt von f in der Nähe von P nützlichen Elemente pflegt man nur *A. Transon* zuzuschreiben, J. de math. (1) 6 (1841), p. 191 (vgl. *„Salmon-Fiedler“*, p. 467; III D 1, 2, Nr. **18**, *von Mangoldt*); sie findet sich aber schon bei *Carnot* [247]), p. 473 ff., und bei *G. Bellavitis,* Ann. sci. Regno Lomb.-ven. 5 (1835), p. 257; 8 (1838), p. 111 ff.; der erstere führt sie ein bei Aufstellung eines Systems *natürlicher Koordinaten* der Kurve (Krümmungsradius und Komplement der Deviation) [III D 1, 2, Nr. **15**, *von Mangoldt,* weitere Litteratur bei *E. Wölffing,* Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 142]. Die bezüglichen Formeln von *F. J. van den Berg,* Amst. Versl. en Meded. (3) 9 (1892), p. 85, die *Bouwman,* l. c., anwendet, finden sich bereits, nebst vielen andern, in der umfassenden Abhandlung von *S. R. Minich,* Ist. Ven. Mem. 6 (1856), p. 111.

278) *R. Tucker,* Lond. Math. Soc. Proc. 1 (1865), V; *G. Loria,* Pal. Rend. 16 (1901), p. 46; Period. di mat. (2) 4 (1901), p. 30.

279) *S. Roberts,* Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 286; 7 (1876), p. 216; *M. Chasles,* Paris C. R. 80 (1875), p. 346; 82 (1876), p. 431; *A. Cayley,* Cambr. Trans. 15 (1894), p. 391 = Papers 13, p. 505. Vgl. auch *C. Rodenberg,* Gött. Nachr. 1888, p. 176. — Über das System von zwei in derselben Ebene gleichen Kurven s. *Chasles* [275]).

280) Paris C. R. 78 (1874), p. 1373, 1599; 79 (1874), p. 877, 1427.

281) Paris C. R. 84 (1877), p. 55, 471, 627, 1051.

ihnen abgetragen sind und gegebene Verhältnisse haben, oder auch gegebene Winkel einschliessen, überhaupt Punkt- und Tangentenörter, die auf mannigfaltige Art erzeugt werden[282][283].

IV. Die Geometrie auf einer algebraischen Kurve.

23. Fundamentalsatz von Noether (vgl. I B 1c, Nr. **18**, **20**, **21**, *Landsberg*). *M. Noether* hat zuerst, für alle Fälle und streng, ohne auf Abzählungen Bezug zu nehmen, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass, wenn gegeben sind zwei teilerfremde ganze rationale Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ von x, y, eine weitere ganze Funktion $F(x, y)$ in der Form $F = Af + B\varphi$ darstellbar ist, wo A, B ebenfalls ganze Funktionen von x, y bedeuten. Für jeden, beiden Kurven $f = 0$, $\varphi = 0$ gemeinsamen Punkt (x_0, y_0) müssen sich zwei Reihenentwicklungen A', B' nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ finden lassen, derart, dass, bis auf Terme einer genügend hohen Dimension identisch

282) Paris C. R. 72 (1871), p. 577 [= Nouv. Ann. de math. (2) 10 (1871), p. 385]; 78 (1874), p. 577, 922; 81 (1875), p. 253, 355, 643, 757, 993, 1221; 82 (1876), p. 1399, 1463; 83 (1876), p. 97, 467, 495, 519, 589, 641, 757, 867, 1123, 1195. — S. auch *Steiner* [247]), p. 360 = Werke 2, p. 667 [Beweise bei *O. Zimmermann,* Zeitschr. Math. Phys. 32 (1887), p. 373; *Bernhard* [276])]; *H. Faure,* Nouv. Ann. de math. (2) 1 (1862), p. 64; 3 (1864), p. 331; *E. Laguerre,* Soc. philom. Bull. 1868 und 1871 = Oeuvres 2, p. 64, 178; *L. Saltel,* Brux. Bull. (2) 40 (1876), p. 586; 42 (1876), p. 300; Paris C. R. 82 (1876), p. 63, 324; 83 (1876), p. 529; *E. de Jonquières,* J. de math. (2) 6 (1861), p. 113; Paris C. R. 58 (1864), p. 535 (vgl. *M. Chasles,* ib. p. 537); Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 312; *M. Pieri,* Giorn. di mat. 24 (1884), p. 13; *K. Th. Vahlen,* J. f. Math. 118 (1896), p. 251; *E. Dewulf,* Nouv. Ann. de math. (3) 16 (1897), p. 385. — Über die Ordnung des Ortes eines Punktes, dessen Abstände von gegebenen Kurven eine vorgegebene Relation befriedigen, s. *G. Fouret,* Paris C. R. 83 (1876), p. 605; Erweiterungen bei *G. Halphen,* ib., p. 705; *G. Fouret,* Soc. philom. Mém. au centenaire . . ., Paris 1888, p. 77. — Über die Normale des Ortes eines solchen Punktes, dass die Länge der von ihm an eine gegebene Kurve gelegten Tangente oder Normale an eine bestimmte Relation gebunden sind [z. B. eine konstante Quadratsumme haben: s. [262])], s. *E. Jubé,* Nouv. Ann. de math. (1) 9 (1850), p. 209; *O. Terquem,* ib., p. 211; ib. 13 (1854), p. 315; *L. Painvin,* ib., 16 (1857), p. 85; *G. Bardelli,* Ist. Lomb. Rend. (2) 5 (1872), p. 167; *H. Laurent,* Traité d'analyse, Paris 2 (1887), p. 26.

283) Anwendungen der Cyklographie auf C^n hat *H. de Vries* gegeben, Amsterdam Verh. 8 (1904), N. 7. Er studiert hauptsächlich die „cyklographische Fläche" einer gegebenen Kurve, d. h. die abwickelbare Fläche (von gleichförmiger Neigung), die von jenen Normalen der Kurve, die gegen dessen Ebene um 45° geneigt sind, erzeugt ist; und macht von dieser eine Anwendung auf die Kreise, die eine oder mehrere Kurven berühren.

$$F = A'f + B'\varphi$$

wird [284]).

E. Bertini [285]) hat bemerkt, dass es für jeden r- resp. s-fachen Punkt von $f = 0$, $\varphi = 0$, der α ($\geqq rs$) Schnittpunkte beider Kurven absorbiert, genügt, die Vergleichung bis zu den Termen der Dimension

$$\alpha - rs + r + s - 2$$

inkl. zu treiben.

Bieten in einem solchen Punkte beide Kurven den „einfachen Fall" dar, d. h. besitzen sie daselbst keine gemeinsamen Tangenten, so genügt die Vergleichung bis zu den Termen der Dimension $r + s - 2$ inkl.; es ist z. B. *hinreichend*, dass $F = 0$ dort die Multiplizität $r + s - 1$ aufweist; die Kurven $A = 0$, $B = 0$ haben daselbst dann die Multiplizität $s - 1$, $r - 1$ resp. [286]): dies ist gerade der Fall, welcher in der *Brill-Noether*'schen Theorie der linearen Scharen zur Anwendung gelangt.

24. Die linearen Scharen [287]) **von Punktgruppen.** Auf einer ebenen algebraischen irreduzibeln Kurve f schneiden die Kurven eines

---

284) Für einfache Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$ hat *Noether* seinen Satz Math. Ann. 2 (1869), p. 314 aufgestellt; einen für alle Fälle gültigen Beweis gab er Math. Ann. 6 (1872), p. 351 (Auszug Gött. Nachr. 1872, p. 490). Weitere Untersuchungen behufs Vereinfachung des Beweises resp. Umformung des Kriteriums von *Noether* rühren her von *G. Halphen,* Soc. math. de France Bull. 5 (1877), p. 160; *A. Voss,* Math. Ann. 27 (1886), p. 527; *Noether,* Math. Ann. 30 (1887), p. 410; *W. Weiss,* Monatshefte Math. Phys. 7 (1896), p. 321; auf funktionentheoretischem Wege *L. Stickelberger,* Math. Ann. 30 (1887), p. 401; *A. Brill,* Math. Ann. 39 (1891), p. 129; auf mehr geometrischem Wege *H. G. Zeuthen,* Tidsskr. f. Math. (5) 5 (1887), p. 65 = Math. Ann. 31 (1887), p. 235; *Macaulay* [366]); *Scott* [366]). Vgl. auch, bezüglich Erweiterungen und des Zusammenhanges mit *Kronecker*'s Theorie der Modulsysteme (I B 1c, *Landsberg*), *D. Hilbert,* Math. Ann. 36 (1890), p. 473 (Auszug Gött. Nachr. 1888, p. 450; 1889, p. 25, 423); *F. Severi,* Rom Linc. Rend. (5) 11^1 (1902), p. 105; Pal. Rend. 17 (1902), p. 73; Torino Atti 41 (1905), p. 205; *J. König,* Einleitung in die allg. Theorie der alg. Grössen, Leipzig 1903 (ungarisch 1902), p. 385 ff.; *E. Lasker* [160]); *R. Torelli,* Torino Atti 41 (1905), p. 224; weitere Verallgemeinerungen bei *G. Z. Giambelli,* Torino Atti 41 (1906), p. 235. — Eine neue, einfachere und mehr geometrische Darlegung seines ersten allgemeinen Beweises entwickelte *M. Noether,* Math. Ann. 40 (1891), p. 140; vgl. auch *Picard-Simart* [287]), p. 1—7.

285) Math. Ann. 34 (1889), p. 447. Vgl. auch *Noether*, ib. p. 450; *H. J. Baker,* Math. Ann. 42 (1893), p. 601. — *Bertini,* l. c., hat bemerkt, dass Satz und Beweis einen ausschliesslich algebraischen Charakter besitzen; von diesem Gesichtspunkt aus entwickelt er die Theorie systematisch, Ist. Lomb. Rend. (2) 24 (1891), p. 1095.

286) Ein einfacher und direkter algebraischer Beweis bei *Voss* [284]), p. 532; ein geometrischer bei *Ch. A. Scott,* Math. Ann. 52 (1899), p. 593.

287) In diesem Artikel wird die Theorie der linearen Scharen nach der

linearen Systems ∞^r $(r \geqq 0)$ [Nr. 3] S[288]) eine *lineare Schar* von Punktgruppen aus, unter denen wir nach unserer Willkür einige oder auch keine der auf f gelegenen Basispunkte von S einschliessen können; im ersten Falle besitzt die lineare Schar in den bezüglichen Basispunkten ebensoviel *feste Punkte.* Man darf annehmen, dass keine Kurve von S die Kurve f enthält[289]); alsdann hat man ∞^r solcher Punktgruppen, und, wenn jede aus n Punkten besteht, sagt man, dass sie eine lineare Schar g_n^r bilden, von der *Ordnung* n und der *Dimension* r; eine einzelne Gruppe der Schar wird mit G_n bezeichnet. Der Begriff der linearen Schar ist gegenüber birationalen Transformationen von f, sogar gegenüber nur rationalen, invariant[290]).

---

algebraisch-geometrischen Methode von *A. Brill* und *M. Noether* behandelt, Math. Ann. 7 (1873), p. 269 (vorher Gött. Nachr. 1873, p. 116), die zuerst darauf ausgingen, die auf transzendentem Wege durch *Riemann*[37]) und *Clebsch-Gordan*[44]) aufgestellten Theoreme über algebraische Funktionen (Kurven) rein algebraisch herzuleiten. Vgl. auch *Noether,* Preisschr., Berlin Abh. 1882 [Auszug J. f. Math. 93 (1882), p. 271]; *E. Bertini,* Ann. di mat. (2) 22 (1893), p. 1; *H. Stahl,* Theorie der *Abel*'schen Funktionen, Leipzig 1896, Abschn. 2 u. 4; *E. Picard* et *G. Simart,* Théorie des fonctions alg. de deux variables indép., 2, Paris, 1900. — Hinsichtlich der funktionentheoretischen Methode s. II B 2, *Wirtinger*; der arithmetischen II B, Ergänzungsteil, 2; *Hensel,* der mehrdimensionalen III C 9, *Segre.* Arithmetische Entwickelungen geben *R. Dedekind* und *H. Weber,* J. f. Math. 92 (1880), p. 181; *Hensel-Landsberg*[160]); mehrdimensionale *C. Segre,* Ann. di mat. (2) 22 (1893), p. 41. — Bibliographische Notizen über die Theorie der Punktgruppen bei *F. Hardcastle,* Am. math. soc. Bull. (2) 4 (1898), p. 390; Brit. Ass. Rep., Bradford 1900, p. 121; Belfast 1902, p. 81; Cambridge 1904, p. 20.

288) Die Voraussetzung der Irreduzibilität von f ist *nicht* durchaus notwendig für *alles* folgende: so z. B. *nicht* für den Restsatz (Nr. **25**); über die bei reduziblem f eintretenden Modifikationen s. Nr. **32.** — Man darf stets annehmen (Nr. **12**), dass f und die Kurve von S nur gewöhnliche vielfache Punkte mit getrennten Tangenten besitzen; jedoch bleiben die nachfolgenden, auf die Adjungierten, den Restsatz etc. bezüglichen Eigenschaften ungeändert auch bei beliebig singulärer Kurve f, falls man nicht nur die unmittelbaren, sondern auch die sukzessiven Multiplizitäten (Nr. **12, 14, 15**) berücksichtigt. Vgl. *Brill-Noether*[287]), § 7; *Noether*[197]).

289) In der That, wenn f zusammen mit einer variablen Kurve eines linearen Systems ∞^t ein lineares System bildet, das in einem gegebenen linearen System ∞^h S' enthalten ist, so gehen durch jede Gruppe der von S' ausgeschnittenen Schar ∞^{t+1} Kurven von S', und die Schar selbst ist eine ∞^r, wo $r = h - t - 1$. Sie lässt sich also stets auf f ausschneiden durch ein lineares System ∞^r, von dem eine und nur eine Kurve durch jede Gruppe der Schar hindurchgeht. Vgl. *Bertini*[287]), n. 3; *Segre*[287]), n. 13.

290) Besteht hingegen zwischen zwei Kurven f, f' eine algebraische Korrespondenz mit beliebigen Indizes, so entsprechen einer linearen Schar auf f Gruppen einer algebraischen Schar auf f', die in einer und derselben linearen Schar enthalten sind: *F. Severi*[295]), erstes Zitat, p. 190.

Nimmt man hinweg resp. fügt man hinzu n' feste Punkte bei allen Gruppen einer g_n^r, so entsteht eine $g_{n \pm n'}^r$.

Eine Gruppe von g_n^r kann auch *vielfache* Punkte besitzen. Ist ein Punkt A von f kein Basispunkt von S, und besitzt ein von A ausgehender Kurvenzweig in A mit einer Kurve von S die Schnittmultiplizität ν, so ist A als Ursprung des Zweiges ein ν-facher Punkt der so bestimmten Gruppe. Ist dagegen A ein Basispunkt von S, und seien I und $I + \nu$ die Schnittmultiplizitäten des Zweiges mit einer *allgemeinen* und einer *besonderen* Kurve von S in A, dann ist A, als Ursprung des Zweiges, ein ν-facher resp. $(i + \nu)$-facher Punkt der besonderen Gruppe, je nachdem A nicht als fester Punkt der Schar angesehen ist, oder aber als i-facher $(i \leqq I)$ für eine allgemeine Gruppe.

Durch r allgemeine Punkte von f wird eine und nur eine Gruppe der g_n^r bestimmt; allgemeiner legen k $(\leqq r)$ allgemeine Punkte von f k Bedingungen den sie enthaltenden Gruppen auf, und gehören daher ∞^{r-k} Gruppen der Schar an. Reduziert sich dagegen die Anzahl der Bedingungen für obige Gruppen auf $k' < k$, so sagt man, dass sie für g_n^r eine *neutrale Gruppe* von der Gattung $k - k'$ bilden (vgl. Nr. 28).

Der Begriff der linearen Schar ist indessen nicht an das lineare System S gebunden, von dem er seinen Ausgang genommen hat. Jedes ∞^r System von Gruppen von je n Punkten auf f, derart, dass seine Gruppen rational von r Parametern abhängen, so dass die Bedingung, einen beliebig auf f fixierten Punkt zu enthalten, eine lineare Relation zwischen den Parametern involviert, ist eine g_n^r.[291])

Eine andere Definition von g_n^r bekommt man, wenn man die Frage stellt, ob jedes algebraisches System von ∞^r Gruppen von je n Punkten auf f, derart, dass r allgemeine Punkte von f einer und nur einer Gruppe angehören (diese heisst auch eine *Involution* der Ordnung n und der Dimension oder Stufe r) eine g_n^r sei. Für eine rationale Kurve f ist das immer richtig[292]); andernfalls ist die erwähnte Eigenschaft nicht

291) Über die analytische Definition der g_n^r mittels der rationalen Funktionen der an die Gleichung $f(x, y) = 0$ gebundenen Koordinaten x, y, vgl. II B 2, Nr. 9, 25, *Wirtinger*. Solche Funktionen repräsentieren die linearen Scharen, falls man nur von den festen Punkten absieht; die Berücksichtigung der letzteren, die für die rein algebraische Theorie wesentlich ist, verdankt man *Brill-Noether*[287]).

292) Vgl., auch für eine allgemeinere Eigenschaft, *Segre*[287]), n. 24. — Im Besondern ist auf einer rationalen Kurve jede Involution ∞^1 rational, was auch z. B. aus der Formel von *Zeuthen* (Nr. 4) hervorgeht, wo aus $x' = 1$ und daher $y = 0$ folgt, dass für $p = 0$ auch $p' = 0$. Das liefert auch den Satz von *J. Lüroth*,

immer giltig für $r = 1$,[293]) d. h. es existieren *irrationale*[294]) Involutionen ∞^1; indessen haben *G. Castelnuovo* und *G. Humbert*[295]) festgestellt,

---

Math. Ann. 9 (1875), p. 163, dass, wenn für eine Kurve die Koordinaten ihrer Punkte rationale Funktionen eines Parameters sind, sich stets der Parameter rational in einen andern derart transformieren lässt, dass zwischen dessen Werten und den Kurvenpunkten *ein-eindeutige* Korrespondenz besteht [I B 1 c, Nr. **22**, *Landsberg*]. Vgl. auch *W. F. Osgood,* Am. Math. Soc. Bull. (2) 2 (1896), p. 168; und weiter, auch für Ausdehnungen, *P. Gordan,* Math. Ann. 29 (1886), p. 318; *H. Weber,* Lehrbuch der Algebra 2, Braunschweig 1892, p. 404 ff.; *E. Netto,* Vorl. üb. Algebra, 2, Leipzig 1900, p. 505; *L. Autonne,* Brux. Mém. cour. 59 (1901), p. 245 (App. I). — Bezüglich der zahlreichen Arbeiten (von *G. Battaglini, Em. Weyr, C. le Paige, W. F. Meyer, G. Castelnuovo, F. Deruyts, W. Stahl, L. Berzolari* u. a.) über die Theorie der Involutionen auf den rationalen Kurven (vielfache Elemente, neutrale Gruppe, u. s. w.), s. III C 5, *Kohn,* Spezielle algebraische Kurven; III C 9, *Segre,* Mehrdimensionale Räume.

293) Überdies ist notwendig und hinreichend, dass die Gruppen der Schar ein-eindeutig den Werten eines Parameters entsprechen: *Bertini* [287]), n. 42; *Segre* [287]), n. 30.

294) Einige Eigenschaften solcher Involutionen, insbesondere eine Ausdehnung des *Riemann-Roch*'schen Satzes (Nr. **27**) auf sie, gab *G. Castelnuovo,* Rom Linc. Rend. (4) 7^2 (1891), p. 294. Vgl. auch *F. Amodeo,* Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 227. Über irrationale Involutionen auf hyperelliptischen Kurven s. *R. Torelli,* Palermo Rend. 19 (1905), p. 297.

295) S. [35]), wo *Abel*'sche Integrale verwendet werden; der Beweis von *Humbert* ist von *Picard-Simart* [287]) p. 64 aufgenommen. Einen geometrischen Beweis liefert *M. de Franchis,* Rom Linc. Rend. (5) 12^1 (1903), p. 303, mittels der algebraischen Fläche, die die ∞^2 Paare von Punkten zweier algebraischer Kurven abbildet [für diese Flächen s. *A. Maroni,* Torino Atti 38 (1903), p. 149; *M. de Franchis,* Pal. Rend. 17 (1903), p. 104; *F. Severi,* Torino Atti 38 (1903), p. 185; Torino Mem. (2) 54 (1903), p. 1 (n. 12 ff.)]; für die elliptischen Kurven (d. h. für $p = 1$) war der Satz bereits geometrisch von *G. Castelnuovo* bewiesen, Torino Atti 24 (1888), p. 4 (n. 15). — Nach *F. Enriques,* Pal. Rend. 10 (1895), p. 30 ist eine rationale Schar ∞^r ($r \geqq 1$) von Gruppen von n Punkten auf f entweder eine lineare Schar, oder in einer solchen Schar g_n^s ($s > r$) enthalten [vgl. auch *F. Severi,* Ann. di mat. (3) 12 (1905), p. 55 (Auszug Paris C. R. 140 (1905), p. 926) (n. 2), wo ein Satz über die Korrespondenzen mit der Wertigkeit Null zwischen zwei Kurven bewiesen wird, welcher den vorigen Satz umfasst]. Für $r = 1$ hängt das zusammen mit der Darstellung der Koordinaten x, y der Punkte von f als „irrationaler Funktionen vom Grade n" eines Parameters z, d. i. als rationale Funktionen von z und der Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades, mit in z rationalen Koeffizienten; hierüber und über allgemeinere Fragen vgl. auch *Enriques,* Math. Ann. 51 (1897), p. 134. — *F. Severi,* letztes Zitat, n. 1, hat auf transzendentem Wege bewiesen, dass, wenn ein irreduzibles algebraisches ∞^1 System S von Gruppen aus n Punkten auf f derart ist, dass sich die Gesamtheit der ν Gruppen, die einen variabeln (ν-mal gezählten) Punkt x enthalten, in einer linearen Schar (der Ordnung $n\nu$) bewegt, alsdann alle Gruppen von S in ein und derselben linearen Schar (der Ordnung n) enthalten sind [er macht hiervon Anwendung, um das *Abel*'sche Theorem (Nr. **33**) auf Flächen auszu-

dass mit Ausnahme der Involutionen ∞^r, deren Gruppen erhalten werden, indem man auf alle möglichen Arten r ($\geqq 1$) Gruppen einer irrationalen Involution ∞^1 vereinigt, jede Involution der Dimension > 1 eine lineare Schar ist.

Es kann vorkommen, dass eine g_n^r ($r > 1$) so beschaffen sei, dass jene ihrer Gruppen, die einen beweglichen Punkt gemein haben, stets auch weitere $\varrho - 1$ Punkte ($1 < \varrho < n$) gemein haben. Alsdann existiert auf f eine Involution ∞^1 (rational oder nicht) der Ordnung ϱ, derart, dass jede Gruppe der g_n^r aus k von deren Gruppen ($n = k\varrho$) besteht; g_n^r heisst dann mit dieser Involution *zusammengesetzt*. *Bertini* hat bewiesen, dass mit Ausnahme des erwähnten Falles es unmöglich ist, dass die Gruppen einer g_n^r, die s ($1 < s < r$) bewegliche Punkte von f gemein haben, weitere gemeinsame Punkte notwendig besitzen [296]. — Wenn eine g_n^r k ($\geqq 0$) feste Punkte hat, und die durch deren Wegnahme entstehende g_{n-k}^r mit einer Involution ∞^1 der Ordnung ϱ zusammengesetzt ist, so gilt $n \geqq \varrho r + k$. Für $r = n$ wird $k = 0$, $\varrho = 1$; wenn also auf f eine g_n^n existiert, so ist sie aus allen Gruppen von n Punkten von f gebildet, und f ist rational: mithin ist für eine g_n^r auf einer nicht rationalen Kurve stets $n > r$.

Vermöge der linearer Scharen ∞^1 lässt sich ein neuer Ausdruck für das Geschlecht p herstellen [297]. Sind ν die Multiplizitäten einer solchen g_m^1, so zeigt man mittels des Korrespondenzprinzips für rationale Gebilde, dass die Differenz $\sum(\nu - 1) - 2m$ ungeändert bleibt,

---

dehnen]. Einen algebraischen Beweis dieses Satzes hat *G. Castelnuovo* abgeleitet, Rom Linc. Rend. (5) 15^1 (1906), p. 337, auf Grund eines Kriteriums, das entscheidet, wann auf einer Kurve f vom Geschlechte p ein algebraisches irreduzibles ∞^1 System von Gruppen von n Punkten (d. h. der *Ordnung* n) — so beschaffen dass ein allgemeiner Punkt von f einer endlichen Zahl ν (> 0) von Gruppen des Systems angehört — in einer linearen Schar von der Ordnung n enthalten ist. *Castelnuovo* beweist, dass ein solches System höchstens $2\nu(n+p-1)$ Doppelpunkte besitzt, und dass dasselbe dann und nur dann in einer linearen Schar der Ordnung n enthalten ist, wenn das Maximum erreicht ist. Es ergiebt sich ausserdem, wenn f zwei Involutionen von Ordnungen n, n' und von Geschlechtern π, π' enthält, die Beziehung:

$$p \leqq (n-1)(n'-1) + n\pi + n'\pi'.$$

296) Hieraus folgt, dass wenn g_n^r weder zusammengesetzt ist, noch feste Punkte besitzt, r *beliebig* aus irgend einer allgemeinen Gruppe der g_n^r herausgegriffene Punkte nur dieser Gruppe allein angehören. Zu alle dem s. *Bertini* [303]), und auch [287]), n. 29, 34, 36.

297) *Segre* [287]), § 8. In mehr analytischer Gestalt bei *Noether* [49]); *Dedekind-Weber* [287]), p. 264.

wenn man auf f die lineare Schar wechselt. In der That erhält man[298]):

$$\sum(\nu - 1) - 2m = 2p - 2.$$

25. Der Restsatz; Voll- und Teilscharen. Teilt man die Schnittpunkte von f mit einer Adjungierten, abgesehen von den vielfachen Punkten von f, irgendwie in zwei Gruppen, so heissen diese zu einander *residual*, oder die eine der *Rest* (das *Residuum*) der andern[299]). Zwei Gruppen G_n und $G_{n'}$, die zu einer und derselben Gruppe G_q residual sind, heissen *korresidual*: übrigens dürfen die beiden Adjungierten, die f in G_n, G_q resp. $G_{n'}$, G_q schneiden, gleicher oder verschiedener Ordnung sein, mithin kann $n \gtreqless n'$ sein[300]).

Brill und *Noether*[301]) haben, gestützt auf den *Noether*'schen Fundamentalsatz (Nr. **23**) den „*Restsatz*" aufgestellt: „Wenn G_n und $G_{n'}$ Reste von G_q sind, und überdies G_n Rest von $G_{q'}$, so ist auch $G_{n'}$ Rest von $G_{q'}$." Mit andern Worten: Der Begriff korresidualer Gruppen G_n, $G_{n'}$, ... ist unabhängig von einem partikulären Reste. — Im besondern erhellt, dass eine lineare Schar stets aus f ausgeschnitten gedacht werden kann durch ein lineares System von Adjungierten (genügend hoher Ordnung); der Restsatz sagt daher aus, dass, wenn eine Punktgruppe Rest von irgend einer Gruppe einer linearen Schar ist, sie auch Rest jeder andern Gruppe der Schar ist, somit als „Rest der Schar" bezeichnet werden kann. Kurz, eine lineare Schar ist nichts anderes als eine Schar korresidualer Gruppen.

Eine g_n^r heisst eine *Vollschar* (serie *completa* oder *normale*), wenn keine Schar der Ordnung n und einer Dimension $> r$ existiert, die g_n^r (d. h. alle Gruppen g_n^r) enthielte; andernfalls wird g_n^r eine *Teilschar* (serie *incompleta* oder *parziale*) genannt. Alle Adjungierten von einer gegebenen Ordnung, mögen sie durch feste einfache Punkte von f gehen oder nicht, schneiden f, ausser jenen festen Punkten und den

298) Insbesondere ergiebt sich für die aus f von einem allgemeinen Geradenbüschel ausgeschnittene Schar der zweite der in (13) Nr. **15** angegebenen Ausdrücke von p; die *Riemann*'sche Formel (2) erhält man beim Schnitt mit dem Büschel $x =$ const.

299) Nach *J. J. Sylvester*, vgl. „*Salmon-Fiedler*", p. 174, 414.

300) Statt der *Brill-Noether*'schen Bezeichnung „korresidual" pflegt man auch mit *Dedekind-Weber* [287]) „äquivalent" zu sagen. — Gegenwärtig heissen jedoch, nach allgemeinem Gebrauche, zwei Gruppen korresidual oder äquivalent, nur wenn sie Reste von G_q in bezug auf zwei Adjungierte *derselben Ordnung* sind, d. h. wenn sie derselben linearen Schar angehören.

301) S. [287]), § 1. Hinsichtlich des Restsatzes, auch für irgendwie singuläre Kurven, s. noch *Noether* [197]), n. 27, 28; [285]), p. 451.

vielfachen Punkten von f, in einer Vollschar; umgekehrt lässt sich jede Vollschar auf diese Weise erzeugen[302]). Daher existiert eine und nur eine Vollschar der Ordnung n, die eine gegebene g_n enthält (im besondern, die eine gegebene G_n enthält, so dass zwei g_n mit einer gemeinsamen Gruppe in ein und derselben Vollschar der Ordnung n enthalten sind). Um sie zu konstruieren, hat man nur durch eine ihrer Gruppen G irgend eine Adjungierte zu legen; diese schneidet f, abgesehen von G und den vielfachen Punkten, in einer Gruppe G', und die Adjungierten der nämlichen Ordnung, die durch G' gehen, schneiden f in der gesuchten Vollschar[302a]).

Daraus geht hervor, dass sich der Restsatz in zwei Teile spaltet, von denen der eine *invariante* (proprio sensu der Geometrie auf der Kurve angehörige) aussagt, dass jede Gruppe eine Vollschar bestimmt (und sich auf die Operationen der Addition und Subtraktion von Scharen bezieht, vgl. Nr. **26**), während der andere *projektive* Teil (zur Geometrie der Ebene gehörig) die Eigenschaft ausdrückt, dass sich jede Vollschar durch ein System von Adjungierten in der bezeichneten Weise ausschneiden lässt[303]).

Ist g_n^s die Vollschar, in der eine g_n^r enthalten ist, so nennt man $s - r$ ($\geqq 0$) den *Defekt* (*défaut*, *deficiency*, *deficienza*) der g_n^r; er ist invariant gegenüber birationaler Transformation von f.

Zwei Scharen g_n^r und $g_n^{r'}$, die eine g_n^ϱ ($\varrho \geqq 0$), aber nicht eine $g_n^{\varrho+1}$ gemein haben, sind in einer g_n^σ, aber nicht in einer $g_n^{\sigma-1}$ enthalten, wenn $r + r' = \varrho + \sigma$; und umgekehrt (vgl. Nr. 3).

26. Anwendung elementarer Operationen auf lineare Scharen. Scharen, welche die Summen oder Vielfache andrer Scharen sind; Residualscharen. Liegen zwei Vollscharen g_n^r und $g_{n'}^{r'}$ auf f vor, so sind alle Gruppen von $N = n + n'$ Punkten, die durch Vereinigung irgend einer Gruppe von g_n^r mit irgend einer von $g_{n'}^{r'}$ entstehen, in ein

---

302) *Noether* [197]), n. 27, 28.

302a) Die Eindeutigkeit der Vollschar, welcher eine gegebene Punktgruppe angehört, kann in einfacher Weise festgestellt werden, indem man den *Enriques*schen Beweis[322]) von dem analogen Satz bezüglich der Flächen nachbildet. Dadurch hat man auch den Vorzug, sogleich zur invarianten Form des Restsatzes zu gelangen: s. unten und Nr. **26**.

303) Vgl. *G. Castelnuovo* und *F. Enriques,* Math. Ann. 48 (1896), p. 260. — Analytisch besteht die durch eine gegebene G_n bestimmte Vollschar aus den Gruppen der Nullstellen der rationalen Funktionen von x, y (die an die Gleichung von f gebunden sind) der Ordnung n, die ihre Pole in G_n besitzen. So ersetzt (*Brill-Noether,* Bericht, p. 356) der Restsatz in der rein algebraischen Theorie „die *Riemann*'sche Bestimmung der *allgemeinsten* durch ihre Unendlichkeitspunkte gegebenen algebraischen Funktion".

und derselben Vollschar g_N^R enthalten, der „*Summe*“ der beiden gegebenen; man schreibt $g_N^R = g_n^r + g_{n'}^{r'}$.[304]) Fallen die beiden gegebenen Scharen zusammen, so erhält man die *doppelte* Schar einer gegebenen; Analoges gilt für die Summe mehrerer Vollscharen und für die k-fache Schar einer gegebenen Vollschar.

Um die entgegengesetzte Operation, die *Subtraktion* zweier linearer Scharen zu definieren, beachte man zunächst, dass, wenn G_n eine beliebige Gruppe auf f ist, und g_N^R ($N = n + n'$, $n' \geqq 0$) eine Vollschar, die Reste von G_n in Bezug auf g_N^R (d. h. diejenigen Gruppen von g_N^R, die G_n enthalten, vermindert um G_n), falls sie existieren, eine Vollschar $g_{n'}^{r'}$ bilden[305]), die „*Residualschar*“ von G_n in Bezug auf g_N^R. — Sind nun auf f zwei Vollscharen g_N^R und g_n^r gegeben, und ist eine Gruppe von g_n^r in irgend einer Gruppe von g_N^R enthalten, so gilt das Nämliche für jede weitere Gruppe von g_n^r, und es existiert eine dritte völlig bestimmte Vollschar $g_{n'}^{r'}$ ($n + n' = N$), so, dass $g_n^r + g_{n'}^{r'} = g_N^R$ (das kann man die «invariante Form» des Restsatzes nennen). Die beiden Scharen g_n^r und $g_{n'}^{r'}$ stehen also in der Beziehung, dass jede von ihnen alle Reste irgend einer Gruppe der andern in Bezug auf g_N^R umfasst; sie sind „*Residuen*“ von einander in Bezug auf g_N^R, oder auch, jede ist die *Differenz* von g_N^R und der andern ($g_{n'}^{r'} = g_N^R - g_n^r$).[306])

Bei einigen Fragen ist es zweckmässig, als *Summe* zweier *beliebiger* Scharen g_n^r und $g_{n'}^{r'}$ die Schar von der Ordnung $n + n'$ und von der niedrigsten Dimension ($\geqq r + r'$, wo sicherlich das Zeichen $>$ gilt, wenn $rr' > 0$) zu definieren, die die aus irgend einer Gruppe von g_n^r und irgend einer von $g_{n'}^{r'}$ zusammengesetzten Gruppe enthält; hieraus verstehen sich ohne weiteres die Definitionen der Summe mehrerer linearer Scharen und der k-fachen Schar einer gegebenen. Die Eigenschaften dieser sukzessiven Vielfachen einer linearen Schar sind vor allem von *G. Castelnuovo*[307]) untersucht worden, der ver-

304) Vgl. *Castelnuovo-Enriques*, l. c., p. 257.

305) *Bertini* [287]), n. 11, 12; *Segre* [287]), n. 56. — r' ist die Differenz zwischen R und der Anzahl ($\leqq n$) der unabhängigen Bedingungen, die G_n den Gruppen von g_N^R auferlegt. — Der Satz des Textes gilt auch noch, wenn alle Punkte von G_n für g_N^R fest sind; die Bedingungen, dass dann auch die umgekehrte Eigenschaft besteht, werden durch den Reduktionssatz (Nr. **27**) ausgedrückt.

306) *Bertini*, l. c. n. 13; *Segre*, l. c. n. 58.

307) Pal. Rend. 7 (1893), p. 89. Diese Eigenschaften sind eng verknüpft mit der Untersuchung der *Postulation* einer gegebenen Kurve eines Raumes von l ($\geqq 3$) Dimensionen für die Gebilde von $l-1$ Dimensionen eines gegebenen linearen Systems (III C 8, 9, *Rohn; Segre*). Nach *Castelnuovo*, l. c., ist für $k > \chi + \pi - p$ die k-fache Schar von g_n^r eine nicht speziale g_{nk}^{nk-p-d} (Nr. **27**),

schiedene Anwendungen davon gemacht hat, so z. B. auf die Bestimmung des (auch wirklich erreichten) Maximalgeschlechts π einer Kurve, die eine nicht zusammengesetzte g_n^r enthält, nämlich:

$$\pi = \chi\left[n - r - \tfrac{1}{2}(\chi - 1)(r - 1)\right],$$

unter χ die grösste ganze Zahl $< \frac{n-1}{r-1}$ verstanden[308]).

27. Speziale und nicht-speziale Scharen. Ist f irreduzibel, von der Ordnung m und dem Geschlecht p, so ist das lineare System der Adjungierten einer gegebenen Ordnung $l \geqq m - 3$ *„regulär"* in Bezug auf die Gruppe der vielfachen Punkte von f.[309]) Ist $l > m - 3$, also $l = m - 3 + \alpha$ $(\alpha \geqq 1)$, so ist die auf f von diesen Adjungierten ausgeschnittene Vollschar eine $g^{m\alpha + p - 2}_{m\alpha + 2p - 2}$; wenn also $m > 2$, existieren immer Adjungierte irgend einer Ordnung $> m - 3$. Die Adjungierten der Ordnung $m - 3$, die *„φ-Kurven"*, existieren noch nicht für $p = 0$, wohl aber stets für $p \geqq 1$ (für $p = 1$, $m > 3$ eine einzige); sie sind dadurch charakterisiert, dass von den Schnittpunkten (abgesehen von den vielfachen Punkten) von f mit einer Adjungierten der Ordnung l höchstens p oder aber $p - 1$ durch die übrigen bestimmt sind, je nachdem $l > m - 3$ oder aber $= m - 3$ ist, während für $l < m - 3$ jene Zahl nicht mehr ausschliesslich von p abhängt[310]).

Eine lineare Schar heisst eine *speziale* oder *nicht-speziale*, je nachdem sie vermöge eines linearen Systems von φ (also für $p > 1$) erhalten werden kann oder nicht. Das (reguläre) System aller φ schneidet f in einer Vollschar g^{p-1}_{2p-2}, der einzigen g^{p-1}_{2p-2} auf f; man nennt sie

---

deren Defekt d $(0 \leqq d \leqq \pi - p)$ nicht mehr von k abhängt; damit $d = 0$ ist, ist notwendig und hinreichend, dass auf der Kurve nicht $\geqq 2$ Punkte existieren, die der g_n^r eine einzige Bedingung auferlegen. Für die Schar, die von allen C^k aus einer irreduzibeln C^n vom Geschlecht p ausgeschnitten wird (d. h. für die k-fache Schar der von allen Geraden ausgeschnittenen g_n^2) gilt genauer, dass wenn $k \geqq n - 2$, die Dimension $nk - \pi$ ist, und $d = \pi - p$, indem alsdann $\pi = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ wird.

308) Dasselbe Ergebnis erhielt *Castelnuovo*, Torino Atti 24 (1889), p. 346 (n. 27), bei Behandlung der Theorie der linearen Scharen nach mehrdimensionaler Methode; sodann, ohne aus der Ebene herauszugehen, *Bertini*, Torino Atti 26 (1890), p. 118. Ein anderer Beweis bei *S. Kantor*, Acta math. 25 (1900), p. 113.

309) D. h. die von diesen Punkten einer allgemeinen Kurve des Systems auferlegten Bedingungen sind alle unabhängig von einander (Nr. 35). Der Satz wurde mittels des *Dirichlet*'schen Prinzips von *Riemann* [37]), art. 4 bewiesen; algebraisch von *Brill-Noether* [287]), p. 277; er gilt im allgemeinen nicht mehr für die Adjungierten der Ordnung $< m - 3$. Vgl *Bertini* [287]), n. 17.

310) *Brill-Noether*, l. c., p. 278.

die *kanonische Schar* [311]; sie besitzt keine festen Punkte [312]) und ist nicht zusammengesetzt, so lange nicht f *hyperelliptisch* ist [313]). Die Spezialscharen sind somit die kanonische Schar und die in ihr enthaltenen Scharen; für sie ist $r \leqq p - 1$, $n \leqq 2p - 2$. [314])

Die vorstehenden Eigenschaften fliessen alle aus folgenden zwei Sätzen:

Reduktionssatz: „Damit die durch eine gegebene Gruppe von $n + 1$ Punkten bestimmte Vollschar der Ordnung $n + 1$ in einer derselben, P, einen festen Punkt besitze, ist notwendig und hinreichend, dass sich durch die übrigen n Punkte der Gruppe eine nicht durch P gehende φ legen lässt“ [315]).

---

311) Nach *Segre* [287]), n. 75. — Analytisch sind die Gruppen der kanonischen Schar die Gruppen von Nullstellen der zu f gehörigen *Abel*'schen Differentiale 1. Gattung (Nr. **33**).

312) *Brill-Noether,* l. c., p. 285. Nicht einmal die (nicht speziale) von den Adjungierten der Ordnung $> m - 3$ aus f ausgeschnittene Vollschar hat feste Punkte. Die φ können jedoch ausserhalb f gemeinsame Punkte besitzen.

313) Ausgesprochen von *Brill-Noether,* l. c., p. 286, bewiesen von *Noether* [372]), p. 266. Vgl. *Picard* [161]), p. 490; *Bertini* [287]), n. 35. — *Hyperelliptisch* heisst eine Kurve vom Geschlecht $p > 1$ mit einer $g_2{}^1$ (im besondern also jede Kurve vom Geschlecht $p = 2$). Bei ihr ist jede speziale, von festen Punkten freie g_n^r zusammengesetzt mit der $g_2{}^1$, und falls sie eine Vollschar ist, gilt überdies $n = 2r$, während die einzige nicht speziale zusammengesetzte Vollschar von einer Dimension > 1 eine mit der $g_2{}^1$ zusammengesetzte g_{2p}^p ist. Umgekehrt ist jede Kurve mit einer zusammengesetzten g_{2r}^r $(r > 1)$ eine hyperelliptische, oder elliptische $(p = 1)$, oder rationale $(p = 0)$. — Aus der *Riemann*'schen Formel [383]) für die Anzahl der zwei linearen Scharen ∞^1 gemeinsamen Punktepaare folgt, dass die die Paare der $g_2{}^1$ einer ebenen hyperelliptischen Kurve verbindenden Geraden eine (rationale) Kurve der Klasse $m - p - 1$ umhüllen; vgl. auch *Humbert* [364]), p. 316; *C. Segre,* Math. Ann. 30 (1887), p. 218.

314) Die durch eine Gruppe von n *allgemein* gewählten Punkten bestimmte Vollschar ist, sobald $n > p$, eine (nicht speziale) g_n^{n-p}, während sie sich für $n \leqq p$ auf jene einzige Gruppe reduziert. Danach ist $p + 1$ die kleinste Anzahl von Punkten, die man *in allgemeiner Lage* auswählen darf, um eine Gruppe einer Schar ∞^1 zu bestimmen. Diese Eigenschaft nahm *Weierstrass,* Werke 4, p. 69, als (ersichtlich bei birationalen Transformationen invariante) Definition von p. S. auch *Ed. Weyr,* Diss. Gött. 1873 = Prag Abh. (6) 6 (1874); Wien Ber. 69 (1874), p. 399; *Halphen,* Étude, p. 632, und [328]), p. 37; *Picard* [161]), p. 473 und 503 ff. — Eine andere invariante Definition von p wird bei *Weierstrass* durch den „Lückensatz“ geliefert, s. unten. Zu alledem vgl *Brill-Noether,* Bericht, Abschn. VII, und auch II B 2, Nr. **23**, *Wirtinger.*

315) *Brill-Noether* [287]), p. 279. Vgl. auch *Bacharach,* Diss. [366]), p. 17, 29; *Noether* [323]) und Math. Ann. 37 (1890), p. 424; *Bertini* [287]), n. 20, 27; *Segre* [287]), n. 86. Bei *Segre* wird der Satz angewendet, um zu entscheiden, wann eine C^m irgend eines linearen Raumes die Projektion einer C^{m+i} von einem i-mal treffenden linearen Raume aus ist. So ist eine ebene C^m die Projektion einer Raumkurve

Spezialgruppensatz: „Für eine Vollschar g_n^r ist $r > n - p$ oder aber $r = n - p$, je nachdem sie eine speziale ist, oder nicht; umgekehrt ist eine Voll- oder Teilschar g_n^r mit $r > n - p$ eine speziale“[316]).

Als eine Präzisierung und Vervollständigung des Obigen ist der von *Brill* und *Noether* als *Riemann-Roch*'scher Satz[317]) bezeichnete anzusehen: „Wenn eine Gruppe G_n auf f eine Vollschar der Dimension r bestimmt, und $r' + 1$ (≥ 0) linear unabhängigen Kurven φ angehört, so gilt $r' = p - n + r - 1$.“ Mit andern Worten, G_n ist eine neutrale Gruppe der Gattung r (Nr. **24**) für die kanonische Schar, d. h. sie legt den φ genau $n - r$ (statt n) Bedingungen auf, um sie zu enthalten.

Brill und *Noether* (l. c. p. 283) haben bemerkt, dass sich der Satz auch unter der Form des später von *Klein*[318]) sogenannten *Reziprozitätssatzes* aussprechen lässt, indem er eine Art von Reziprozität zwischen den Spezialscharen herstellt: „Jede Spezialvollschar g_n^r gestattet als Residualschar in Bezug auf die kanonische Schar eine zweite Spezialvollschar $g_{n'}^{r'}$, wo

$$n + n' = 2p - 2, \quad n - n' = 2(r - r').“$$

Diese Sätze lassen für eine irreduzible Kurve f die geometrische Bedeutung des Geschlechtes p erkennen als die Anzahl der linear unabhängigen φ; überdies den invarianten Charakter gegenüber birationalen Transformationen von f, nicht nur von p selbst, sondern auch von den Spezialscharen; eine derartige Transformation von f ist äquivalent mit einer *linearen Transformation* der φ („*Invarianzsatz*“)[319]).

C^{m+1} von einem ihrer Punkte aus nur dann, wenn sie entweder keine Adjungierten der Ordnung $m - 4$ zulässt, oder andernfalls, wenn diese auf C^m, ausserhalb der vielfachen Punkte, noch gemeinsame feste Punkte besitzen.

316) *Brill-Noether,* l. c. p. 278. Vgl. *Bertini,* l. c. n. 21.

317) S. l. c., § 5; vgl. *Bertini,* l. c., n. 23. Weitere Untersuchungen und Ausdehnungen bei *E. Study,* Leipz. Ber. 42 (1890), p. 153; *Macaulay*[366]); *Fields*[191]); *Stahl*[191]); *F. Severi*, Ist. Lomb. Rend. (2) 38 (1905), p. 865. — Bezüglich der analytischen Bedeutung des letzten Satzes, sowie der zugehörigen Litteratur vgl. *Brill-Noether,* Bericht, p. 360; ferner II B 2, Nr. **19**, *Wirtinger*; s. auch *Segre*[287]), § 19.

318) *F. Klein-R. Fricke*[234]), p. 554. — Einige Sätze über autoresiduale Scharen in Bezug auf die kanonische Schar giebt *G. Castelnuovo,* Ist. Lomb. Rend. (2) 24 (1890), p. 307 (n. 1).

319) *Brill-Noether*[287]), § 6. Die Bezeichnungen stammen von *Noether*[287]), § **1**, n. 1. — Sind y_i ($i = 0, 1, \ldots, p - 1$) die homogenen Koordinaten eines Punktes in einem linearen Raume R_{p-1} von $p - 1$ Dimensionen, und $\varphi_i(x) = 0$ die Gleichungen von p linear unabhängigen φ, so bestimmen die Formeln $y_0 : y_1 : \cdots : y_{p-1} = \varphi_0 : \varphi_1 : \cdots : \varphi_{p-1}$ (wo die x der Gleichung $f(x) = 0$ genügen) im R_{p-1} eine Kurve der Ordnung $2p - 2$ und vom Geschlecht p (die

Überdies ist das *reine adjungierte System* von f, d. i. das lineare System der φ (für $p > 1$) nach Hinwegnahme etwaiger fester Teile, für birationale Transformationen der Ebene invariant[320]); es schneidet auf f die kanonische Schar aus; ist es reduzibel, so muss f hyperelliptisch sein (aber nicht umgekehrt)[321]).

Übrigens lassen sich die kanonische Schar und ihre Eigenschaft der Invarianz auch direkt herleiten, indem man nur *auf* der Kurve operiert, auf Grund von Methoden, wie sie analog *F. Enriques*[322]) entwickelt hat zur Begründung der Fundamentalsätze der Geometrie auf einer Fläche. Versteht man unter *Jacobi'scher Gruppe* einer g_n^1 die Gruppe ihrer Doppelpunkte (Nr. **34**), so ergiebt sich, dass die *Jacobischen* Gruppen der linearen Scharen ∞^1 die einer gegebenen Schar g

nur im hyperelliptischen Falle eine vielfache ist und zwar dann eine doppelt zählende Kurve der Ordnung $p - 1$): die „Normalkurve der φ" (Nr. **29**). Alsdann lässt sich der Satz des Textes dahin aussprechen, dass die Geometrie auf der algebraischen Kurve (Gebilde) vom Geschlecht $p > 1$ (i. e. die Geometrie der birationalen Transformationen der Kurve) äquivalent ist mit der *projektiven* Geometrie der Normalkurven vom Geschlecht p. Die Normalkurve der φ hat *Riemann* eingeführt, Werke, 2. Aufl., p. 487 ff.; vgl. *Weber* [329]); *Kraus* [329]); *Noether* [372]); *F. Klein,* Math. Ann. 36 (1889), p. 1, und [160]), 1, p. 152, 170, 184; 2, p. 88 ff.; *Klein-Fricke*[234]), p. 556—571; s. auch *Segre* [287]), n. 75 [II B 2, Nr. **28**, *Wirtinger*; III C 9, *Segre,* Mehrdimensionale Räume]. Über Realitätsverhältnisse bei der Kurve der φ, vgl. Nr. **20** und die Zitate, bes. in [238]).

320) *Noether* [197]), n. 31; *Castelnuovo* [386]), n. 27, von dem der Name herrührt. — Anwendungen der sukzessiven Adjungierten der Ordnungen $m - 3$, $m - 6$, ... (der *„Indices"* 1, 2, ...) und ihrer Invarianz machten *Brill-Noether,* Gött. Nachr. 1873, p. 127, bei einem (dem zweiten der beiden dort gegebenen) Beweise des *Riemann-Roch*'schen Satzes, und vornehmlich *S. Kantor* (der diese Methode „Prinzip der Verminderung der φ" nennt), Paris C. R. 100 (1885), p. 343; Preisschrift (1883/4), Napoli Mem. (2) 4 (1891), Teil 4 [Auszug J. f. Math. 114 (1895), p. 50]; Acta math. 19 (1894), p. 115, auf die Typen von ebenen birationalen zyklischen Transformationen; sodann *S. Kantor,* Theorie der endlichen Gruppen von eind. Transf. in der Ebene, Berlin 1895; *A. Wiman,* Math. Ann. 48 (1896), p. 195 auf die Typen endlicher Gruppen von ebenen birationalen Transformationen (I B 3 f, Nr. **25**, *Wiman*); *F. Enriques,* Rom Linc. Rend. (5) 2^1 (1893), p. 468 auf die Typen kontinuierlicher Gruppen solcher Transformationen; *Castelnuovo,* l. c., systematisch auf die linearen Systeme ebener Kurven (Nr. **36**). Die analoge Betrachtung spielt eine Hauptrolle auch bei dem grössten Teile der neueren Arbeiten über die Geometrie auf einer algebraischen Fläche (III C 6, *Castelnuovo* und *Enriques*).

321) *Castelnuovo,* l. c., n. 28.

322) Torino Atti 37 (1901), p. 19. — Eine Entwicklung der Theorie der linearen Scharen in diesem Sinne, bei der die invarianten Begriffe deutlicher hervortreten, hat *Enriques* in Vorlesungen zu Bologna 1897/8 geliefert: vgl. Boll. di bibl. e storia 2 (1899), p. 76; *F. Severi,* Pal. Rend. 17 (1902), Anm. zu p. 82/3.

der Ordnung n angehören, in einer und derselben Vollschar der Ordnung $2n+2p-2$, der „*Jacobi'schen Schar*" von g, enthalten sind. Man beweist dann, dass die zum Doppelten von g (gemäss der ersten Definition der Nr. 26) residuale Schar in Bezug auf die *Jacobi*'schen Scharen von g unabhängig von g selbst ist, und eben mit der kanonischen Schar zusammenfällt.

Auf Grund des Reduktionssatzes hat *Noether*[323]) den sogenannten „*Lückensatz*" von *Weierstrass*[324]) erweitert: „Betrachtet man auf f *n beliebige* Punkte — in einer gewissen Reihenfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n$ angeordnet, wobei n so gross sei, dass durch sie keine φ hindurchgeht — unter den Gruppen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ von ν solchen Punkten ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) die einzigen, die mit festen Punkten Vollscharen bestimmen, entsprechen p bestimmten Werten von ν." Der Lückensatz geht im besondern hieraus hervor, wenn alle n Punkte in einen einzigen Punkt P zusammenfallen: dann sind jene Werte von ν $1, 2, \ldots, p$, wenn P allgemein[325]) ist, indessen verschieden davon für eine endliche Anzahl besonderer Punkte, der sogenannten „*Weierstrass'schen Punkte*"[379]).

Von einer *nicht gegebenen* Vollschar g_n^r $(r > 0)$ kann man, falls sie keine speziale ist, alle n Punkte einer Gruppe beliebig annehmen (Nr. **25**), ist sie hingegen eine speziale, höchstens $n-r$ solcher Punkte (nach dem *Riemann-Roch*'schen Satz). *Noether*[326]) hat diese Eigenschaft dahin präzisiert, dass, mit Ausnahme des hyperelliptischen Falles, eine speziale g_n^r, für die man gerade $n-r$ allgemeine Punkte einer Gruppe vorgeben kann, die kanonische Schar ist, oder auch die bez. dieser residuale Schar irgend einer Zahl von in Bezug auf sie unabhängigen Punkten. Hieraus folgt sofort[327]), dass für jede speziale g_n^r $n \geqq 2r$ sein muss, wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn es sich entweder um die kanonische Schar handelt, oder aber wenn f hyperelliptisch ist[328]).

---

323) J. f. Math. 97 (1882), p. 224; mehr geometrisch bei *Segre*[287]), n. 87.

324) Werke 4, Kap. 9. Vgl. auch *Schottky*[224]), p. 312 ff. [II B 2, Nr. **23**].

325) Ein Beweis des Lückensatzes für diesen Fall bei *Noether,* J. f. Math. 92 (1881), p. 301.

326) S. [287]), Satz III''. Vgl. auch *C. Küpper,* Prag Abh. (7) 3 (1889), Nr. 4 (n. 2); *Bertini*[287]), n. 40; *Segre*[287]), n. 84.

327) *W. K. Clifford,* Lond. Trans. 169 (1878), p. 681 = Papers, p. 331; im zweiten Teile vervollständigt von *Bertini,* l. c., n. 25, 38 und von *Segre,* l. c., n. 72, 84.

328) Aus dem *Riemann-Roch*'schen Satze und aus [296]) folgt, dass bei einer spezialen Vollschar g_n^r $n-r$ *beliebig* herausgegriffene Punkte einer allgemeinen Gruppe den φ lauter unabhängige Bedingungen auferlegen: *Bertini*[308]) und [287]),

28. Das Problem der Spezialgruppen und ausgezeichneten Gruppen. Für eine irreduzible Kurve f, vom Geschlecht p, mit *allgemeinen Moduln* (Nr. **30**), haben *Brill* und *Noether*[329]) die Untersuchung der spezialen g_n^r $(n - r < p)$ ausgeführt, indem sie dieselbe, auf Grund des *Riemann-Roch*'schen Satzes, zurückführten auf die einer Gruppe G_n derart, dass durch sie $\infty^{r'}$ $(r' \geqq 0)$ Kurven φ hindurchgehen, wo $r' = r - (n - p + 1)$. Vor allem ergiebt sich als Grenze für die Möglichkeit der Problems:

$$n \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1}\ {}^{330)} \quad \text{oder auch} \quad p \geqq (r+1)(r'+1).$$

Setzt man $\tau = (r+1)(n-r) - rp = p - (r+1)(r'+1)$, so lassen sich von der gesuchten G_n beliebige $r + \tau$ Punkte vorgeben, während die übrigen in einer endlichen Anzahl α von Arten alge-

---

n. 37. — Eine weitere Anwendung des *Riemann-Roch*'schen Satzes lässt auf die Untersuchung der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür machen, dass eine irreduzible C^n vom Geschlecht p die Projektion einer Kurve derselben Ordnung des gewöhnlichen (oder auch eines höheren) Raumes ist, da dies darauf hinauskommt zu entscheiden, wann die auf C^n von den Geraden ihrer Ebene ausgeschnittene g_n^2 eine Teilschar ist. Für $n > p + 2$ ist die Kurve stets Projektion einer Raumkurve der Ordnung n; für $n \leqq p + 2$ ist die Bedingung hierfür, dass von den, den Adjungierten der Ordnung $n - 4$ durch ihre vielfachen Punkte auferlegten Bedingungen eine eine Folge der übrigen ist: *H. Valentiner*, Diss. Kopenh. 1881 (p. 32) = Acta math. 2 (1882/3), p. 136 (bes. p. 170 ff.); *Noether*[287]), § 3; *G. Halphen,* Preisschrift, J. éc. pol. cah. 52 (1882) [Auszug Paris C. R. 70 (1870), p. 380], p. 26 ff.; *C. Küpper,* Prag Ber. 1887, p. 477; 1892, p. 264; Math. Ann. 31 (1887), p. 291. Ein vollständigerer Satz wird mittels höherer Räume abgeleitet von *Bertini*[308]), *Segre*[287]), n. 85. — Weitere Sätze über Spezialgruppen bei *C. Küpper,* Prag Ber. 1897, Nr. 31.

329) S. [287]), §§ 9—12. Für aussergewöhnliche Spezialgruppen auf besondern Kurven vgl. *H. Weber,* Math. Ann. 13 (1877), p. 35; *L. Kraus,* Math. Ann. 16 (1879), p. 245; *A. Wiman,* Stockh. Handl. Bihang 21^1 (1895), Nr. 1, 3; *F. Hardcastle,* Lond. Math. Soc. Proc. 29 (1897), p. 132.

330) Für jedes gegebene r liefert dies den kleinsten Wert von n, d. i. die „Minimalscharen" (*Brill-Noether,* l. c., § 10). So existieren für $r = 1$ eine endliche Anzahl von $g^1_{\frac{p}{2}+2}$, oder aber ∞^1 $g^1_{\frac{p}{2}+3}$, je nachdem p gerade oder ungerade ist; für $r = 2$ giebt es g_n^2 der kleinsten Ordnung, wo $n = \frac{1}{3}(2p+6)$, $\frac{1}{3}(2p+7)$, $\frac{1}{3}(2p+8)$, resp. in endlicher Anzahl, ∞^1, ∞^2; etc. — Aus dem Falle $r = 2$ folgt, dass eine irreduzible C^n vom Geschlecht p, die eine allgemeine ihres Geschlechtes ist (d. i. *mit allgemeinen Moduln:* Nr. **30**) für $n > 4$ vielfache Punkte besitzen muss, und dass, wenn diese s-fache gewöhnliche sind, dann

$$\sum \frac{s(s-1)}{2} \geqq \frac{(n-2)(n-4)}{2}.$$

braisch bestimmt sind. Somit giebt es ∞^{τ} speziale g_n.[331] Das „*Problem der Spezialgruppen*“ besteht in der Ermittelung der Zahl α, und führt auf die noch nicht abgeschlossene Diskussion eines gewissen Systems algebraischer Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten (s. u.).

Für $r = 1$ [332] ist der von *Brill* und *Noether* angegebene (l. c. p. 296, Formel [B]) und sodann von *Brill*[335] bewiesene Wert von α:

$$\frac{1}{\sigma}\binom{2\sigma}{\sigma-1} \text{ für } p = 2\sigma, \quad \frac{2}{\sigma}\binom{2\sigma+1}{\sigma-1} \text{ für } p = 2\sigma+1,$$

während für $\tau = 0$ *Castelnuovo*[333]) gefunden hat:

$$\alpha = \frac{1!\,2!\,\ldots\,r!\;1!\,2!\,\ldots\,r'!\;p!}{1!\,2!\,\ldots\,(r+r'+1)!}.$$

Das Problem der Spezialgruppen lässt sich verallgemeinern, indem man f mit einem beliebigen linearen System von Kurven ψ schneidet: es können dann auf f „ausgezeichnete Gruppen“ oder „neutrale Gruppen“ von k Punkten existieren (Nr. 24), die zur Bestimmung der ψ weniger als k unabhängige Bedingungen erfordern[334]. Deren Bestimmung hat *Brill*[335] algebraisch ausgeführt für ein lineares System ∞^{k+i-1} von adjungierten Kurven ψ irgend einer Ordnung (die auch eine gewisse Anzahl einfacher Punkte von f gemein haben dürfen), und für Gruppen von k Punkten, von denen nur einer eine Folge der übrigen sein soll („Neutrale Gruppen der ersten Spezies“). Die durch wiederholte Anwendung des *Cayley-Brill*'schen Korrespondenzprinzips (II B 2,

331) Auch die nicht spezialen g_n^r hängen von τ Konstanten ab (wo τ stets > 0, da dann $n - r \geqq p$ ist). Vgl. *Segre*[313], p. 205. — Die Zahl r' ist die Dimension der zu g_n^r reziproken Schar, nach dem Reziprozitätssatze von *Brill-Noether* (Nr. 27); mithin ist die Anzahl der Spezialscharen die nämliche für zwei reziproke Scharen: *Brill-Noether,* l. c., § 9.

332) Vgl. *Clebsch-Gordan*[44], § 61. — Für den schon von *Riemann*[37] art. 5 betrachteten Fall, wo überdies n den kleinsten Wert hat [s. [330]], haben *Brill-Noether,* l. c., § 12 eine indirekte Bestimmungsweise gegeben.

333) Rom Linc. Rend. (4) 5^2 (1889), p. 130. Vgl. auch [336]. Für $r = 1$ wird die Formel von *Castelnuovo* bei geradem p zu der von *Brill-Noether* angeführten [B]: s. *Brill*[335], p. 358. Für letztere s. auch *E. Ritter,* Math. Ann. 44 (1893), p. 321; einige besondere Fälle zuerst bei *Brill,* Math. Ann. 6 (1872), p. 60.

334) Anwendungen auf Spezial- und ausgezeichnete Gruppen bei irreduzibeln, von vielfachen Punkten freien C^n macht *C. Küpper,* Prag Ber. 1888, p. 265; Prag Abh. (7) 3 (1890), Nr. 7; 4 (1891), Nr. 5, 7; Monatshefte Math. Phys. 6 (1895), p. 5, 127; *Noether*[287], § 5.

335) Math. Ann. 36 (1890), p. 321 (§§ 7, 8). — Für ein lineares System nicht adjungierter Kurven (Nr. 31) vgl. *Noether*[348], § 8, wo es sich um die „σ-Kurven“ der Ordnung $m - 3$ handelt (für m als die Ordnung von f).

Nr. **51, 52**, *Wirtinger*; III C 3, Abschnitt III, *Zeuthen*) erhaltene Lösung kommt zurück auf das algebraische Problem, alle Systeme von Wertepaaren $x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k$ zu finden, die alle Determinanten der Ordnung k aus der Matrix:

$$|\psi_1(x_j y_j), \ldots, \psi_{k+i}(x_j, y_j)| \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

zum Verschwinden bringen, und zugleich den Bedingungen $f(x_1, y_1) = 0$, $\ldots, f(x_k, y_k) = 0$ genügen. Durch den Schluss von $i-1$ auf i findet man, dass wenn $k - i - 1$ Punkte auf f gegeben sind, die mit ihnen eine Gruppe der gewünschten Eigenschaft bildende Systeme von $i+1$ Punkten in der Anzahl $\sum_{\lambda=0}^{A}(-1)^\lambda \binom{p}{\lambda}\binom{M-2\lambda+1}{i-2\lambda+1}$ vorhanden sind, wo $M+k$ die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der ψ mit f ist, und $A = \frac{1}{2}i$ resp. $\frac{1}{2}(i+1)$, je nachdem i gerade oder ungerade ist. Gestützt auf das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl (III C 3, Abschn. II, *Zeuthen*), hatte *Castelnuovo* die Formel schon vorher aufgestellt; nachher wurde sie von neuem von *Zeuthen* abgeleitet[336]).

336) *Castelnuovo*, Pal. Rend. 3 (1888), p. 27 (n. 1); *Zeuthen*, Math. Ann. 40 (1891), p. 118. Bei *Zeuthen* handelt es sich um eine Anwendung der von ihm angegebenen Methode, um die Anzahl der Koinzidenzen im *Cayley-Brill*'schen Korrespondenzprinzip zu bestimmen. Bei *Castelnuovo* [vgl. auch [333])] wird das Problem auf ein projektives zurückgeführt, nämlich das der linearen Räume von h Dimensionen, die eine birational auf f bezogene algebraische Kurve eines höheren Raumes in $k > h+1$ Punkten schneiden, und wird auf Grund einer Zerfällung der Kurve gelöst [eine Rechtfertigung des Prozesses gaben *Klein* [160]), 2, p. 110 ff.; *E. Ritter*, Math. Ann. 46 (1894), p. 247, auf Grund der Ausartung *Riemann*'scher Flächen]; in dieser Form ist es weiterhin von verschiedenen anderen Autoren behandelt worden (III C 9, *Segre*, Höhere Räume). Eine derartige Methode nebst ihrer Anwendung besonders auf Berührungen einer gegebenen ebenen Kurve mit Kurven eines Linearsystems (Nr. **34**) verdankt man *A. Brill*, Gött. Nachr. 1870, p. 525; Math. Ann. 2 (1870), p. 473; 3 (1871), p. 459; 4 (1871), p. 527; 6 (1872), p. 49; vgl. [377]). — Über den engen Zusammenhang zwischen den beiden — obwohl der Form nach durchaus verschiedenen — Methoden von *Castelnuovo* und *Zeuthen* vgl. *Brill-Noether*, Bericht p. 544—49, s auch *J. Sommer*, Diss. Tübingen 1898. — *A. Tanturri*, Torino Atti 39 (1904), p. 483 hat auf einer Kurve vom Geschlecht p die Gruppen von $2s$ Punkten betrachtet, deren jeder neutral von der 2. Spezies ist für eine von festen Punkten freie und nicht zusammengesetzte g_n^r; für $r = 3(s-1)$ ist deren Anzahl endlich und gegeben durch:

$$\sum (-1)^i 2^{p-i-k} \frac{p!}{i!k!(p-i-k)!} \frac{1}{s-k+1} \binom{n-2s-p-i-k+2}{s-k}\binom{n-2s-p-i-k+1}{s-k},$$

wo sich die Summe erstreckt auf alle ganzzahligen positiven Werte (incl. 0) von i und k, für die $i+k \leqq p$. — Für $p=0$ hat die Formel, die das Problem der neutralen Gruppen für Gruppen mit nur einfachen Elementen löst, durch Induk-

29. Normalkurven. Die Minimalscharen[330]) können zur Transformation einer Kurve f (mit allgemeinen Moduln) in eine „*Normalform*"[337]) dienen. Für $r = 1$ erhält man die *Riemann*'sche Normalkurve[332]), d. i. je nachdem p gerade oder ungerade ist, eine Kurve der Ordnung $p + 2$ mit zwei $\frac{1}{2}(p + 2)$-fachen und weiteren $\frac{1}{4}p(p - 4)$ Doppelpunkten, oder aber eine von der Ordnung $p + 3$ mit zwei $\frac{1}{2}(p + 3)$-fachen und weiteren $\frac{1}{4}(p - 1)^2$ Doppelpunkten. Von ihnen aus gelangt man mittels einer quadratischen Transformation (für $p > 4$) zu einer Normalkurve entweder der Ordnung p mit zwei $\frac{1}{2}(p - 2)$-fachen und $\frac{1}{4}p(p - 4) - 1$ Doppelpunkten, oder aber zu einer der Ordnung $p + 1$ mit zwei $\frac{1}{2}(p - 1)$-fachen und $\frac{1}{4}(p - 1)^2 - 1$ Doppelpunkten.

Der Fall $r = 2$ führt auf ebene Normalkurven niedrigster Ordnung[338]): lässt man den Geraden einer Ebene die durch eine solche

tion *W. Fr. Meyer* erhalten [2]), p. 363, sodann *A. Tanturri,* Ann. di mat. (3) 4 (1900), p. 67 (wo durch Induktion auch die Formel für $p = 1$ gefunden wird); sie wurde bewiesen von *F. Severi,* Rom Linc. Rend. (5) 11^1 (1902), p. 52. Aus ihr hat *Severi,* ib. (5) 9^1 (1900), p. 379 die Formel abgeleitet, die die Frage ganz allgemein, d. i. auch für Gruppen mit vielfachen Elementen beantwortet. — Für ein beliebiges p findet sich eine allgemeine Methode, auf der Integration einer gewissen Funktionalgleichung [II A 11, Nr. 27 c), *Pincherle*] beruhend, um die Zahl der neutralen Gruppen mit vielfachen Elementen einer einfachen linearen Schar g_n^r zu bestimmen, bei *F. Severi,* Torino Mem. (2) 50 (1900), p. 81. Insbesondere sind hier (n. 18 und 26) die Formeln angegeben, welche das Problem für $r = 4, 5$ explizit lösen.

337) *Brill-Noether* [287]), § 13.

338) *Brill-Noether,* l. c. — Durch birationale Transformation von f mittels eines Netzes von φ durch $p - 3$ allgemeine Punkte von f erhielten *Clebsch-Gordan* [44]), § 18 eine C^{p+1} mit $\frac{1}{2}p(p - 3)$ Doppelpunkten [$p > 2$; die Fälle $p = 0, 1, 2$ in §§ 19, 20, 21 direkt behandelt, geben als Normalkurve resp. eine Gerade, eine allgemeine C^3 und eine C^4 mit einem Doppelpunkt; und führen zum Ausdrucke der Koordinaten des laufenden Punktes auf der Kurve als rationale Funktionen eines veränderlichen Parameters λ, oder resp. von λ und der Quadratwurzel eines Polynoms, mit lauter einfachen Wurzeln, und vierten oder sechsten Grades in λ; für $p = 2$ eine Berichtigung von *Clebsch,* Math. Ann. 1 (1868), p. 170]; diese ist aber nicht, wie sie glaubten, die Normalkurve niedrigster Ordnung. Vgl. auch *Ch. A. Scott,* Quart. J. 28 (1896), p. 377. Diese Transformation ist möglich, so lange f nicht hyperelliptisch ist: vgl. [313]). Eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht p lässt sich stets auf eine C^{p+2} mit einem p-fachen Punkte birational beziehen (*Brill-Noether,* l. c. p. 287); sie lässt sich auch auf eine „homologe harmonische" Kurve zurückführen, *L. Cremona,* Ist. Lomb. Rend. (2) 2 (1869), p. 566; vgl. auch *„Clebsch-Lindemann"*, p. 718. Die Koordinaten eines ihrer Punkte kann man als rationale Funktionen eines Parameters λ und der Quadratwurzel eines Polynoms, mit lauter einfachen Wurzeln, vom Grade $2p + 1$ oder $2p + 2$ in λ, darstellen: vgl. *„Clebsch-Lindemann"*, p. 915 ff.; *Segre* [287]), n. 67; *Picard* [161]), p. 491 ff.

Punktgruppe gehenden φ entsprechen, so geht f über in eine Normalkurve der Ordnung $p - \pi + 2$ mit $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ Doppelpunkten, wo p resp. $= 3\pi$, $3\pi + 1$, $3\pi + 2$ ist. — Für $r > 2$ ergeben sich die niedrigsten Normalkurven in linearen Räumen von $\geqq 3$ Dimensionen. Im Falle der kanonischen Schar erhält man (wofern f nicht hyperelliptisch ist) die Normalkurve der Ordnung $2p - 2$ im R_{p-1} (die Normalkurve der φ): von linearen Transformationen abgesehen, ist sie die einzige, und liefert mittels Projektion alle übrigen Normalkurven[339]).

Zu einigen der vorstehenden Darstellungen, und zu weiteren, führt auch folgender Satz[340]): „Eine Kurve f, die zwei Scharen g_n^1 und $g_{n'}^1$ ohne (rationale oder nicht rationale) gemeinsame Schar enthält, lässt sich birational beziehen auf eine Kurve f' der Ordnung $n + n' - k$ $(k \geqq 1)$ mit einem $(n - k)$-fachen und einem $(n' - k)$-fachen Punkte, den Zentra zweier Strahlbüschel, die die beiden Scharen ausschneiden.“ Die Zahl k bezieht sich auf die Existenz von zwei, beiden Scharen angehörigen Gruppen mit k gemeinsamen Punkten; und wenn die beiden Scharen überdies α_i Paare von Gruppen mit i $(= 2, 3, \ldots)$ gemeinsamen Punkten enthalten, so besitzt f' α_i i-fache Punkte, und das Geschlecht von f (und f') hat den Wert

$$(18) \qquad p = (n-1)(n'-1) - \tfrac{1}{2}k(k-1) - \sum_i \alpha_i \frac{i(i-1)}{2}.$$

30. Die Moduln einer Klasse von algebraischen Kurven. Eine Klasse (Nr. 4) algebraischer irreduzibler Kurven des gegebenen Geschlechts p (> 1) hängt von $3p - 3$ stetig veränderlichen unabhängigen

339) S. [319]). — *M. Noether* definierte für $p = 5, 6, 7$ Normalkurven mittels aller quadratischen Relationen zwischen den φ [für diese s. [372])], und brachte sie durch eine lineare Transformation auf eine Gestalt, in der die $3p - 3$ Moduln (Nr. **30**) in Evidenz treten, Math. Ann. 26 (1885), p. 143. Für $p = 4$ vgl. auch *B. Riemann*, Ges. math. Werke, Nachträge, herausg. von *M. Noether* und *W. Wirtinger*, Leipzig 1902, p. 15 ff. und p. 63; für $p = 4, 5, 6$ vgl. auch *C. E. Pengra*, Wisconsin Trans. 14^3 (1903), p. 655.

340) *Bertini* [287]), n. 41. Vgl. *Riemann* [37]), art. 7; *Castelnuovo* [308]), n. 4. — Hieraus leitet man z. B. ab, dass sich eine f mit einer g_n^1 $(n \leqq p + 2)$ in eine C^{p+2} mit einem $(p - n + 2)$-fachen Punkte transformieren lässt: *Segre* [313]), p. 220. — Eigenschaften der Kurven mit einer von festen Punkten freien g_n^1 $(n \leqq p$, also einer spezialen Schar) bei *Bertini*, l. c. n. 44. Im besondern heisst eine Kurve, die eine g_n^1, aber keine g_{n-1}^1 enthält, eine „n-gonale“ (für $n = 2$ sind es die hyperelliptischen Kurven, während eine Kurve mit zwei g_2^1 rational oder elliptisch ist, je nachdem diese Scharen ein Paar gemein haben oder nicht). Vgl. *Bertini*, l. c., n. 45; wegen der Litteratur s. *F. Amodeo*, Congrès math. Paris 1902 (1900), p. 313 = Period. di mat. (2) 3 (1900), p. 69.

Parametern ab, die gegenüber birationalen Transformationen absolut invariant sind. *Riemann*[341]), der sie zuerst betrachtete, nannte sie die *Moduln* der Klasse und bestimmte ihre Anzahl auf transzendentem Wege (II B 2, Nr. **31**, *Wirtinger*), einmal von den Integralen erster Gattung ausgehend, sodann auf Grund des Existenztheorems der algebraischen Funktionen[342]). Für $p = 0$ existiert kein Modul, und für $p = 1$ nur ein einziger[343]). Man kann alle Fälle in einer einzigen Formel zusammenziehen[344]) durch Einführung der Mannigfaltigkeit ϱ

341) S. [37]), art. 12. — Eine neue transzendente Definition der Moduln gab *F. Klein* in der Theorie der automorphen Funktionen: Math. Ann. 19 (1882), p. 566 ff.; 21 (1882), p. 216 ff. (II B 4 c, *Fricke,* Automorphe Funktionen).

342) L. c. art. 3, 5. Repräsentiert man ein Gebilde vom Geschlecht p mit einer g_m^1 durch eine ebene Kurve, auf der die Schar durch ein Geradenbüschel (Nr. **29**, Ende) ausgeschnitten wird, so bezieht sich der Satz auf die Existenz einer endlichen Anzahl N von Klassen von Kurven des Geschlechts p, die die Geraden eines gegebenen Büschels in m variabeln Punkten treffen, und mit $w = 2\,(m + p - 1)$ beliebig gegebenen Verzweigungsgeraden (Gerade, die berühren, und solche, die durch die Spitze gehen). — Über diesen Satz und die Versuche, seinen Beweis streng zu machen (*Riemann* hatte ihn auf das *Dirichlet*sche Prinzip gestützt) s. II A 7 b, Nr. **24** ff., *Burkhardt* und *Meyer*; II B 1, Nr. **19**, **22**, *Osgood*; II B 2, Nr. **12**, *Wirtinger.* — Die Aufgabe, N in Funktion von m und p zu bestimmen, hat für $m = 3$ *H. Kasten,* Diss. Gött. 1876 behandelt, allgemein *A. Hurwitz,* Math. Ann. 39 (1891), p. 1 [italienisch von *A. Brambilla,* mit Zusätzen des Verfassers, Giorn. di mat. 31 (1893), p. 229; 41 (1903), p. 337]; 55 (1901), p. 53, der auch die Gruppe der algebraischen Gleichung vom Grade N untersucht, von der die Bestimmung dieser Klassen (d. h. *Riemann*'schen Flächen) abhängt, ebenso wie die Realität ihrer Wurzeln, wenn die gegebenen Verzweigungswerthe zum Teil reell, zum Teil zu je zweien konjugiert imaginär sind. So erhält man für $m = 2, 3, 4$:

$$N = 1, \quad \frac{1}{3!}\left(3^{w-1} - 3\right), \quad \frac{1}{4!}\left(2^{w-2} - 4\right)\left(3^{w-1} - 3\right).$$

343) Für besondere Kurven muss natürlich die Anzahl der Moduln $< 3p - 3$ werden. Für eine hyperelliptische Kurve sind es $2p - 1$, die unabhängigen Doppelverhältnisse der $2p + 2$ Verzweigungspunkte ihrer $g_2{}^1$ [*Brill-Noether* [287]), p. 302]: sie treten in Evidenz bei der Darstellung von *Cremona* [338]). Allgemeiner besitzt eine Kurve mit einer (einzigen) Involution 2. Grades vom Geschlecht π $2p - \pi - 1$ Moduln: *Segre* [287]), n. 90. — Wenn die Kurve elliptisch ist, so sind für ihre unendlich vielen $g_2{}^1$ die Quadrupel ihrer Verzweigungspunkte sämtlich zu einander projektiv, und ihr Doppelverhältnis ist der einzige Modul: *Clebsch,* erstes Zitat[69]), § 6; *Clebsch-Gordan*[44]), p. 74—77, mit einem von *A. Cayley* mitgeteilten Beweise [vgl. *Cayley*[20]), n. 24, 25]; *Bertini*[287]), n. 46, 47; *Segre,* l. c. § 16; als ein Korollar hiervon erscheint der Satz von *G. Salmon,* J. f. Math. 42 (1851), p. 274; [3]), p. 151 über die Konstanz des Doppelverhältnisses der 4, an eine allgemeine C^3 von irgend einem ihrer Punkte ausgehenden Tangenten (III C 5, *Kohn,* Spezielle algebraische Kurven).

344) *F. Klein,* Über *Riemann*'s Theorie der alg. Funktionen; Leipzig 1882

der eindeutigen Transformationen, die eine Kurve der Klasse in sich selbst zulässt. Da (II B 2, Nr. **31**, *Wirtinger*; III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*) $\varrho = 3, 1, 0$ ausfällt, je nachdem $p = 0, 1, > 1$, so beträgt die Anzahl der Moduln in jedem Falle $3p - 3 + \varrho$.[345])

Die Bestimmung der Moduln auf algebraischem Wege, die schon *Cayley*[346]) in Angriff nahm, wurde von *Brill* und *Noether* auf verschiedenen Wegen geleistet (die indessen nicht so streng sind, wie die vom Existenzsatze ausgehende), vermöge geometrischer Auffassung der Moduln als Doppelverhältnisse, und unter Zugrundelegung entweder einer g_p^1 mit einem p-fachen Punkte[347]), oder der Minimalscharen, oder endlich der Normalkurven (l. c. § 16). So giebt die Minimalschar g_n^1 mit ihren $3p$ oder $3p+1$ (je nachdem p gerade oder ungerade ist) Verzweigungsgruppen die $3p-3$ Moduln als Doppelverhältnisse dieser Gruppen (wo man im zweiten Falle unter den ∞^1 g_n^1 etwa eine solche mit einem doppelten Verzweigungselement auswähle).

31. Erweiterungen. Die Systeme von Schnittpunkten einer algebraischen Kurve mit nicht-adjungierten Kurven. *M. Noether*[348]) hat festgestellt, dass sich die Sätze über lineare Vollscharen, im besondern

(englisch von *F. Hardcastle*, Cambr. 1893), § 19. — Über die reellen Moduln bei den reellen eindeutigen Transformationen reeller Kurven s. [240]).

345) *Klein*, l. c., und [160]), 1, p. 95, bemerkt, dass die Gleichung vom Grade N der Anm. [342]) irreduzibel ist, sodass die Gesamtheit der Klassen algebraischer Gebilde vom Geschlecht p eine einzige $(3p - 3 + \varrho)$-fach ausgedehnte zusammenhängende Mannigfaltigkeit bildet.

346) S. [20]). Hier hat *Cayley*, ausgehend von der Normalkurve der Ordnung $p+1$ $(p > 2)$ [338]), $4p-6$ Moduln gefunden. Deren Inexaktheit deckte *A. Brill* auf Habilitationsschrift Giessen, 1867; Math. Ann. 1 (1869), p. 401, indem er auf direktem Wege für $p = 4$ eine Normalkurve mit nur 9 Moduln fand [vgl. *Cayley*, Math. Ann. 3 (1870), p. 270 = Papers 8, p. 387 (und auch Papers 6, p. 593)]; für den allgemeinen Fall s. *Brill-Noether* [287]), p. 304. — Vgl. auch *F. Casorati* und *L. Cremona*, Ist. Lomb. Rend. (2) 2 (1869), p. 620; *A. Brill*, Math. Ann. 2 (1870), p. 471; *A. Cayley*, Math. Ann. 8 (1874), p. 362 = Papers 9, p. 507.

347) S. [287]), §§ 14, 15. Diesen Weg zur Auffindung von Normalgleichungen und Moduln hatte schon *Weierstrass* eingeschlagen, Vorlesungen; s. Brief an *H. A. Schwarz*, Okt. 1875 = Werke 2 (1895), p. 235; auch Werke 3 (1903), p. 297. Vgl. auch *Schottky* [224]), p. 317; *Hensel-Landsberg* [160]), Vorl. 31; *Brill-Noether*, Bericht, p. 366, 431.

348) Math. Ann. 15 (1879), p. 507 (Auszug Erlangen Ber. 1879). — Die Ausdehnung des *Riemann-Roch*'schen Satzes auf nicht adjungierte Kurven versuchte zuerst *F. Lindemann* (Unters. üb. d. *Riemann-Roch*'schen Satz, Programmschrift Leipzig 1879), dessen Untersuchung jedoch eine, von *Noether*, l. c., bemerkte Lücke (p. 29) aufweist.

der Restsatz und der *Riemann-Roch*'sche Satz, erweitern lassen mittels derselben in der Abhandlung von *Brill* und *Noether*[287]) befolgten algebraischen Methode, mit dem „Fundamentalsatz" als Ausgangspunkt, in einer für alle Fälle giltigen Form, auch auf solche (im allgemeinen nicht vollständigen) Scharen, die auf der irreduzibeln Grundkurve f durch nicht-adjungierte Kurven ausgeschnitten werden, d. i. durch die sogenannten „σ-Kurven", die in den s_i-fachen Punkten von f die Multiplizität $\sigma_i \leqq s_i - 1$ besitzen. Hierzu gelangt man vermöge des Begriffes einer σ-Kurve χ, die mit einer anderen gegebenen ψ „gleichsingulär" sei, d. h. dieselbe in jedem s_i-fachen Punkte von f derart trifft, dass in jeden der σ_i Zweige von ψ, ausser den σ_i Schnittpunkten, die ein solcher Punkt als σ_i-facher von χ absorbiert, noch weitere $s_i - \sigma_i - 1$ hineinfallen, sodass für jeden solchen Punkt die Schnittmultiplizität von ψ und χ gleich $(s_i - 1)\sigma_i$ wird.

Alsdann nimmt der „Restsatz der σ-Kurven" zwei Gestalten an. Der „erste Restsatz" sagt aus, dass wenn eine Schar von Gruppen von n Punkten auf f durch die ganze Schar von σ-Kurven einer gewissen Ordnung bestimmt ist, die eine feste Gruppe auf f enthalten, diese auch erhalten werden kann, wenn man durch die von irgend einer dieser Kurven bestimmte Gruppe nach Belieben eine mit ihr gleichsinguläre σ-Kurve χ legt, und f mit dem ganzen linearen System von σ-Kurven (gleicher Ordnung wie χ) schneidet, die durch die weiteren Schnittpunkte von f mit χ hindurchgehen[349]). Die Umkehrung macht den „zweiten Restsatz der σ-Kurven" aus.

Die weiteren Sätze lassen eine einfache Erweiterung zu, indem sich jeder in zwei entsprechende Sätze zerlegt, falls man an Stelle des Geschlechtes $p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\sum_i s_i(s_i - 1)$ der gegebenen Kurve f von der Ordnung m die beiden andern Anzahlen einführt:

$$\pi = p + \tfrac{1}{2}\sum_i (s_i - \sigma_i)(s_i - \sigma_i - 1),$$

$$\pi' = p + \tfrac{1}{2}\sum_i s_i(s_i - 1) - \tfrac{1}{2}\sum_i \sigma_i(\sigma_i + 1) = \pi + \sum_i \sigma_i(s_i - \sigma_i - 1).$$

So sind (vgl. Nr. 27) von den Schnittpunkten von f mit einer σ-Kurve χ der Ordnung l (ausserhalb der vielfachen Punkte von f) im allgemeinen und höchstens π, oder aber $\pi - 1$ — je nachdem $l > m - 3$

349) Diese Eigenschaft weicht also von der durch den Restsatz für adjungierte Kurven (Nr. 25) ausgedrückten nur darin ab, dass die entsprechenden Kurven der beiden Linearsysteme mit einander gleichsingulär sein müssen; es genügt, wenn dies für *zwei* entsprechende Kurven der Fall ist.

oder aber $= m - 3$ ist — durch die übrigen bestimmt, wenn die ψ im übrigen willkürlich sind; hingegen werden jene Anzahlen π' resp. $\pi' - 1$, wenn die ψ mit einer gegebenen σ-Kurve gleichsingulär sind.

Es giebt $\infty^{\pi'-1}$ σ-Kurven der Ordnung $m - 3$, dagegen $\infty^{\pi-1}$ solche, die mit einer gegebenen gleichsingulär sind. Auf diese bezieht sich der erweiterte *Riemann-Roch*'sche Satz, der in folgende zwei zerfällt:

a) „Wenn eine Schar von Gruppen von n Punkten auf f durch ein lineares System von σ-Kurven ausgeschnitten wird, und wenn durch eine dieser Gruppen, die von der Kurve ψ bestimmt ist, $\infty^{r'}$ $(r' \geqq 0)$ mit ψ gleichsinguläre σ-Kurven der Ordnung $m - 3$ hindurchgehen, so hat die Dimension r der Schar den Wert $r = n - \pi + r' + 1$."

b) „Wenn eine Schar von Gruppen von n' Punkten auf f von einem linearen System von σ-Kurven ausgeschnitten wird, welche mit einander gleichsingulär sind, und wenn durch eine dieser Gruppen ∞^{r} $(r \geqq 0)$ σ-Kurven der Ordnung $m - 3$ hindurchgehen, so hat die Dimension r' der Schar den Wert $r' = n' - \pi' + r + 1$."

32. Reduzible Grundkurven. *M. Noether*[350]) hat die Modifikationen untersucht, die die Sätze über das Verhalten der φ-Kurven in Bezug auf eine Grundkurve f der Ordnung m erleiden, wenn f zerfällt (ohne jedoch vielfache Teile zu enthalten)[351]).

Zerfällt f in zwei irreduzible Kurven $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ von den Ordnungen m_1, m_2 $(m_1 + m_2 = m)$, die sich in $m_1 m_2$ einfachen Punkten begegnen, so ist von den $m_1 m_2$ Bedingungen für das Hindurchgehen einer φ-Kurve durch dieselben *irgend eine* die Folge der übrigen (Nr. **33**); anders verhält es sich, wenn die Schnittpunkte von $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ vielfache Punkte der Kurven sind. Spaltet man sukzessive eine der beiden Komponenten abermals in zwei Teile, so gelangt man zum allgemeinsten Falle, wo f sich zusammensetzt aus λ irreduzibeln Kurven der Ordnungen $m_1, \ldots, m_\lambda$ $(m_1 + \cdots + m_\lambda = m)$; bedeuten $\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda$ $(\geqq 0)$ die Multiplizitäten eines gemeinsamen Punktes dieser Kurven, so repräsentieren die

$$k = \tfrac{1}{2} \sum (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\lambda)(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\lambda - 1)$$

linearen Gleichungen, die für die φ die Bedingungen des Adjungiertseins ausdrücken — deren Struktur von *Noether* vollständig untersucht ist — für die φ genau $k - \lambda + 1$ linear unabhängige Bedingungen.

350) Acta math. 8 (1886), p. 161 (Auszug Erlangen Ber. 1885).

351) In [288]) ist schon erwähnt, dass der Restsatz auch für reduzible Kurven giltig bleibt.

Sind also p das Geschlecht von f, $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ die der Komponenten:

$p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - k$, $p_i = \frac{1}{2}(m_i - 1)(m_i - 2) - \frac{1}{2}\sum_i \alpha_i(\alpha_i - 1)$,

so ist die Anzahl der linear unabhängigen φ:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_\lambda = p + \lambda - 1,$$

ein schon vorher von *E. B. Christoffel* [352]) algebraisch bewiesener Satz.

Da sich (vgl. Ende von Nr. **15**) p, wie auch $p + \lambda - 1$, und damit auch λ, lediglich — mit Hilfe von $f = 0$ — durch rationale Operationen finden lassen, so gewinnt man von hier aus ein Kriterium für die Irreduzibilität von f resp. für die Anzahl der irreduzibeln Komponenten von f.

Bezüglich des *Riemann-Roch*'schen Satzes ergiebt sich, dass die Formel $r' = p - n + r - 1$ der Nr. **27** noch giltig bleibt, wenn nur r, r' jetzt die Mannigfaltigkeiten der φ bedeuten, nicht die der von denselben auf f ausgeschnittenen Punktsysteme.

33. Anwendungen. Schnittpunktsätze. Unter dem Namen „*Cramer'sches Paradoxon*" ist die Tatsache bekannt, dass eine C^n nicht immer durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ ihrer Punkte bestimmt zu sein braucht, da (für $n \geqq 3$) diese Zahl nicht grösser ausfällt, als die Zahl n^2 der Schnittpunkte der C^n mit einer andern C^n. Diese Beobachtung stammt von *C. Mac Laurin* [353]) her, und wurde von *L. Euler* und *G. Cramer* [354]) dadurch erklärt, dass die n^2 linearen Gleichungen, die von den Koeffizienten der Gleichung einer C^n erfüllt sein müssen, damit sie durch die Schnittpunkte zweier anderer hindurchgehe, nicht von einander unabhängig sind (I B 1 b[2] *Netto*; III C 3, Nr. **3**, *Zeuthen*). — Aus der *Lamé*'schen Darstellung eines Büschels in der Gestalt $f + \lambda\varphi = 0$ [29]) folgerte *J. D. Gergonne* [355]), dass, wenn von den Schnittpunkten zweier C^{p+q} $p(p+q)$ einer C^p angehören, die andern $q(p+q)$ auf einer C^q liegen. — Einen wesentlichen Fortschritt in den Schnittpunktsätzen einer als fest betrachteten C^n machte *J. Plücker* [356]), indem die die gegebene C^n schneidende C^n als beweglich ansah: mittels

352) Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 81.

353) S. [19]), p. 137.

354) *Euler* [29]); *Cramer* [4]), p. 78.

355) S. [29]), p. 220.

356) Anal.-geom. Entw., Essen 1 (1827), Anm. zu p. 228; 2 (1831), p. 242; ausführlicher Ann. de math. 19 (1828/9), p. 97 = Abh. 1, p. 76. — Vgl. *A. Clebsch*, Zum Gedächtniss an *J. Plücker*, Gött. Abh. 15 (1872) [französisch von *P. Mansion*, Bull. Boncompagni 5 (1872), p. 183; italienisch von *E. Beltrami*, Giorn. di mat. 11 (1873), p. 153] = *Plücker*'s Abh., 1, p. XXIII; *Brill-Noether*, Bericht, p. 290/1.

Konstantenzählung erkannte er, dass alle C^n, die durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ gegebene Punkte „allgemeiner Lage" gehen, sich noch in weiteren $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ festen Punkten schneiden. *C. G. J. Jacobi* und *J. Plücker* haben gleichzeitig[357]) auch Kurven ungleicher Ordnung in Betracht gezogen, indem sie zeigten, dass für $m > n - 3$ von den mn Schnittpunkten einer gegebenen C^n mit einer C^m $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ mittels der übrigen „in allgemeiner Lage" gewählten bestimmt sind, für $m \leqq n - 3$ dagegen $mn - \frac{1}{2}m(m+3)$ durch die übrigen. Ein allgemeineres Theorem gab *A. Cayley*[358]) (s. unten).

Die Relationen — von der Anzahl $mn - 3n + 1$ für $m > n$ und $n^2 - 3n + 2$ für $m = n$ — zwischen den Koordinaten der Schnittpunkte einer C^m mit einer C^n hat *Jacobi*[357]) algebraisch untersucht, gestützt auf sein algebraisches Theorem[359]) welches in I B 1 b, Nr. **23**, *Netto*, enthalten ist. Aus eben diesem Theorem hat *A. Clebsch*[360]) das *Abel*'sche Theorem (II B 2, C, *Wirtinger;* II B 5, *Abel*'sche Funktionen, *Wellstein*) für Integrale erster Gattung[361]) abgeleitet, und vermöge

---

357) *Jacobi,* J. f. Math. 15 (1836), p. 285 = Werke 3, p. 331; *Plücker,* J. f. Math. 16 (1836), p. 47 = Abh. 1, p. 323; vgl. auch *Plücker* [12]), p. 7—13.

358) Cambr. math. J. 3 (1843), p. 211 = Papers 1, p. 25. Zu den obigen Sätzen und deren Ausdehnungen vgl. *E. Kötter,* Bericht, p. 243, 471 ff. — Geometrische Beweise bei *Cremona,* Intr. n. 41—45; *„Salmon-Fiedler"*, p. 23; *„Clebsch-Lindemann"*, p. 425, 753; *v. Peschka* [48]), p. 37; *E. Kötter,* Preisschrift, §§ 153—172; vgl. auch *Guccia* [421]), p. 181. — Weitere Sätze bei *F. Woepcke,* J. de math. (1) 19 (1854), p. 407; 20 (1855), p. 139; J. f. Math. 53 (1856), p. 260; 54 (1857), p. 274; *A. Olivier,* J. f. Math. 70 (1868), p. 156; 71 (1869), p. 1; *H. Valentiner,* Tidsskr. f. Math. (4) 5 (1881), p. 1, 167, und besonders [328]), wo auf Grund von Konstantenzählungen (für Kurven in Ebene und Raum) viele Sätze der Schnittpunkttheorie entwickelt werden, insbesondere eine Umkehrung des *Cayley*'schen Satzes.

359) J. f. Math. 14 (1835), p. 281 = Werke 3, p. 287. Daraus hat einen geometrischen Beweis von dem ersten der in [258]) zitierten Sätze *Liouville*'s *A. V. Bäcklund* abgeleitet, Acta math. 26 (1902), p. 287.

360) *Clebsch,* J. f. Math. 63 (1863), p. 189; *Clebsch-Gordan* [44]), p. 34 ff.; *„Clebsch-Lindemann"*, p. 818.

361) Über die zu einer algebraischen Kurve gehörigen *Abel*'schen Integrale und das *Abel*'sche Theorem (II B 2, *Wirtinger*; II B 5, *Wellstein,* Abelsche Funktionen) s. *Clebsch* [360]); *Clebsch-Gordan* [44]); *L. Cremona,* Bologna Mem. (2) 10 (1869), p. 3; *A. Harnack,* Erlangen Ber. 1875; Math. Ann. 9 (1876), p. 371; Ann. di mat. (2) 9 (1878), p. 302; *„Clebsch-Lindemann"*, p. 764 ff. [für $p = 0, 1$ *Clebsch* [39]), erstes Zitat [69]); für $p = 2$ *A. Brill,* J. f. Math. 65 (1865), p. 269; Math. Ann. 6 (1872), p. 66; für diese Fälle auch *„Clebsch-Lindemann"*, p. 883 ff.]. — Die Untersuchung der algebraischen Differentiale in homogenen Koordinaten (II B 1, Nr. **49**, *Osgood*; II B 2, Nr. **21**, *Wirtinger*) verdankt man *S. Aronhold,* Berlin Ber. 1861, p. 461; J. f. Math. 61 (1862), p. 95; s. die zitierten Abhandlungen.

dieses Theorems und seiner Umkehrung erhielt er in transzendenter Gestalt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Korresidualität von zwei Gruppen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$; $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ von k Punkten[362]). Ist $f = 0$ die homogene Kurvengleichung und $\varphi_i = 0$ die einer Adjungierten φ, so ist ein Integral erster Gattung dargestellt durch:

$$\int \frac{\varphi_i \sum \pm c_1 x_2 \, dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}} = \int du_i,$$

und ist unabhängig von den Konstanten c_1, c_2, c_3; die Indizes $i = 1, 2, \ldots, p$ entsprechen p linear unabhängigen Integralen erster Gattung (oder Kurven φ). Die gemeinten Bedingungen bestehen im Verschwinden (bis auf Vielfache bestimmter Perioden) der p Summen:

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \int_{x^{(\lambda)}}^{y^{(\lambda)}} du_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Handelt es sich um die Schnitte mit nicht adjungierten Kurven, so muss man auch die Integrale dritter Gattung und das erweiterte Umkehrproblem[363]) heranziehen.

Die nämlichen Probleme hat *G. Humbert*[364]) verfolgt, indem er der Theorie der *Fuchs*'schen Funktionen einen Parameter entnimmt, durch welchen die Koordinaten x, y als eindeutige (automorphe) Funktionen darstellbar sind (II B 1, Nr. 28, *Osgood*; II B 4, Automorphe Funktionen, *Fricke*)[365]).

---

362) Eine einfache geometrische Deutung solcher Bedingungen erhält man nach *G. Castelnuovo*, Ist. Lomb. Rend. (2) 25 (1892), p. 1189 (n. 5, 6) mittels der eindeutigen Korrespondenzen zwischen Gruppen von p Punkten auf f [für $p = 1$ schon Torino Atti 24 (1888), p. 4 (n. 7)]. *Castelnuovo* studiert hier algebraisch die Gruppe der birationalen zu je zweien permutablen Transformationen, welche die algebraische p-dimensionale Mannigfaltigkeit V_p der nicht spezialen linearen Scharen g_n^{n-p} gegebener Ordnung $n \geqslant p$ die in f existieren, in sich transformieren. Diese V_p ist unabhängig von dem gegebenen n, solange es $\geqslant p$ ist; daher kann sie als Bild der ∞^p Gruppen von p Punkten der f betrachtet werden. Vgl. *Castelnuovo*, Rom. Linc. Rend. (5) 14^1 (1905), p. 545, 593, 655.

363) Für $p = 0, 1, 2$ s. [361]); allgemein *Clesch-Gordan* [44]), p. 143, 270 ff.; „*Clebsch-Lindemann*", p. 866.

364) J. de math. (4) 2 (1886), p. 239.

365) Eine solche Darstellbarkeit wurde von *H. Poincaré* und *F. Klein* entdeckt: vgl. *Poincaré*, Acta math. 1 (1882), p. 1, 193; 3 (1883), p. 49; 4 (1883), p. 201; 5 (1884), p. 209 [vorher eine Reihe von Noten in Paris C. R. 92, 93, 94 (1881—82); s. noch die Zusammenstellung in Math. Ann. 19 (1881), p. 553];

Hieraus gehen als Korollare die erwähnten Schnittpunktsätze hervor, sowie viele Sätze über Kurven, die mit f gewisse Berührungen eingehen, vgl. Nr. **34**.

In rein algebraischer und für irgend welche Punktgruppen gültiger Gestalt ergiebt sich die genaue Bestimmung aller Schnittpunktsätze, unter Berücksichtigung auch zusammengesetzten oder mit vielfachen gemeinsamen Punkten behafteten Kurven, bei Zugrundelegung des *Noether*'schen Fundamentalsatzes und des Restsatzes[366]. So gilt z. B. hinsichtlich des *Cayley*'schen Satzes[358], im Falle einfacher Schnittpunkte, nach *J. Bacharach*[366], dass, wenn eine C^p gezwungen wird, durch die Schnittpunkte zweier gegebener C^m, C^n ($p \geqq m$, $p \geqq n$) zu gehen, für $p > m + n - 3$ die mn der C^p aufzuerlegenden Bedingungen von einander unabhängig sind; dass dagegen für $p \leqq m + n - 3$ von diesen Bedingungen genau

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(m + n - p - 1)(m + n - p - 2)$$

eine Folge der übrigen sind[367]; oder genauer, eine C^p durch $mn - \alpha$ jener Schnittpunkte geht auch durch die α übrigen, mit Ausnahme des Falles, dass diese auf einer $C^{m+n-p-3}$ liegen; im letzteren Falle enthält eine beliebig durch die $mn - \alpha$ Punkte gelegte C^p *nicht* alle α

Klein, Math. Ann. 19 (1882), p. 565; 20 (1882), p. 49; 21 (1882), p. 141; in letzterer Abhandlung findet man viele Litteraturangaben.

366) S. Nr. **23**, **25**, **31**, **32** und die dort zitierten Arbeiten; sodann *J. Bacharach,* Erlangen Ber. 1879; Diss. Erl. 1881 = Math. Ann. 26 (1885), p. 275 [vgl. *A. Cayley,* Math. Ann. 30 (1887), p. 85 = Papers 12, p. 500]. Bei *Bacharach,* Diss. p. 9, und schon vorher bei *Ch. Méray,* Ann. éc. norm. (1) 4 (1865), Anm. zu p. 180 [vgl. auch ib. (2) 8 (1877), p. 359], wird der „Fundamentalsatz" für einfache Schnittpunkte in geometrische Form gebracht: „Liegen mp der Schnittpunkte einer C^m mit einer C^n auf einer C^p, so befinden sich die übrigen $m(n-p)$ auf einer C^{n-p}." Dagegen beweist *Zeuthen*[284] direkt diesen Satz und leitet daraus die analytische Darstellung einer durch die Schnittpunkte von zwei Kurven gehenden dritten her. Der Satz selbst gilt *ausnahmslos:* für $m = n$ kommt man auf den Satz von *Gergonne* zurück; für eine in m Gerade zerfallende C^m auf einen solchen von *Poncelet,* Traité 2, p. 211. — Ausdehnungen der Sätze von *Olivier*[358] erhielt aus der Identität des Restsatzes *E. Study,* Math. Ann. 36 (1889), p. 216. Zum „Fundamentalsatz" und andern Hauptsätzen der Schnittpunkttheorie (*Riemann-Roch*'scher Satz u. a.) vgl. auch *F. S. Macaulay,* Lond. Math. Soc. Proc. 26 (1895), p. 495 [dazu *Ch. A. Scott,* Am. Math. Soc. Bull. (2) 4 (1898), p. 260; *F. S. Macaulay,* ib., p. 540]; 29 (1898), p. 673; 31 (1899), p. 15, 381, 401; 32 (1900), p. 418; *Ch. A. Scott,* Am. Math. Soc. Trans. 3 (1902), p. 216; *F. S. Macaulay,* ib. 5 (1904), p. 385, und Verh. d. dritten intern. Math.-Kongr. zu Heidelberg, Leipzig 1905, p. 284. — Über die Beziehungen zwischen Restsatz und *Abel*'schem Theorem vgl. *„Clebsch-Lindemann",* p. 808 ff.; *Brill-Noether,* Bericht, p. 358.

367) Für $p = m$ in dieser exakten Form schon bei *Jacobi*[357].

übrigen, d. h. es bleibt eine geringere Anzahl von Punkten durch die übrigen bestimmt. Wenn $p = m + n - 3$, so enthalten alle durch $mn - 1$ *irgendwie ausgewählte* Schnittpunkte von C^m und C^n gelegten C^p auch den letzten; es ist dies also der einzige Fall, wo der *Cayley*'sche Satz ausnahmslos gilt.

34. Weitere abzählende Fragen über lineare Scharen (vgl. Nr. 28); **Berührungsaufgaben.** Das Problem, die Anzahl der Gruppen einer g_n^r, die mit gegebenen Multiplizitäten behaftet sind, zu bestimmen, ist äquivalent mit dem andern, die Anzahl der Kurven eines linearen Systems zu ermitteln, die mit einer gegebenen Kurve f gegebene Berührungen eingehen[368]); es ist in dieser Form, auf transzendentem Wege, allgemein von *A. Clebsch* behandelt worden (III A, B 3a, Nr. **31**, *Fano*), der die *Berührungskurven* und deren *Systeme*[369]) untersuchte, d. i. Kurven durch feste Punkte von f, die mit f Berührungen ein und derselben Ordnung in jedem weiteren Treffpunkte besitzen, resp. Systeme solcher Kurven von gleicher Ordnung, die aus einer gegebenen stetig hergeleitet werden können[370]). Es besitze z. B. f (von

---

368) *Steiner*[55]) hatte schon beobachtet, dass es in einem Büschel von C^n $m(m + 2n - 3)$ Kurven giebt, die eine gegebene C^m berühren. Dies ist der Grad der „Taktinvariante", deren Verschwinden die Berührung der C^n mit einer C^m ausdrückt, in den Koeffizienten der C^n: *G. Salmon,* Quart. J. 1 (1857), p. 329. — *Bischoff* erstes Zitat [254]) leitete daraus ab, dass durch $\frac{1}{2} n(n+3) - \mu$ Punkte $\prod_{i=1}^{\mu} m_i(m_i + 2n - 3)$ Kurven C^n gehen, die μ gegebene Kurven der Ordnungen $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ berühren. Vgl. auch *S. Gundelfinger,* J. f. Math. 73 (1870), p. 171. Indessen enthalten für $\mu > 2n - 2$ einige der C^n einen vielfachen Teil, so dass, wenn man solche singulären Lösungen nicht berücksichtigen will, das obige Ergebnis zu modifizieren ist (Nr. **9**); vgl. *Zeuthen,* Diss. [268]), p. 100; *E. de Jonquières,* Paris C. R. 63 (1866), p. 793; Recherches sur les séries etc., Paris 1866, p. 10; J. f. Math. 66 (1866), p. 302. — Der Grad der Taktinvariante in den Koeffizienten von C^n vermindert sich für jeden Doppelpunkt von C^m um 2, und für jede Spitze um 3, so dass, wenn C^m die Klasse m' besitzt, jener Grad $2m(n-1) + m'$ wird: *„Salmon-Fiedler"*, p. 102; *G. B. Guccia,* Pal. Rend. 1 (1885), p. 26.

369) Über adjungierte Berührungskurven s. *Clebsch* und *Brill*[361]); *Clebsch-Gordan*[44]), p. 230 ff.; *„Clebsch-Lindemann"*, p. 838; *Stahl* [287]), 6. und 7. Abschn., bei denen man die Umkehrung des *Abel*'schen Theorems anwendet. Für nicht adjungierte Berührungskurven s. die Zitate in [363]), wo das erweiterte Umkehrproblem gebraucht wird; sodann *G. Roch,* J. f. Math. 66 (1864), p. 97; *Humbert*[364]), wo solche Berührungskurven als Spezialisierungen von adjungierten erscheinen; von algebraischer Seite (vgl. Nr. **31**): *W. Weiss,* Diss. Erlangen 1887 = Wien Ber. 99 (1890), p. 284; [209]); Monatshefte Math. Phys. 7 (1896), p. 370; *A. C. Dixon,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 12 (1904), p. 458.

370) Diese Begriffe stammen von *O. Hesse,* der deren Entwicklung für C^3

der Ordnung n und vom Geschlecht p) nur d Doppelpunkte und Spitzen, so kommt dem Problem, durch $mn - 2d - pr$ fester Punkte auf f eine Adjungierte der Ordnung $m > n - 3$ zu legen, die überdies f in p Punkten von der Ordnung $r - 1$ berühre, im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lösungen zu, nämlich r^{2p} (die aus der r-Teilung der *Abel*'schen Funktionen hervorgehen [III B 5, *Wellstein*]). Enthält eine durch die festen Punkte gelegte Adjungierte der Ordnung m die Berührungspunkte von $r - 1$ jener Kurven, so auch die einer r^{ten}. — Ist die Anzahl der festen Punkte nur $mn - 2d - (p + k)r$, so teilen sich solche, f in $p + k$ Punkten in der $(r - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung berührenden Adjungierten, in r^{2p} Systeme je von ∞^k Kurven, die überdies die Eigenschaft besitzen, dass die Berührungspunkte von r beliebigen Berührungskurven ein und desselben Systems auf einer durch die festen Punkte gehenden Adjungierten der Ordnung m liegen.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo $mn - 2d$ teilbar ist durch r: man hat dann „*reine* Berührungskurven", die, von den vielfachen Punkten von f abgesehen, *überall*, wo sie f begegnen, eine Berührung von gegebener Ordnung λ mit f eingehen. Für $\lambda = 1$ sind die Untersuchungen von *Hesse*[370]) durch *Clebsch*[371]) auf eine beliebige f ausgedehnt worden, der die Anzahl der f in $p - 1$ Punkten berührenden φ als $2^{p-1}(2^p - 1)$ bestimmte, sodann durch *M. Noether*[372]),

und C^4 in algebraischer Form giebt: J. f. Math. 28 (1844), p. 68, 97; 36 (1847), p. 143; 49 (1853), p. 243, 279; 55 (1857), p. 83 = Werke, p. 89, 123, 155, 319, 345, 469. Hierüber und über die anschliessenden Arbeiten von *Plücker* und *Steiner* [III C 5, *Kohn*, Spezielle algebraische Kurven] vgl. *Brill-Noether*, Bericht, p. 305 ff. — Hinsichtlich der Beziehung zwischen Berührungskurven und „Wurzelfunktionen und -Formen" (II B 2, Nr. **40**, *Wirtinger*; II B 5 a, *Wellstein, Abel*'sche Funktionen) vgl. *Brill-Noether*, l. c., p. 312—18, und Abschn. IX. — Die Berührungskurven für eine C^n lassen sich auch, nach dem Vorgange von *Hesse* l. c., für $n = 3, 4$, untersuchen, indem man C^n als symmetrische Determinante darstellt: *H. E. Timerding*, Math. Ann. 55 (1902), p. 149; bez. dieser Darstellung s. *A. C. Dixon*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 11 (1902), p. 350; 12 (1904), p. 449.

371) S. [360]) § 8; sodann *Clebsch-Gordan*[44]), p. 264; „*Clebsch-Lindemann*", p. 847. — Die Gruppe der algebraischen Gleichung, von der die Bestimmung der Berührungs-φ abhängt, untersucht *C. Jordan*, Traité des subst., Paris 1870, p. 229, 305, 329; *L. E. Dickson*, Am. Math. Soc. Trans. 3 (1901/2), p. 38, 377.

372) Math. Ann. 17 (1880), p. 263 (Auszug Erlangen Ber. 1880). Die invariante Darstellung erhält man, abgesehen vom hyperelliptischen Falle, mittels Quotienten der φ. Behufs Ermittelung der Dimension von Zähler und Nenner dieser Ausdrücke in den φ muss man für die p linear unabhängigen φ die Anzahl der linear unabhängigen Relationen irgend einer Ordnung $\mu > 1$ kennen. Dies Problem, für $\mu = 2$ von *Riemann*[319]) und [339]) behandelt, sodann von *Weber* und *Kraus*[329]), hat vollständig *Noether*, l. c. gelöst; nach ihm ist die Anzahl jener Relationen:

der auf Grund (gegenüber birationalen Transformationen) invarianter Darstellung der algebraischen Funktionen die Kurven untersuchte, die durch Nullsetzen einer in den φ ganzen homogenen Funktion der Dimension μ entstehen: je nachdem μ ungerade oder gerade ist, zerfallen sie in zwei gänzlich verschiedene Arten, jede von 2^{2p} Klassen von Kurven[373]).

Das allgemeine Problem, die Anzahl der Kurven eines gegebenen linearen ∞^r Systems zu ermitteln, die mit f Berührungen *beliebig gegebener Ordnungen* eingehen, wurde geometrisch von *E. de Jonquières* gelöst, zunächst für rationale f mittels des Korrespondenzprinzips auf der Kurve, sodann für eine f mit einer Anzahl von Doppelpunkten, die geringer ist, als das Maximum, indem er den Einfluss bestimmte, welchen das Streichen eines Doppelpunktes auf die vorher erhaltene Formel ausübt[374]). Zu derselben Formel gelangte *A. Cayley*[375]) durch Anwendung gewisser Funktionalgleichungen, wobei zugleich der

---

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{\mu!}-(2\mu-1)(p-1),$$

hingegen im hyperelliptischen Falle:

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{\mu!}-\mu(p-1)-1.$$

Zu alle dem vgl. *Brill-Noether,* Bericht, Abschn. VIII, wo von *Christoffel's* und *Klein's* Normalformen, sowie von der Formentheorie auf einer algebraischen Kurve die Rede ist (II B 2, Nr. **27**, **28**, **30**, **37—40**, *Wirtinger*).

373) Diese Klassen teilen sich weiterhin, bei ungeradem μ, in $2^{p-1}(2^p-1)$ und $2^{p-1}(2^p+1)$ je unter sich gleichberechtigte, dagegen bei geradem μ in eine ausgezeichnete und $2^{2p}-1$ unter sich gleichberechtigte Klassen. *Noether* hat gezeigt, wie man alle Berührungskurven ein- und derselben Art aus irgend einer von ihnen ableiten kann, und welches die Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten sind. Vgl. noch, auch wegen der Verbindung mit der Charakteristikentheorie und dem Umkehrproblem in der Theorie der *Abel*'schen Funktionen, *Noether,* Math. Ann. 28 (1886), p. 354.

374) *De Jonquières,* J. f. Math. 66 (1866), p. 289 [Auszug Paris C. R. 63 (1866), p. 423, 485, 522; vgl. auch *Cayley,* ib. p. 666 = Papers 7, p. 41]. — *De Jonquières,* l. c., p. 309 wies noch auf eine zweite, auf das Prinzip der Erhaltung der Anzahl gestützte Lösungsart hin, indem man f durch eine Gruppe von Geraden ersetzt. Andere Anwendungen dieser Methode gab *de Jonquières,* Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 312; sie war schon von *Poncelet*[52]) benutzt worden, sodann eben von *de Jonquières,* Brief an *M. Chasles,* 17. Febr. 1859 [vgl. *de Jonquières,* Lettre à *M. Chasles* sur une question en litige, Paris 31. Mai 1867, p. 8; *Chasles*[100]), Anm. zu p. 308] und von *Th. Berner,* Diss. Berlin 1865, p. 13, um z. B. die Anzahl der 5 gegebene Kegelschnitte berührenden Kegelschnitte zu ermitteln [s. *Segre*[97])]; algebraisch verwendete sie *S. Roberts,* J. f. Math. 67 (1867), p. 266.

375) Lond. Trans. 158 (1867), p. 75 = Papers 6, p. 191 (n. 74 ff.).

Einfluss einer Spitze festgestellt wurde; durch Einführung des Geschlechtes p von f brachte er das Resultat auf die Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\Big\{&(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-k+1)\\ &+(n-r-1)(n-r-2)\cdots(n-r-k+1)p\cdot\sum(\nu_1-1)\\ &+(n-r-2)(n-r-3)\cdots(n-r-k+1)p(p-1)\cdot\\ &\qquad\sum(\nu_1-1)(\nu_2-1)\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+(n-r-k+1)p(p-1)\cdots(p-k+2)\cdot\\ &\qquad\sum(\nu_1-1)(\nu_2-1)\cdots(\nu_{k-1}-1)\\ &+p(p-1)\cdots(p-k+1)(\nu_1-1)(\nu_2-1)\cdots(\nu_k-1)\Big\},\end{aligned}$$

wo n die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von f mit einer Kurve des gegebenen Systems ist, und wo von den betrachteten Berührungen angenommen wird, dass α_i ν_i-punktig $(i=1,2.\ldots,k)$ sein sollen, die ν_i alle verschieden voneinander und >1, und derart, dass $\sum\nu_i=r+k$ wird; die Summen erstrecken sich dann auf alle Kombinationen des Indizes $1,2,\ldots,k$ resp. zu den Klassen $1,2,\ldots,k-1$.[376]) Einen *algebraischen* Beweis obiger Formel gab *A. Brill*[377]) vermöge

376) Für $p=0$ vgl. auch *M. Lerch,* Prag Ber. 1885, p. 600. — Die Anzahl der Gruppen einer g_n^r mit r Doppelpunkten wurde für die „kanonische" Schar von *Clebsch* gefunden; für $r=0$ von neuem durch *Em. Weyr,* Wien Ber. 79 (1879), p. 694 (vgl. auch „Beiträge zur Kurvenlehre", Wien 1880, p. 44); allgemein durch *Castelnuovo*[336]), n. 3. Andere besondere Fälle s. in [379]).

377) Math. Ann. 6 (1872), p. 46. Vgl. auch *R. Torelli,* Pal. Rend. 21 (1905), p. 58, wo auch noch die von der Gruppe der Berührungspunkte bestimmte lineare Schar angegeben wird, als Summe eines gewissen Vielfachen der vom ∞^r System ausgeschnittenen Schar, und eines gewissen Vielfachen der kanonischen Schar von f. — Die Theorie der Berührungskurven (und der Spezialscharen: Nr. 28) hat *Brill* algebraisch vermöge Zurückführung auf Eliminationsprozesse behandelt. Für den einfachsten Fall der Kurven eines Netzes hat er die Kovariante untersucht, die aus f die Punkte der Berührung 2$^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Netzkurve ausschneidet: Math. Ann. 3 (1871), p. 459. Ähnlich finden *H. Krey,* Math. Ann. 10 (1875), p. 221; *W. Spottiswoode,* Paris C. R. 83 (1876), p. 627; Lond. Math. Soc. Proc. 8 (1876), p. 29; *F. Lindemann,* Soc. math. de France Bull. 10 (1882), p. 21 die Kurven eines linearen Systems ∞^3, die f in der 3$^{\text{ten}}$ Ordnung berühren. *Brill,* Math. Ann. 4 (1871), p. 527 (Auszug Gött. Nachr. 1870, p. 525) beschäftigt sich auch mit f in r^{ter} Ordnung resp. in 2 verschiedenen Punkten in s^{ter}, s'^{ter} Ordnung $(s+s'=r)$ berührenden Kurven eines linearen Systems ∞^r. Die einschlägigen Eliminationsfragen, die einmal mit dem Verschwinden der Determinanten einer Matrix (I B 1 c, Nr. 14, *Landsberg*) zu-

des „*Cayley-Brill*'schen" Korrespondenzprinzips für Kurven beliebigen Geschlechtes[378]) [II B 2, Nr. **51**, **52**, *Wirtinger*; III C 3, Abschn. III, *Zeuthen*].

Insbesondere hat hinsichtlich der Anzahl $(r+1)(n+rp-r)$ der $(r+1)$-fachen Punkte einer g_n^r [379]) *C. Segre* die Reduktion ermittelt, die sie durch einen irgendwie singulären Punkt der g_n^r erleidet; ist

---

sammenhängen, sodann mit der „reduzierten Resultante" der Gleichungen von drei Kurven [i. e. der ganzen Funktion der Koeffizienten, deren Verschwinden aussagt, dass die drei — bereits eine gewisse Anzahl gegebener Punkte gemein habenden — Kurven noch einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen: vgl. [17])] (I B 1a, Nr. **18**, *Netto*; I B 1b, Nr. **15**, *Netto*; I B 2, Nr. **25**, *Meyer*) verfolgt *Brill*, Math. Ann. 5 (1871), p. 378; 6 (1872), p. 60; 36 (1890), p. 321; resp. Math. Ann. 4 (1871), p. 510; München Abh. 17 (1889), p. 91. Hierüber, sowie über ein durch Determinantensätze vermitteltes Reziprozitätsprinzip von *Brill*, l. c., Math. Ann. 4, p. 533, vgl. „*Clebsch-Lindemann*", p. 459—474, 720—753; *W. Meyer* [2]), p. 1; *B. Igel*, Wien Denkschr. 54^2 (1888), p. 75; *F. Junker*, Diss. Tübingen 1889. Wegen der Beziehungen zu höheren Räumen s. [336]).

378) Die sich beim Problem von *de Jonquières* darbietenden Korrespondenzen sind solche mit positiver „Wertigkeit"; aber schon *Cayley* stiess bei Anwendungen auf viele Fälle von Korrespondenzen mit negativer Wertigkeit: Lond. Trans. 158 (1867), p. 145; 161 (1870), p. 369 = Papers 6, p. 263; 8, p. 212. In der zweiten Abhandlung [vgl. auch Quart. J. 1 (1856), p. 344; 2 (1856), p. 31 = Papers 3, p. 67, 80] bestimmt er in allen (52) Fällen die Anzahl der Dreiecke mit Ecken auf gegebenen Kurven, und mit Seiten, die ebenfalls (verschiedene oder nicht verschiedene) gegebene Kurven berühren. — Anwendungen der *Cayley-Brill*'schen Korrespondenzformel auf verschiedene Fragen der Geometrie auf einer Kurve machte *C. Küpper*, Prag Ber. 1892, p. 257.

379) S. auch *A. Brill*, Math. Ann. 4 (1871), p. 528 f.; *Veronese* [30]), p. 201; *Castelnuovo* [308]), n. 7; *Segre* [287]), § 11; *S. Kantor*, Wien Ber. 110 (1901), p. 1331. — Im besondern giebt es $p(p^2-1)$ „*Weierstrass*'sche" Punkte (Nr. **27**), d. s. die p-fachen Punkte der kanonischen Schar. Nach *A. Hurwitz*, Math. Ann. 41 (1892), p. 411 ist die Anzahl der unter jenen verschiedenen $> 2p+2$, excl. den hyperelliptischen Fall, wo es gerade $2p+2$ sind (es sind die $2p+2$ Doppelpunkte der auf der Kurve existierenden g_2^1). *C. Segre*, Rom. Linc. Rend. (5) 8^2 (1899), p. 89 fügt hinzu, dass die in Rede stehende Zahl auch

$$\geqq 2p+6+\frac{8(p-3)}{p(p-3)+4}$$

sein muss, also für $p>3$ auch $>2p+6$. Eine noch weitere Einschränkung giebt *I. Cipolla* an, Rom Linc. Rend. (5) 14^1 (1905), p. 210. Weitere Untersuchungen bei *Küpper* [378]); *M. Haure*, Ann. éc. norm. (3) 13 (1896), p. 115; *E. van de Kamer*, Diss. Utrecht 1901; *I. Cipolla*, Pisa Scuola norm. Ann. 10 (1905). — Von der obigen Grenze macht *Hurwitz*, l. c., p. 406 eine Anwendung auf einen einfachen Beweis des *Schwarz-Klein*'schen Satzes, dass ein algebraisches Gebilde ∞^1 vom Geschlecht $p>1$ nur eine endliche Anzahl von eineindeutigen Transformationen in sich zulässt (II B 2, Nr. **53**, *Wirtinger*; III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*, Transformationen).

dieser, betrachtet auf einem der Zweige von f mit ihm als Ursprung, ein i-facher für die ∞^{r-1} allgemeinen, ihn enthaltenden Gruppen, ein i_1-facher für ∞^{r-2} Gruppen, ..., ein i_{r-2}-facher für ∞^1 Gruppen und ein i_{r-1}-facher für eine Gruppe, so beträgt die auf jenen Zweig bezügliche Reduktion[380]):

$$i + i_1 + \cdots + i_{r-1} - \tfrac{1}{2} r (r + 1).$$

Aus diesen Formeln lässt sich in jedem Falle die Anzahl der Punkte herleiten, in denen eine gegebene Kurve die höchstmögliche Berührung mit Kurven eines gegebenen linearen Systems besitzt[381]); so z. B. ergiebt sich die Anzahl der *sextaktischen* Punkte einer gegebenen Kurve, d. i. der Punkte, in denen mit ihr ein Kegelschnitt eine Berührung 5[ter] Ordnung eingeht[382]).

Zwei lineare Scharen g_m^q und g_n^r $(m, n \geqq q + r)$ auf einer Kurve

---

380) *Segre* [287]), § 11. Einige besondere Fälle schon bei *Veronese* [30]), p. 201; für $p = 0$ bei *G. B. Guccia,* Pal. Rend. 7 (1893), p. 54 [s. auch *Guccia* [152]), p. 227; dazu *F. Gerbaldi,* Pal. Rend. 9 (1894), p. 167]; für die kanonische Schar [die Zahlen $i, i_1, \ldots$ sind dann die des Lückensatzes von *Weierstrass* (Nr. 27] bei *Hurwitz* [379]), p. 408.

381) Algebraische Untersuchungen dazu bei *W. Spottiswoode,* Lond. Trans. 152 (1862), p. 41; Quart. J. 7 (1866), p. 114.

382) *A. Cayley,* Lond. Trans. 149 (1859), p. 371 = Papers 4, p. 207, giebt die Gleichung des Kegelschnitts, der mit einer C^n in einem gegebenen Punkte eine Berührung 4[ter] Ordnung eingeht [für $n = 3$ zuerst bei *G. Salmon,* Lond. Trans. 148 (1858), p. 535]; weiter fand er, Lond. Trans. 155 (1864), p. 545; Paris C. R. 62 (1866), p. 590 = Papers 5, p. 221; 7, p. 39, dass die sextaktischen Punkte einer von vielfachen Punkten freien C^n in der Anzahl $n(12n - 27)$ vorhanden sind und die Schnittpunkte der C^n mit einer C^{12n-27} bilden, deren Gleichnng er aufstellt; ein Doppelpunkt resp. eine Spitze vermindern jene Anzahl um 24, resp. 27. Vgl. auch *W. Spottiswoode,* Lond. Trans 155 (1865), p. 653; *L. Painvin,* Paris C. R. 78 (1874), p. 55, 436, 835; *F. Gerbaldi,* Pal. Rend. 4 (1890), p. 65. Die Untersuchung der sextaktischen Punkte wurde von *G. Battaglini* begonnen, Rom Linc. Rend. (4) 4[2] (1888), p. 238 [vgl. auch *A. Cayley*, Papers 5 (1892), p. 618] auf Grund der *Sylvester*'schen Theorie der Reziprokanten (I B 2, Nr. 20, *Meyer*), wobei er jedoch auf komplizierte Rechnungen stiess. — Die an der Zahl der sextaktischen Punkte durch einen singulären Punkt der C^n verursachte Reduktion berechnete *G. Halphen,* Soc. math. de France Bull. 4 (1875), p. 59 (wo auch die analoge Frage nach den Punkten gelöst wird, in denen die Kurve eine Berührung 9[ter] Ordnung mit einer C^3 hat); Étude, p. 585, 609, wo von der Differentialgleichung der Kegelschnitte Gebrauch gemacht wird. Dasselbe Ergebnis erzielt *Segre* [287]), n. 45, indem er die sechsfachen Punkte der aus C^n von den Kegelschnitten der Ebene ausgeschnittenen g_{2n}^5 aufsucht: Ist C^n vom Geschlecht p, so beträgt deren Anzahl $12n + 30(p - 1)$; sie wird durch jeden Zweig der Ordnung Δ und Klasse Δ' vermindert um $8\Delta + 4\Delta' - 15$, falls $\Delta \gtrless \Delta'$, und im allgemeinen um $12\Delta - 14$ für $\Delta = \Delta' > 1$.

vom Geschlecht p haben eine endliche Anzahl von Gruppen von $q+r$ Punkten gemein, nämlich[383]):

$$\sum_i (-1)^i \binom{m-q-i}{r-i} \binom{n-r-i}{q-i} \binom{p}{i}.$$

V. Die linearen Kurvensysteme.

35. Durch die Basispunkte bestimmte lineare Kurvensysteme. Ein lineares Kurvensystem (dessen Kurven nicht in Kurven eines Büschels zerfallen) so beschaffen, dass die durch einen allgemeinen Punkt gehenden Kurven desselben zugleich $\mu - 1$ ($\mu \geqq 2$) weitere Punkte enthalten, heisst ein *zusammengesetztes:* es ist mittels einer *ebenen Involution der Ordnung* μ[384]) zusammengesetzt; man sagt auch, dass es der Involution *angehöre*[385]). Ein nicht zusammengesetztes System heisst ein *einfaches.*

Sei $|C|$ ein *durch die Basispunkte bestimmtes,* lineares System d. h. ein aus allen Kurven einer gegebenen Ordnung n (beliebig, nur hoch genug, damit das System existiere) gebildetes, denen auferlegt ist, mit gegebenen Multiplizitäten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ durch h *irgendwie* (unter sich in endlicher oder unendlich kleiner Entfernung befindliche, ...: vgl. Nr. **12**) gegebene Punkte der Ebene zu gehen, deren Gesamtheit mit A bezeichnet sein soll. Um der Untersuchung solcher Systeme die möglichste Allgemeinheit zu verleihen (s. Nr. **36**), hat

---

383) *Castelnuovo* [336]), n. 5, 6. Für $p = 0$ vgl. *C. Le Paige,* Brux. Bull. (3) 11 (1886), p. 121; für $q = r = 1$ und beliebiges p geht die Formel über in den speziellen schon von *Riemann* [340]) betrachteten Fall der (18) [vgl. auch *Em. Weyr,* Wien Ber. 100 (1891), p. 595]; für $q = 1$ und beliebige r, p *Castelnuovo* [308]), n. 8, und, als Korollar zu einer allgemeinen Formel, *Segre* [287]), n. 53, wo sich ergiebt, dass die Anzahl der Gruppen von $r+1$ Punkten einer Kurve vom Geschlecht p, die einer g_n^r und einer Involution vom Grade m ($> r$) und vom Geschlecht π (deren ∞^1 Gruppen sich also ein-eindeutig den Punkten einer Kurve vom Geschlecht π zuordnen lassen, s. Nr. **24**) gemeinsam sind, gleich

$$\binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p - m\pi)$$

ist. Vgl. auch *Segre,* Rom Linc. Rend. (4) 3^2 (1887), p. 3, 149.

384) D. i. ein algebraisches System ∞^2 von Gruppen aus μ Punkten der Ebene, derart, dass ein allgemeiner Punkt einer und nur einer dieser Gruppen angehört.

385) Umgekehrt gehören jeder Involution unendlich viele lineare Systeme an. Solche Systeme spielen eine Hauptrolle bei dem Beweise von *G. Castelnuovo* für die Rationalität aller ebenen Involutionen, Math. Ann. 44 (1893), p. 125 [Auszug Rom Linc. Rend. (5) 2^1 (1893), p. 205].

G. Castelnuovo[386]) die folgenden Begriffe und Bezeichnungen eingeführt. Die Zahlen ν_i heissen die *virtuellen* Multiplizitäten der allgemeinen Kurve C des Systems, und *virtuelle Basisgruppe* von $|C|$ heisst die Gesamtheit der Punkte von A mit den respektiven Multiplizitäten ν_i. Nun kann es geschehen, dass den von dieser Gruppe auferlegten Bedingungen gemäss, die Kurve C in einigen der Punkte von A höhere Multiplizitäten besitzt, als die respektiven ν_i, und dass ausserdem noch andere Basispunkte existieren: wenn A' die Gesamtheit der wirklich existierenden Basispunkte von $|C|$ ist, so heissen *effektive* Multiplizitäten von C diejenigen, welche diese in den Punkten von A' besitzt, und *effektive Basisgruppe* von $|C|$ die Gesamtheit der Punkte von A' mit den relativen effektiven Multiplizitäten. Die Punkte, welche bei A' und nicht bei A eintreten, sind *virtuell nichtexistierende* Basispunkte.

Totalkurve von $|C|$ ist eine mit der virtuellen Basisgruppe behaftete C. Ein lineares System nennt man *vollständig enthalten* in einem andern, wenn seine allgemeine Totalkurve eine Totalkurve des zweiten Systems ist. Ein lineares System, das nicht vollständig in irgend einem andern enthalten ist, heisst *vollständig (completo)*; andernfalls *unvollständig (incompleto* oder *parziale)*. Jedes lineare ∞^k $(k \geqq 0)$ System ist entweder vollständig, oder aber vollständig in einem vollständigen $\infty^{k'}$ $(k' \geqq k)$ Systeme enthalten, das durch das erstere völlig bestimmt ist[387]); im letzteren Falle versteht man unter dem *Defekt (deficienza)* des gegebenen Systems die Differenz $k' - k$.

Liegen zwei vollständige lineare Systeme $|C_1|$ und $|C_2|$ vor, mit den virtuellen Basisgruppen A_1 und A_2, so heisst *Summe* der beiden das lineare System $|C_1 + C_2|$, dessen Totalkurve erhalten wird durch Vereinigung zweier beliebiger Kurven C_1, C_2 und indem man diesen als virtuelle Basisgruppe die Gruppe $A_1 + A_2$ zuerteilt (so dass jeder virtuelle Basispunkt, s_1-fach für $|C_1|$, s_2-fach für $|C_2|$, ein $(s_1 + s_2)$-fach für $|C_1 + C_2|$ wird). Im besondern gehen daraus die *vielfachen* Systeme eines gegebenen hervor.

Umgekehrt, wenn eine Kurve eines vollständigen Systems $|C_1|$ einen Teil irgend einer Kurve eines zweiten vollständigen Systems $|C|$ ausmacht, und in der virtuellen Basisgruppe von $|C|$ nicht höhere

---

386) Torino Mem. (2) 42 (1891), p. 3 (Kap. I). Vgl. auch *Noether* [348]). Die virtuellen Charaktere haben eine wesentliche Bedeutung auch für die linearen Kurvensysteme auf irgend einer algebraischen Fläche (III C 6, *Castelnuovo* und *Enriques,* algebraische Flächen; III C 8, *Rohn,* algebraische Raumkurven).

387) Ein partielles System kann zusammengesetzt sein, auch wenn das vollständige System, in dem es enthalten ist, ein einfaches ist.

virtuelle Multiplizitäten als C besitzt, so sagt man, dass $|C_1|$ *teilweise (parzialmente)* in $|C|$ enthalten ist, oder dass die Totalkurve von $|C_1|$ eine *Teilkurve (curva parziale)* von $|C|$ ist. Es existiert alsdann ein bestimmtes vollständiges System $|C_2|$, welches in jedem Basispunkte von den virtuellen Multiplizitäten s, s_1 für $|C|, |C_1|$ einen Basispunkt von der virtuellen Multiplizität $s - s_1$ hat. Kurz, ist das System $|C_2|$ durch die Relation $|C| = |C_1 + C_2|$ definiert; so heissen $|C_1|$ und $|C_2|$ *residual* zu einander in bezug auf $|C|$, und $|C_2| = |C - C_1|$ die *Differenz* zwischen $|C|$ und $|C_1|$.[388])

Ein lineares System $|C|$ von der Ordnung n, das durch die Basispunkte bestimmt ist — deren Gesamtheit, wie vorher, wir A nennen werden, mit den virtuellen Multiplizitäten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ — ist ein vollständiges. *Virtuelle Dimension* von $|C|$ ist die Zahl

$$\mathbf{k} = \tfrac{1}{2} n (n + 3) - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{h} \nu_i (\nu_i + 1),$$

und *effektive Dimension* die Anzahl k der Punkte (der Ebene) in allgemeiner Lage, durch die eine und nur eine Kurve von $|C|$ geht. Die Differenz $s = k - \mathbf{k}$ (≥ 0) ist der *Überschuss (sovrabbondanza)* von $|C|$, und giebt die Anzahl derjenigen, C durch A auferlegten Bedingungen an, die eine Folge der übrigen sind. Das System heisst *regulär* für $s = 0$, *überschüssig (sovrabbondante)* für $s > 0$.[389]) Hält man die Gruppe A und die Zahlen ν_i fest, so lässt sich n stets derart vergrössern, dass das System regulär wird und dann bleibt[390]).

388) Die obigen Begriffe und Sätze, Erweiterungen anderer über lineare Scharen auf einer algebraischen Kurve (Nr. **24**, **25**, **26**), wurden auf die linearen Systeme von Kurven auf irgend einer algebraischen Fläche von *F. Enriques* übertragen: s. [36]), besonders die zweite Abhandlung, n. 1—13.

389) Die „Spezialpunktgruppen" in der Ebene, für die $s > 0$ bezüglich C^n ist, spielen eine Hauptrolle bei vielen geometrischen Fragen, so bei der eindeutigen Abbildung von Flächen auf die Ebene. Die Zahl s heisst „n^{ic} excess" nach *Macaulay*, „Exzess von A bez. C^n" nach *Küpper*, der A „normal" resp. „anormal" für C^n nennt, je nachdem $s = 0$ oder $s > 0$ ist [und die Bedeutung dieser Unterscheidung, z. B. bei der projektiven Erzeugung der Kurven (Nr. **10**), zeigt]. Vgl. dazu (s. Nr. **33**) *A. Cayley,* Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1870), p. 196 = Papers 7, p. 253; *Brill-Noether* [287]), § 18; *J. Rosanes,* J. f. Math. 76 (1873), p. 312 (§ 2); 88 (1879), p. 241; 90 (1880), p. 303; 95 (1883), p. 247; *H. Krey,* Math. Ann. 19 (1881), p. 497; *Küpper* [334]) und Prag Ber. 1892, p. 403; *Macaulay* [366]); *Bernhard* [276]). — Auf diesen Gegenstand (vgl. Nr. **28**) kann man auch die Sätze über die Zusammenhänge zwischen den Berührungspunkten der an eine (resp. mehrere) Kurve von einem ihrer vielfachen Punkte ausgehenden Tangenten beziehen: *E. Bertini,* Rom Lincei Atti (3) 1 (1876), p. 92; *E. Caporali,* Nap. Rend. 20 (1881), p. 143 = Memorie, p. 164; *Guccia* [440]), n. 76; Pal. Rend. 9 (1894), p. 268; *S. Kantor,* Pal. Rend. 9 (1894), p. 68.

Adjungiert zu $|C|$, oder zu einer C, in bezug auf A, heisst eine Kurve mit der virtuellen Multiplizität $\nu - 1$ in jedem ν-fachen Punkte $(\nu > 1)$ von A. Sind k' und $\mathbf{k}'$ die effektive und virtuelle Dimension des linearen zu $|C|$ in bezug auf A adjungierten Systems der Ordnung $n-3$, so werden $p = k' + 1$, $\mathbf{p} = \mathbf{k}' + 1$ *effektives* und *virtuelles Geschlecht* von $|C|$ oder einer C, in bezug auf A genannt, so dass also $p \geqq \mathbf{p}$.

Endlich wird noch die Definition des *Grades* (Nr. 3) ausgedehnt, indem darunter die Differenz $D = n^2 - \sum_{i=1}^{h} \nu_i^2$ [391] verstanden wird[392].

Die Zahlen k, p, $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$, D („Charaktere" von $|C|$ in bezug auf A), die offenbar an die Relation[393]

$$D = \mathbf{k} + \mathbf{p} - 1 \tag{19}$$

gebunden sind, verhalten sich invariant gegenüber birationalen Transformationen der Ebene. Genauer, geht man von der Ebene σ von $|C|$ über zu einer andern σ' vermöge einer solchen Transformation T, und definiert man in geeigneter Weise die virtuelle Gruppe A', auf die sich das transformierte System von $|C|$ beziehen soll, so bleibt jeder der Charaktere (also auch s) bei Anwendung von T ungeändert: es genügt, A' mit den Fundamentalpunkten von T in σ' und mit den

390) Ein für Anwendungen auf die Geometrie auf algebraischen Flächen nützlicher Satz ist: „Sind $|C^n|$ und $|C^{n+1}|$ zwei vollständige und reguläre, durch dieselbe Gruppe A, mit denselben Zahlen ν_i, definierte Systeme, so ist das System $|C^{n+2}|$ kleinster Dimension, das alle C^{n+2} enthält, die aus jeder Kurve von $|C^{n+1}|$ und jeder Geraden der Ebene zusammengesetzt sind, ein vollständiges, und lediglich durch A und die ν_i bestimmt." *Enriques* [36]), III, n. 2, resp. n. 36; *G. Castelnuovo,* Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 240.

391) Vgl. *G. Jung,* Ann. di mat. (2) 15 (1887), p. 277 [Auszug Ist. Lomb. Rend. (2) 20 (1887), p. 275]. Die Zahl D kann auch keine geometrische Bedeutung haben, z. B. negativ sein. — Allgemeiner heisst für zwei Kurven der Ordnung n', n'', mit den Multiplizitäten ν_i', ν_i'' in den Punkten von A, die Differenz $n'n'' - \sum_{i=1}^{h} \nu_i' \nu_i''$ die Summe der Schnittmultiplizitäten der Kurven in bezug auf A.

392) Ist ein irreduzibles System vollständig oder teilweise in einem andern enthalten, so ist der Grad des ersten resp. gleich oder kleiner als der des zweiten. Ein irreduzibles System wird daher einfacher als ein vollständiges erklärt, wenn es nicht in einem andern vom selben Grade und höherer Dimension enthalten ist.

393) Wäre das System unvollständig, mit dem Defekt ε, so hätte man $D = \mathbf{k} + \mathbf{p} - 1 + \varepsilon$, und auch ε besässe invarianten Charakter.

Punkten, in die sich die in σ nicht fundamentalen Punkte von A verwandeln, zusammenzusetzen. Hieraus folgt (Nr. **12**), dass man im Folgenden (Nr. **36**) A als aus lauter getrennten Punkten zusammengesetzt annehmen darf[394]).

36. Eigenschaften der linearen, vollständigen, irreduzibeln Kurvensysteme, die bei birationalen ebenen Transformationen ungeändert bleiben. Ist das vollständige System $|C|$ irreduzibel, indem man als Gruppe A (Nr. **35**) die aus allen Basispunkten gebildete festsetzt [die dann notwendig in endlicher Anzahl existieren und stets (s. Ende von Nr. **35**) als gewöhnliche mit variabeln Tangenten vorausgesetzt werden dürfen], und nimmt man als Multiplizitäten ν_i die effektiven der allgemeinen Kurve C, so erhält man *absolute* Charaktere von $|C|$: k, $\mathbf{k}$, $s = k - \mathbf{k}$, $p = \mathbf{p}$ (*Geschlecht* in der gewöhnlichen Bedeutung), D (*Grad* im Sinne von Nr. **3**), und *absolute* Eigenschaften von $|C|$. Aus Formel (19), die sich jetzt so schreiben lässt:

$$D = k + p - s - 1, \tag{20}$$

folgt, dass für ein Büschel ($k = 1$) $s = p$[395]) wird; weiter, dass für $D = 1$ das System ein reguläres ist, und zwar ein Netz rationaler Kurven; solche Netze heissen *homaloide*, und sie bestimmen die ebenen birationalen Transformationen[396]) (III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*).

In der Geometrie der Ebene, wo man als „Fundamentalgruppe"[397]) die der *Cremona*-Transformationen nimmt, besitzen für $|C|$ — ausser den schon genannten numerischen Invarianten — wesentliche Bedeutung zwei mit $|C|$ invariant — für die Transformationen jener Gruppe — verknüpfte Gebilde: die *charakteristische Schar*, d. i. die lineare vollständige Schar g_D^{k-1}, die aus einer allgemeinen C durch die andern ausgeschnitten wird, und das *reine adjungierte System* $|C'|$, d. h. (Nr. **27**)

394) *Castelnuovo* [386]), n. 7—10.

395) *Bertini* [417]), p. 282; auf p. 247 (vgl. auch p. 281—82) findet sich auch die Formel (20).

396) Allgemeiner ist ein algebraisches System einer Dimension > 1, von dem zwei allgemeine Kurven einen und nur einen variablen Schnittpunkt haben, ein homaloides Netz.

397) Im Sinne von *F. Klein*, Progr. Erlangen 1872 = Math. Ann. 43 (1893), p. 63 [ital. von *G. Fano*, Ann. di mat. (2) 17 (1890), p. 307; franz. von *H. Padé*, Ann. éc. norm. (3) 8 (1891), p 87, 173; englisch von *W. Haskell*, Am. Math. Soc. Bull. 2 (1893), p. 215; polnisch von *S. Dickstein*, Prace mat.-fiz. 6 (1895). p. 27; russisch von *D. M. Sintsoff*, Kasan Abh. (2) 5, 6 (1895/6)].

das einer allgemeinen C.[398]) Aus (20) und den Sätzen über lineare Spezialscharen geht hervor, dass $|C|$ regulär oder aber überschüssig ist, je nachdem seine charakteristische Schar eine nicht speziale oder aber speziale ist[399]); überdies, dass für $s > 0$ $s \leqq p - k + 1$ ausfällt[400]). — Aus einem Satze der Nr. 27 folgt, dass, wenn $|C'|$ reduzibel ist, $|C|$ hyperelliptisch sein muss; umgekehrt, wenn $|C|$ hyperelliptisch, einfach und von einem Geschlecht $p > 2$ ist, muss $|C'|$ reduzibel sein[401]); ist weiter, bei reduziblem $|C'|$, $|C|$ einfach, so zerfällt die allgemeine Kurve von $|C'|$ in $p - 1$ rationale Kurven[402]).

Fundamentalkurve von $|C|$ ist jede, einfache oder zusammengesetzte Kurve, die von einer allgemeinen Kurve C, ausserhalb A, nicht getroffen wird[403]). Die Gesamtheit zweier Fundamental-

---

398) Das erste betrachten schon *Brill-Noether* [287]), p. 308, und beweisen seine Vollständigkeit; sodann *C. Segre*, Pal. Rend. 1 (1887), p. 217; das zweite *Castelnuovo* [386]): vgl. [320]). — Das adjungierte System $|C'|$ lässt sich auch unabhängig von den projektiven Charakteren von $|C|$ definieren; dazu genügt nicht immer die Eigenschaft (Nr. 27), dass $|C'|$ aus der allgemeinen Kurve von $|C|$ die kanonische Schar ausschneiden soll [sie genügt, im allgemeinen, wenn $|C|$ keine eigentlichen Fundamentalkurven besitzt [407])]: *Enriques*, zweite in [36]) zitierte Arbeit, n. 25—30; *Castelnuovo-Enriques* [303]), n. 15—17.

399) *Castelnuovo* [386]), n. 18. Spezielle Fälle sind die beiden Sätze von *Segre* [398]): „für $D > 2p - 2$, oder für $k > p$, ist das System regulär; für $D > 2p$, oder für $k > p + 1$, ist das System einfach". Aus dem ersten folgt, dass alle rationalen Systeme ($p = 0$), und alle elliptischen ($p = 1$) excl. die Büschel, regulär sind; hierfür s. auch *Guccia* erstes Zitat [189]), [420]), [421]). Aus dem zweiten Satze folgt, dass alle vollständigen rationalen, sowie alle elliptischen Systeme vom Grade oder der Dimension > 2 einfach sind.

400) Somit gilt für ein überschüssiges System ∞^k, wenn es nicht hyperelliptisch ist, und wenn $p > k > 1$, dass $s \leqq p - k$ ist, im hyperelliptischen Falle hingegen $s = p - k + 1$, und das System ist zusammengesetzt (mit einer Involution 2ten Grades): *Castelnuovo* [386]), n. 19. — Damit ein reguläres System hyperelliptischer Kurven zusammengesetzt sei (und dann nur mit einer Involution 2ten Grades), ist notwendig und hinreichend, dass die charakteristische Schar auf einer seiner allgemeinen Kurven eine g^p_{2p} ist, die mit der $g_2{}^1$ der Kurve selbst zusammengesetzt ist. Ein derartiges System ist z. B. das der C^6 mit 8 gemeinsamen Doppelpunkten: *Bertini* [417]), p. 272, [287]) n. 53.

401) *Castelnuovo* [411]), p. 126. Ein solches System (auch für $p = 2$) lässt sich vermöge einer *Cremona*-Transformation auf ein solches einer gewissen Ordnung ν mit einem $(\nu - 2)$-fachen Basispunkt zurückbringen: vgl. auch *Castelnuovo*, Pal. Rend. 4 (1890), p. 81.

402) *Castelnuovo* [386]), n. 28.

403) Diese Kurven sind schon in den ersten Arbeiten über lineare Systeme betrachtet worden: in der Theorie der ebenen birationalen Transformationen (*de Jonquières, Cremona, ...*), wo es sich um homaloide Netze handelt; bei der der ebenen Abbildung der Flächen (*Clebsch, Noether, Cremona, Caporali, ..*) und in andern Theorien (III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*, Transformationen).

kurven ist daher wiederum eine Fundamentalkurve, und umgekehrt ist jede Komponente einer Fundamentalkurve selbst fundamental. Die Anzahl der Fundamentalkurven ist eine endliche, falls nicht $|C|$ aus den Kurven eines Büschels zusammengesetzt ist.

G. Jung[404]) hat gefunden, dass der „*Exzess* der fundamentalen Elemente", d. i. die Differenz zwischen der Anzahl der fundamentalen Punkte und der einfachen fundamentalen Kurven, gegenüber birationalen Transformationen der Ebene invariant ist.

Die Anzahl der Bedingungen, denen eine Kurve von $|C|$ zu genügen hat, um eine gegebene Fundamentalkurve zu enthalten, heisst *Valenz* oder *Postulation* derselben in bezug auf $|C|$; eine irreduzible Fundamentalkurve ist monovalent. Dieser Begriff verbindet sich mit dem einer *zusammenhängenden* Kurve (in bezug auf eine Gruppe ihrer Punkte), d. i. einer zusammengesetzten Kurve, von der jeder irreduzible oder reduzible Teil mit der Restkomponente entweder unendlich viele Punkte gemein oder wenigstens einen Schnitt in bezug auf die Gruppe besitzt. Eine Kurve ist sicher zusammenhängend, wenn ihr effektives Geschlecht dem virtuellen gleich ist; ist die Kurve frei von vielfachen Komponenten, gilt auch das Umgekehrte[405]). Es ergiebt sich dann, dass jede Fundamentalkurve von $|C|$, die zusammenhängend in bezug auf A ist, und keine vielfachen Komponenten hat, monovalent ist (aber nicht umgekehrt)[406]).

Castelnuovo (l. c. n. 23 ff.) hat die Fundamentalkurven mit einem wenigstens ∞^0 Residualsystem (d. h. mit einer Valenz $\leqq k$) untersucht[407]), und hat festgestellt, dass das effektive Geschlecht (in bezug auf A) einer solchen Kurve $\leqq s$ ist, und dass im Falle es $= s$ ist,

404) S. [391]), §§ 3, 9; Ist. Lomb. Rend. (2) 21 (1888), p. 719, 723. Vgl. auch *Bertini* [408]), n. 14; *E. Ciani,* Giorn. di mat. 33 (1895), p. 68 (n. 14—16). Der Satz über den Exzess ist bisher streng nur für lineare Systeme mit gewöhnlichen Basispunkten bewiesen worden. — Bei *Segre* [441]) hängt er ab von einer Deutung des Exzesses als eines gewissen *Charakters* der Bildfläche (Nr. **37**) des linearen Systems (falls sie existiert).

405) *Castelnuovo* [386]), n. 15. Vgl. auch *Noether* [350]).

406) *Castelnuovo,* l. c., n. 22.

407) Es sind das *eigentliche* oder *uneigentliche,* je nachdem das effektive Geschlecht des Restsystems in bezug auf $|C| < p$ oder aber $= p$ ist. *G. Castelnuovo,* Soc. ital. (dei XL) Mem. (3) 10 (1896), p. 103 (n. 2—7), und p. 222, hat alle reduzibeln linearen Systeme bestimmt, die entweder zusammengesetzt, oder vom Geschlecht $\leqq 1$ sind, zu denen die wiederholt ausgeführte Operation der Adjunktion führt, falls man von einem irreduzibeln, einfachen, von eigentlichen Fundamentalkurven freien Systeme ausgeht. *F. Enriques,* ib. p. 201, wendet das an auf die Untersuchung der Doppelebenen vom Geschlecht 1.

falls überdies die Residualschar der charakteristischen Schar (d. h. die g_{2p-2-D}^{s-1}, welche auf der allgemeinen C von ihren Adjungierten der Ordnung $n-3$, die durch eine Gruppe ihrer charakteristischen Schar gehen, ausgeschnitten ist) keine festen Punkte besitzt, die Fundamentalkurve jeden Basispunkt von $|C|$ enthält[408]). Weitere Sätze hat er aus der Betrachtung der virtuellen Charaktere einer Fundamentalkurve abgeleitet, und sie auf (irreduzible) überschüssige Systeme mit der Minimalzahl von Basispunkten angewendet[409]).

Weitere Ergebnisse erhielt *Castelnuovo* (l. c. n. 28 ff.) durch Verbindung von $|C'|$ mit der linearen Schar, die auf einer allgemeinen C durch alle Geraden der Ebene, oder auch nur durch die Geraden eines Büschels ausgeschnitten wird, oder auch durch Betrachtung der virtuellen Charaktere von $|C|$ und $|C'|$ in bezug auf A. Bedeuten $\mathbf{p}'$ und $\mathbf{k}'$ das virtuelle Geschlecht und die virtuelle Dimension von $|C'|$ — dessen effektive Dimension ist $p-1 \geqq \mathbf{k}'$ —, so ergibt sich, falls die allgemeine Kurve von $|C'|$ nicht Teil einer Kurve von $|C|$ ist, dass $\mathbf{k} < 2p - \mathbf{p}' - 1$ wird, während, wenn $|C'|$ ein Residualsystem von der virtuellen Dimension $\mathbf{k}''$ besitzt, die Beziehung statt hat:

$$\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + \mathbf{k}'' - 1.$$

Überdies ist, für $\mathbf{k} > p+1$, $|C'|$ regulär[410]) und $\mathbf{p}' < p - 1$. Alsdann wird bewiesen, dass $\mathbf{k}'' < 9$ ausfällt, so dass aus dem Vorstehenden die allgemeine Relation folgt:

$$\mathbf{k} \leqq 2p - \mathbf{p}' + 7,$$

mit alleiniger Ausnahme der Systeme, die birational in ein aus allen Kurven der Ebene einer gewissen Ordnung transformierbar sind, in welchem Falle $\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + 8$.

---

408) Daraus folgt, dass, wenn $|C|$ regulär ist, jede irreduzible Fundamentalkurve rational ist, und völlig bestimmt durch ihre Multiplizitäten in A; zwei solche Kurven schneiden sich ausser A nicht. Einfache und direkte Beweise dieser und anderer Sätze bei *E. Bertini*, Pal. Rend. 3 (1888), p. 5.

409) Ein solches System besitzt wenigstens 9 Basispunkte. Sind es genau 9, so ist es ein Büschel von (elliptischen) Kurven der Ordnung $3r$ mit der Multiplizität $r\ (\geqq 1)$ in jedem Basispunkte [über solche Büschel[418])]; ist es hingegen durch 9 seiner Basispunkte bestimmt, während jedenfalls noch weitere Basispunkte existieren, und vom Geschlecht p, so lässt es sich stets durch eine birationale Transformation auf den Typus $(a_1^p\, a_2^p \ldots a_8^p\, a_9^{p-1}\, b)$ der Ordnung $3p$ und der effektiven Dimension p reduzieren; die zehn Basispunkte $a_1, a_2, \ldots, a_9, b$ liegen auf einer (fundamentalen) C^3. Diese und einige weitere Sätze von *Castelnuovo* reproduziert *Bertini*[287]), § 9.

410) Man bemerke, dass, während das adjungierte System stets regulär ist, das reine adjungierte System, bei $k \leqq p+1$ ein überschüssiges sein kann.

Für $k > p + 1$ — so dass das System regulär und einfach ist[399]) — folgen daraus die Werte $3p + 5$ und $4p + 4$ als obere Grenzen (die für jeden Wert von p erreicht werden) der Dimension k und des Grades D eines linearen irreduzibeln vollständigen Systems von gegebenem Geschlecht $p > 1$;[411]) weiterhin eine Reihe von Sätzen über lineare Systeme, bei denen k eine gewisse Funktion von p überschreitet. Der allgemeinste derselben, den *Castelnuovo* (l. c., n. 32) mittels vollständiger Induktion beweist — indem er aus der Gültigkeit für das reine adjungierte System die für das primitive ableitet —, lautet: „Ein lineares System vom Geschlecht p und der Dimension k, für das

$$k \geqq (\mu + 2)\left(\frac{p}{\mu} + 2\right) \quad (\mu \text{ ganz positiv}),$$

lässt sich birational entweder in ein System einer Ordnung $\leqq 2\mu + 1$ transformieren, oder in ein solches einer gewissen Ordnung M mit einem Basispunkt von einer Multiplizität $\geqq M - \mu$.“

37. Klassifikation der linearen Kurvensysteme. Reduktion auf Minimalordnung durch birationale Transformationen. Lineare Kurvensysteme, welche die Abbildung von Flächen verschiedener Räume geben. Kantor's Äquivalenztheorie. Handelt es sich um die Eigenschaften linearer Systeme ebener algebraischer Kurven, die gegenüber birationalen Transformationen der Ebene invariant sind, so hat man zwei ineinander birational transformierbare Systeme als identisch anzusehen. Es erwächst daraus das Problem, alle linearen Systeme auf bestimmte *Typen* zurückzuführen, die in projektivem Sinne die grösste Einfachheit besitzen: vor allem wurden die von der

---

411) Für $p = 0$ giebt es weder für k noch für D eine Grenze, für $p = 1$ ist der Maximalwert von k wie von D gleich 9, und wird beim System aller ebenen C^3 erreicht. — Die Bestimmung der Grenzen von k und D — schon versucht von *P. del Pezzo,* Napoli Rend. (2) 1 (1887), p. 40; Ann. di mat. (2) 15 (1887), p. 115, ohne dass das Ziel erreicht wird, und von *G. Jung,* Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 291 (§ 10, 11) [Auszug Ist. Lomb. Rend. (2) 21 (1888), p. 488], welcher nicht erreichbare Grenzen angegeben hat — war schon von *Castelnuovo* ausgeführt worden, Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 119, vermöge einer durchaus anderen Methode, indem er davon ausgeht, dass in einem linearen System mit $p > 0$, $k > p + 2$ (das also regulär und einfach ist) die durch einen beliebig gegebenen Punkt doppelt hindurchgehenden Kurven ein neues lineares System bilden vom Geschlecht $p - 1$, der Dimension $k - 3$ und vom Grade $D - 4$. — Hier hat er auch gezeigt, dass ein lineares System von gegebenem Geschlecht $p > 1$ und von der Maximaldimension $3p + 5$ (oder vom Maximalgrade $4p + 4$) sich aus hyperelliptischen Kurven zusammensetzt, oder aber auf das System aller C^4 reduzierbar ist.

kleinsten Ordnung gewählt[412]). Eine solche Reduktion wurde zuerst für homaloide Netze, unabhängig von einander, durch *W. K. Clifford*[413]), *M. Noether*[414]) und *J. Rosanes*[415]) in Angriff genommen, wonach sich jede birationale Transformation zwischen zwei Ebenen zerlegen lässt in ein Produkt quadratischer Transformationen; den allgemeinen und strengen Beweis dieses Theorems verdankt man erst *G. Castelnuovo*[416]).

Nachher hat *E. Bertini*[417]) die fragliche Reduktion ausgeführt für die Büschel[418]) und für einige Netze vom Geschlecht $p = 1$, und für einige andere Systeme insbesondere vom Geschlecht $p = 2$. Mit den ∞^k linearen Systemen für $p = 0$ haben sich *E. Picard*[419]) und *G. B.*

---

412) Man darf nicht schliessen, dass ein lineares System deshalb von der Minimalordnung ist, weil seine Ordnung durch eine *einzelne* quadratische Transformation nicht erniedrigt werden kann, während das durch eine Reihenfolge quadratischer Transformationen, d. h. durch eine geeignete *Cremona*-Transformation, möglich sein kann: *Jung* [411]), § 8 (nach einer Bemerkung von *E. Bertini*).

413) S. *A. Cayley,* Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1869/70), p. 161 = Papers 7, p. 222. Vgl. auch *Clifford,* Papers, p. 538.

414) Math. Ann. 3 (1870), p. 161 (Auszug Gött. Nachr. 1869, p. 1), § 1.

415) S. [34]), p. 106.

416) Torino Atti 36 (1901), p. 861. — Während sich *Clifford* beschränkt auf die Auflösung für Netze der Ordnung < 8 mit getrennten Basispunkten, haben *Noether* und *Rosanes* bemerkt, dass in einem homaloiden Netz der Ordnung n die Summe der drei höchsten Multiplizitäten der Basispunkte $> n$ ausfällt, so dass vermöge einer quadratischen Transformation, die in jenen ihre Fundamentalpunkte besitzt, das Netz in ein anderes von geringerer Ordnung übergeht. Den Fall von unendlich benachbarten Basispunkten des Netzes hat *Noether* diskutiert, Math. Ann. 5 (1872), p. 635 [eine Ergänzung bei *Guccia* [420]), p. 148], welcher zum Schlusse gekommen ist, dass es noch möglich ist eine quadratische Transformation zu finden, die die Ordnung des Netzes erniedrigt. *C. Segre*, Torino Atti 36 (1901), p. 645, hat anstatt bemerkt, dass eine solche Transformation *fehlt,* wenn die drei unendlich benachbarten, wenn auch in derselben Richtung befindlichen Fundamentalpunkte nicht auf irgend einem linearen Zweige liegen. Vgl. Schluss von Nr. **14**. — Den strengen Beweis des Satzes giebt *Castelnuovo,* l. c., indem er zeigt, dass sich die Ordnung des Netzes in jedem Falle durch eine *de Jonquières*'sche Transformation erniedrigen lässt [wo die Kurven des homaloiden Netzes C^n sind, die einen $(n - 1)$-fachen Punkt und weitere einfache Punkte gemein haben], und er sodann irgend eine dieser Transformationen in ein Produkt von quadratischen auflöst.

417) Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 244 (§ 1).

418) Es ergiebt sich, dass sich ein Büschel elliptischer Kurven auf ein solches der Ordnung $3r$ mit 9 r-fachen Basispunkten zurückführen lässt (l. c., p. 248); diese letzteren hat besonders *G. Halphen* untersucht, Soc. math. de France Bull. 10 (1882), p. 162.

419) Soc. philom. Bull. (7) 2 (1878), p. 127 = J. f. Math. 100 (1885), p. 71. Vgl. auch *Picard-Simart* [287]), p. 59; *E. Picard,* Torino Atti 36 (1901), p. 684;

Guccia[420]) beschäftigt; für $p = 1$ *Guccia*[421]) und *V. Martinetti*[422]), der auch[423]) die überschüssigen Systeme mit $p = 2$ behandelt hat; *G. Jung*[391]),[411]) hat ausführlich ein beliebiges p berücksichtigt mit Anwendungen auf die ersten Werte von p; *M. de Franchis* hat die Büschel für $p = 2$ bestimmt, und die ∞^k Systeme mit $k > 1$ für $p = 3$[424]).

So z. B. sind die, wenigstens ∞^1,[425]) linearen Systeme der kleinsten Ordnung die folgenden:

für $p = 0$: 1) Systeme von C^n $(n \geqq 1)$ mit zwei getrennten Basispunkten, von denen der eine ein $(n - 1)$-facher, der andere ein einfacher ist; 2) Systeme von C^n mit einem $(n - 1)$-fachen Basispunkte und μ einfachen, die jenem in μ getrennten Richtungen $(n \geqq 1,\ 0 \leqq \mu \leqq n - 1)$ benachbart sind; 3) Systeme von Kegelschnitten ohne Basispunkte;

für $p = 1$: 1) Systeme von C^3 mit μ einfachen (getrennten oder nicht getrennten) Basispunkten $(0 \leqq \mu \leqq 7)$; 2) Systeme von C^4 mit zwei (getrennten oder zusammenfallenden) Basisdoppelpunkten; 3) Büschel von C^{3r} mit 9 r-fachen Basispunkten $(r \geqq 1)$[426]).

Eine andere, gänzlich von der obigen verschiedene Methode zur Klassifikation und Untersuchung der ∞^k linearen Systeme (die jedoch nur für $k \geqq 2$ anwendbar ist) erhält man, wenn man ein solches System

---

G. B. Guccia, Pal. Rend. 1 (1886), p. 165. *Picard* (erstes Zitat) setzt $k \geqq 2$ voraus und untersucht die algebraischen Flächen, deren ebene Schnitte rational sind (es sind das nur die *Steiner*'sche Fläche und die rationalen Regelflächen) (III C 7, *Meyer,* Spezielle algebraische Flächen).

420) Pal. Rend. 1 (1886), p. 139.

421) Pal. Rend. 1 (1887), p. 169.

422) Ist. Lomb. Rend. (2) 20 (1887), p. 264.

423) Pal. Rend. 1 (1887), p. 205; eine Ergänzung bei *M. de Franchis,* Pal. Rend. 13 (1899), p. 200. — Eine Anwendung davon macht *M. Noether* auf die Bestimmung der rationalen Flächen 4. Ordnung, Math. Ann. 33 (1888), p. 546.

424) Pal. Rend. 13 (1898), p. 1, 130.

425) Für die Systeme ∞^0 ergiebt sich als notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine rationale resp. elliptische Kurve vermöge einer birationalen Transformation *der Ebene* in eine Gerade resp. eine elliptische C^3 transformiert werden kann, dass bei ihr alle sukzessiven adjungierten Systeme resp. alle adjungierten Systeme der Indizes > 1 fehlen: *Ferretti*[426]).

426) Die Behandlungen der oben zitierten Autoren (bis auf die von *Picard,* die von anderer Natur und einwurfsfrei ist) weisen, da sie den *Noether*'schen[416]) Weg verfolgen, die nämliche, von *Segre*[416]) bemerkte Lücke auf. Die strengen Beweise in den Fällen $p = 0$, 1, 2 sind, nach dem Vorgange von *Castelnuovo*[416]), von dessen Schüler *G. Ferretti* geliefert worden, Pal. Rend. 16 (1902), p. 236; sie bestätigen die Ergebnisse jener Autoren.

$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i(x) = 0$, vom Geschlecht p und vom Grade D (das sich nicht mit den Kurven eines Büschels zusammensetzt), auffasst als Bild der „Fläche" F eines R_k (und nicht eines niedrigeren Raumes), der Ordnung D und mit überebenen Schnitten vom Geschlecht p, die durch die Gleichungen $\varrho y_i = f_i(x)$[427]) gegeben ist. Vermöge einer solchen Abbildung werden die gegenüber birationalen Transformationen der Ebene invarianten Eigenschaften des linearen Systems zu *projektiven* Eigenschaften der Flächen F, und umgekehrt. Diese Methode, die für $k = 3$ (Nr. **38**) besonders von *E. Caporali*[428]) für abzählende Fragen verwendet wurde, hat allgemein *C. Segre*[429]) angegeben, der damit auf die Nachteile der auf die Systeme kleinster Ordnung[430]) gegründeten Klassifikation, hingewiesen hat, und *P. del Pezzo*[431]) und *G. Castelnuovo*[432]) weiter verfolgt, ersterer für die Reduktion der elliptischen Systeme, letzterer für die der einfachen hyperelliptischen Systeme, sowie derer vom Geschlecht 3.[433])

---

427) III C 9 (*Segre*, Mehrdimensionale Räume). Ist das System mit einer Involution μ^{ten} Grades (Nr. **35**) zusammengesetzt, so reduziert sich die Fläche F auf eine von der Ordnung $\frac{D}{\mu}$, die μ-mal zu zählen ist, so dass jedem ihrer Punkte μ solche in der Ebene des Systems entsprechen, und auf F eine *Übergangskurve (curva limite)* auftritt. — Ist das System völlig bestimmt durch seine Basispunkte, so ist F *normal*, d. i. keine Projektion einer andern Fläche derselben Ordnung eines R_h $(h > k)$. — Enthält ein System ∞^k ein anderes, $\infty^{k'}$, so ist die Bildfläche des zweiten eine Projektion des Bildes vom ersten. — Zu alle dem vgl. *Segre*[287]), Kap. I.

428) Collectanea math. in mem. *D. Chelini*, Mediol. 1881 (1879), p. 144 = Memorie, p. 171. — Siehe auch die zahlreichen Arbeiten (von *Clebsch, Noether, Cayley, Cremona, Humbert,* ...) über die ebene Abbildung der rationalen Flächen (III C 7, *Meyer*, Spezielle algebraische Flächen; III C 11, *Castelnuovo* und *Enriques*, Transformationen).

429) S. [398]), und Pal. Rend. 4 (1890), Anm. zu p. 86.

430) Vgl. *G. Jung*, Pal. Rend. 4 (1890), p. 253.

431) Pal. Rend. 1 (1887), p. 241 (§ 13).

432) Pal. Rend. 4 (1890), p. 73; resp. Torino Atti 25 (1890), p. 695.

433) Übrigens lassen sich auch verschiedene von den Prozessen anderer Autoren unter mehrdimensionaler Gestalt darstellen. So ist die Methode von *Picard*, erstes Zitat[419]) gleichbedeutend mit einer Projektion einer Fläche F der Ordnung D des R_{D+1} von $D - 1$ ihrer Punkte aus [*P. del Pezzo*, Napoli Rend. 24 (1885), p. 212, zeigt, dass eine solche F eine (rationale) Regelfläche ist, oder aber die F^4 des R_5 („*Veronese*'sche Fläche")]. Und die erste Bestimmung der Maximaldimension eines linearen Systems von gegebenem Geschlecht bei *Castelnuovo*[411]) kommt darauf hinaus, die Bildfläche des Systems von einer ihrer Tangentialbenen aus zu projizieren [III C 9, *Segre*, Mehrdimensionale Räume].

Auf andere Prinzipien zur Klassifikation und Untersuchung der linearen Systeme haben *Castelnuovo*[434]) und *Castelnuovo* und *Enriques*[435]) hingewiesen.

Eine andere Äquivalenztheorie, die ihn zu neuen Sätzen und Typen führte, hat *S. Kantor*[436]) entwickelt für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hyperelliptischer Kurven. Indem er durch die Koeffizienten von Kurvengleichungen einen Rationalitätsbereich fixiert, geht er von rational gegebenen Kurvensystemen aus, und vermöge ebener birationaler Transformationen reduziert er jene Systeme auf den einfachsten Typen auf rein rationalem Wege, d. h. auf Typen, die sich in jedem Falle angeben lassen, ohne dass man in die Gleichungen der Kurven neue Irrationalitäten einzuführen hat[437]).

38. Spezielle Untersuchungen über lineare $\infty^1, \infty^2, \infty^3$ Kurvensysteme. Das lineare System sei von der Ordnung n, vom Grade D, vom Geschlecht p, und besitze σ Basispunkte mit variabeln Tangenten.

a) *Büschel.* Ein Büschel ($D = 0$) enthält $\sigma + 4p - 1$ Kurven mit einem Doppelpunkt ausserhalb der Basispunkte[438]).

434) S. [386]), Vorrede (Schluss), wo er vorschlägt die Klassifikation auf die Geschlechter der sukzessiven reinen adjungierten Systeme zu stützen; diese Geschlechter sind ersichtlich invariante Charaktere des gegebenen Systems.

435) Pal. Rend. 14 (1900), p. 290. Hier sind in sehr einfacher Form die Bedingungen für die Rationalität einer Doppelebene entwickelt, von der die Verzweigungskurve gegeben ist — durch Betrachtung der sukzessiven Adjungierten der Indices 2, 3, . . . dieser Kurve —; es wird dabei ein Reduktionsprozess benützt, der mit Vorteil auch auf die linearen Kurvensysteme (Reduktion auf Minimalordnung etc.) anwendbar ist, und wurde eben von *Castelnuovo*[416]) und *Ferretti*[426]) angewendet. — Die Fruchtbarkeit desselben Begriffes ist durch *Castelnuovo* und *Enriques* ins Licht gesetzt worden, Ann. di mat. (3) 6 (1900), p. 165 [Auszug Paris C. R. 131 (1900), p. 739], auch für verschiedene Grundfragen der Geometrie auf einer algebraischen Fläche (III C 6, *Castelnuovo* und *Enriques*, Algebraische Flächen).

436) Monatshefte Math. Phys. 10 (1899), p. 18.

437) In demselben Gedankenganges hat *S. Kantor*, Monatshefte 10 (1899), p. 54 [Auszug Paris C. R. 126 (1898), p. 946], auf verschiedene Arten nachgewiesen, dass jede ebene birationale Transformation T, die rational gegeben ist [so dass sich unter ihren Fundamentalpunkten nur rationale Gruppen (in bezug auf den ursprünglichen Rationalitätsbereich) befinden], ohne Einführung neuer Irrationalitäten in gewisse 16 einfachere Transformationen (Primfaktoren) zerlegt werden kann, die er vollständig angiebt, und die für jede T nach Art, nach Aufeinanderfolge und nach gegenseitiger Lage der Fundamentalsysteme eindeutig bestimmt sind. Seine Ergebnisse hat *Kantor* auch zahlentheoretisch formuliert durch Betrachtung ganzzahliger birationaler Transformationen zwischen zwei Ebenen, sowie den Zusammenhang mit der Idealtheorie nachgewiesen. — S. auch *Kantor*, Am. J. of math. 24 (1902), p. 205.

438) *Steiner*[55]) hatte schon bemerkt, dass in einem allgemeinen Büschel

J. Steiner[439]) hat die Kurve Φ der Ordnung $2n-1$ untersucht, die der Ort der Berührungspunkte der von einem Punkte P an die Kurven des Büschels gelegten Tangenten ist (die „äussere Panpolare" von P in bezug auf das Büschel): sie geht einfach durch P hindurch und lässt sich auch erzeugen durch das gegebene Büschel projektiv auf das der ersten Polaren von P bezogen. Die Φ aller Punkte der Ebene bilden ein Netz[440]).

Bei zwei Büscheln der Ordnung n, n', des Geschlechts p, p', mit σ, σ' Basispunkten (mit variabeln Tangenten) ist der Ort T der Punkte, in denen sich zwei ihrer Kurven berühren von der Ordnung $2(n+n')-3$, und es giebt t resp. d Paare von Kurven, die eine Berührung 2^{ter} Ordnung resp. eine doppelte Berührung eingehen[441]), wo:

---

der Ordnung $n\,3(n-1)^2$ Kurven mit Doppelpunkt existieren. *Cremona*[58]) hat hinzugefügt, dass diese Anzahl durch jeden s-fachen Basispunkt mit variabeln Tangenten um $(s-1)(3s+1)$ vermindert wird, woraus *Caporali*[428]), n. 13, die Formel des Textes abgeleitet hat. Andere Fälle bei *Cremona,* l. c., und Intr. n. 88; allgemeinere Sätze bei *Guccia*[440]), § 8. — Über die algebraischen Bedingungen dafür, dass ein gegebenes Büschel eine Kurve mit einer Spitze oder mit zwei Doppelpunkten enthält, oder eine Kurve, die durch zwei der Schnittpunkte zweier gegebener Kurven hindurchgeht, s. *A. Cayley*[442]), resp. Quart. J. 11 (1871), p. 99 = Papers 8, p. 22. — Einige (zum Teil metrische) Sätze über die Schnittpunkte der Kurven eines Büschels mit Geraden oder mit Kurven eines andern Büschels gab *A. V. Bäcklund,* Lund Årsskr. 5 (1868), der davon eine Anwendung macht auf die projektive Konstruktion einer C^4 durch gegebene 14 Punkte (Nr. **10**).

439) S. [254]), § 21; vgl. *Cremona,* Intr. n. 85.

440) *Em. Weyr*[32]). — Der Fall eines Büschels mit einem vielfachen Basispunkt bei *F. Chizzoni,* Rom Linc. Mem. (3) 19 (1883), p. 301 (n. 13, 14, 23); *Pieri*[282]). — Systematisch untersucht die Φ *G. B. Guccia,* Pal. Rend. 9 (1894), p. 1; die Φ besitzen viele Eigenschaften, die denen der ersten Polaren analog sind, an deren Stelle wir sie bei manchen Fragen treten lassen können. *Guccia* (l. c., auch Lezioni litog. Palermo 1889/90, p. 155 ff.) wendet sie an z. B. auf die Konstruktion und Untersuchung der Jacobiana eines Netzes (Nr. **6**), und auf die *Plücker*schen Formeln (Nr. **8**); er beschäftigt sich auch mit der Jacobiana des Netzes der Φ, die ebensowohl als Ort der Berührungspunkte der von den Punkten der Ebene an die bezüglichen Φ gelegten Tangenten angesehen werden kann, wie als Ort der Wendepunkte der Kurven des gegebenen Büschels. Die Ordnung $6(n-1)$ und die Klasse $6(n-2)(4n-3)$ des letzteren Ortes giebt schon *K. Bobek* an, Časopis 11 (1882), p. 283; vgl. auch *Doehlemann*[32]), p. 553; die Enveloppe der Wendetangenten der Büschelkurven besitzt die Klasse $3n(n-2)$. S. auch *J. de Vries,* Amst. Versl. (2) 13 (1905), p. 711; 14 (1906), p. 817. — Über das Netz der Φ s. auch *W. Bouwman,* Nieuw Arch. v. Wisk. (2) 4 (1900), p. 258.

441) *C. Segre,* Torino Atti 31 (1896), p. 485, wo diese Formeln aus andern abgeleitet werden, die sich auf Kurvenbüschel auf irgend einer algebraischen Fläche beziehen. Für zwei allgemeine Büschel gab *Steiner*[55]) die Ordnung von T

$$t = 12(nn' + p + p') - 3(\sigma + \sigma') - 9,$$
$$d = 4[n^2n'^2 + (nn' - 6)(p + p') + pp' - 7nn' + \sigma + \sigma' + 5].$$

b) *Netze* (vgl. Nr. **6**). Für ein Netz (in einer Ebene π) ist die Bildfläche (Nr. **37**) eine D-fache Ebene π', von der jeder Punkt einer Gruppe von D Basispunkten eines Büschels von Netzkurven entspricht. Ein Punkt P, der für eine solche Gruppe, d. h. für eine Kurve des Netzes Doppelpunkt ist, entspreche einem Punkte P' von π': der Ort J von P ist die Jacobiana des Netzes, die „*Doppelkurve*" von π, der Ort J' von P' ist die *Grenzkurve* von π'. J und J' stehen in ein-eindeutiger Korrespondenz, haben also das nämliche Geschlecht $9p - \sigma + 1$ (dies unterliegt Modifikationen, wenn Fundamentalkurven existieren, da diese Teile von J sind). Die Tangenten von J' entsprechen den mit Doppelpunkt behafteten Kurven des Netzes. J' besitzt die Ordnung $2(D + p - 1)$ und die Klasse $D + 4p + \sigma - 1$, und die *Plücker*'schen Formeln liefern damit die Anzahlen ihrer Doppel- und Wendetangenten, ihrer Doppelpunkte und Spitzen; diese Anzahlen sind ebensoviele Charaktere für das Netz, nämlich (indem von der ersten die Anzahl der *einfachen* Basispunkte des Netzes in Abzug zu bringen ist, zu dessen jedem eben eine Doppeltangente von J' entspricht) die Anzahlen seiner Kurven mit zwei Doppelpunkten oder mit einer Spitze, und die seiner Büschel, die miteinander eine zweimalige Berührung oder eine solche zweiter Ordnung eingehen[442]).

und den Wert von t ohne Beweis an; Beweise der ersten Angabe lieferten *Cremona*, Intr. n. 90; *Kötter*[155]), p. 131; beider *J. N. Bischoff*, J. f. Math. 64 (1864), p. 185; *L. Berzolari*, Torino Atti 31 (1896), p. 476, die auch (der zweite mit stereometrischer Methode) den Wert von d berechneten. — *M. de Franchis*, Pal. Rend. 10 (1895), p. 118; 11 (1896), p. 12 hat synthetisch die Kurve T untersucht, und allgemeiner den Ort der Punkte der Berührung k^{ter} Ordnung der Kurven eines Büschels mit denen eines linearen Systems ∞^k, und vielfache Anwendungen davon gemacht. Den Fall $k = 2$ behandelt auch, analytisch, *G. Bagnera*, Pal. Rend. 10 (1895), p. 81; den Fall eines beliebigen k und eines Strahlbüschels *Guccia*[153]) und [440]), p. 63, der hieraus eine synthetische Definition der Polarkurven (Nr. **11**) herleitet. Diesen letzteren Fall hat methodisch untersucht, mit verschiedenen Ausdehnungen und Anwendungen auf eine synthetische Theorie der Polarkurven, *G. Aguglia*, La curva Φ_p^k etc., Palermo 1904. — Über einige allgemeinere Fragen s. Nr. **9**.

442) Für ein Netz von ersten Polaren s. [80]); für irgend ein Netz *A. Cayley*, Cambr. Trans. 11 (1863), p. 21 = Papers 5, p. 295; *Cremona*[58]); *E. de Jonquières*, Paris C. R. 67 (1868), p. 1338; Math. Ann. 1 (1869), p. 424; *A. V. Bäcklund*, Stockh. Vet.-Ak. Handl. 9^2 (1870), Nr. 9 (n. 52, 53); *Köhler*, Soc. math. de France Bull. 1 (1873), p. 124 (wo jedoch Einiges nicht exakt ist); *J. de Vries*, Amst. Versl. (2) 13 (1905), p. 708. Die allgemeinen Formeln des Textes verdankt man *Caporali*[428]), § 2; als spezielle Fälle anderer, die sich auf Kurvennetze auf irgend

Über die besonderen Eigenschaften *homaloider Netze*, die sich übrigens sämtlich aus den allgemeinen Sätzen über lineare Systeme vom Geschlecht $p = 0$ ableiten lassen, siehe III C 11 (*Castelnuovo* und *Enriques*).

c) ∞^3 *Systeme.* Für ein lineares ∞^3 System von Kurven f, dem Bilde einer Fläche F (Nr. **37**), ist die Klasse von F gleich der Anzahl $D + 4p + \sigma - 1$ der Doppelpunkte eines Büschels von Kurven f ausserhalb der fundamentalen Punkte und Kurven. Einem Netze des Systems entsprechen die Schnitte von F mit den durch einen Punkt O gehenden Ebenen; der Jacobiana J des Netzes die Berührungskurve des von O an F gelegten Berührungskegels. Die ∞^3 Netze des Systems liefern ∞^3 J, die ein lineares System bilden. Zwei der J schneiden sich, ausser in den Basispunkten, in $3D + 12p - \sigma - 3$ Punkten; schliesst man von diesen die Doppelpunkte des beiden Netzen gemeinsamen Büschels aus, so verbleiben $2(D + 4p - \sigma - 1)$ Punkte C derart, dass die Polargeraden eines jeden in bezug auf alle f durch ein- und denselben Punkt C' laufen. Die Punkte C liegen also auf allen J und sind die Berührungspunkte für Netze von f (mit der gemeinsamen Tangente CC'), oder auch die Doppelpunkte für ein ganzes Büschel von f (und damit Spitzen zweier f); sie sind die Bilder der Kuspidalpunkte[443]), die auf der Doppelkurve von F liegen. Diese Kurve ist von der Ordnung $\frac{1}{2}(D-1)(D-2) - p$ [444]) und ihre Bildkurve Δ, der Ort der „neutralen Paare" von Punkten für das ∞^3 System (d. i. der Paare, die den f nur eine Bedingung statt zweier auferlegen) besitzt die Ordnung $(D-4)n + 3$, und in jedem ν-fachen Basispunkte die Multiziplität $(D-4)\nu + 1$;[445]) sie geht überdies durch jeden Punkt C und berührt daselbst die Gerade CC'. Jene Doppelkurve hat

$$t = \tfrac{1}{6}(D-1)(D^2 - 8D + 18) - p(D-8) - \sigma$$

dreifache Punkte, die auch dreifache Punkte für F[446]) sind; obige

---

einer algebraischen Fläche beziehen, wurden sie wiedergefunden von *F. Severi*, Torino Atti 37 (1902), p. 625 (n. 10); s. auch *M. Pannelli*, Pal. Rend. 20 (1905), p. 34.

443) „Pinch-points" nach *Cayley*, Quart. J. 9 (1868), p. 332 = Papers 6, p. 123. Über die obigen Eigenschaften s. *Caporali* [428]).

444) Ist s der Überschuss des Systems, so folgt aus [393]), dass jene Ordnung $\gtreqless \frac{1}{2}(D-2)(D-3) - s$ ist; vgl. *Clebsch* [445]), p. 255.

445) Analytisch bewiesen von *A. Clebsch*, Math. Ann. 1 (1868), p. 253 (§ 7); geometrisch von *Caporali*, l. c., n. 17.

446) *A. Cayley*, Math. Ann. 3 (1870), p. 469 = Papers 8, p. 388; *Caporali*, l. c., n. 19.

Anzahl ist daher auch die der „neutralen Tripel“ für das System (die nur reine Bedingung involvieren); deren $3t$ Punkte sind Doppelpunkte für Δ. — Die Jacobiana eines Netzes von Kurven J setzt sich zusammen aus einer f und dem Orte der Spitzen von f-Kurven: dieser Ort [das Bild der parabolischen Kurven von F, die von der Ordnung $4(D + 2p - 2)$ ist] besitzt demnach die Ordnung $4(2n - 3)$, die Multiplizität $4(2\nu - 1)$ in jedem ν-fachen Basispunkte, und einen Doppelpunkt in jedem Punkte C.

Diese Eigenschaften verdankt man *Caporali*[428]), der auf dem nämlichen Wege noch andere abzählende Aufgaben gelöst und u. a. die Anzahlen der f mit einem Selbstberührungspunkt resp. mit einem Doppelpunkt und einer Spitze resp. mit drei Doppelpunkten bestimmt hat[447]). Diese Anzahlen sind resp.:

$$\begin{aligned}
&2(64p - 7D - 6\sigma + 20),\\
&24p(D + 4p + \sigma - 25) + 48(D + \sigma - 3),\\
&\tfrac{1}{6}(D + 4p + \sigma)^3 - (D + 4p + \sigma)(2D + 41p + \sigma)\\
&\quad - \tfrac{1}{6}(175D - 3434p + 223\sigma) + 106.
\end{aligned}$$

In manchen besondern Fällen (z. B. wenn irgend einer der Basispunkte ein einfacher oder doppelter ist) erleiden einige der obigen Anzahlen Reduktionen, die *Caporali* angegeben hat, l. c. § 6.

447) Für ein allgemeines System ∞^3 von C^n, d. i. mit
$$p = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2), \quad D = n^2, \quad \sigma = 0,$$
wurden die Werte der zweiten und dritten Anzahl schon von *Bäcklund*[442]), n. 95 angegeben.

Zusätze:

An den Schluss der Anm. 4), p. 318:

Ein Satz, der die Zahl n als Doppelverhältnis von vier Geraden eines Büschels giebt, bei *G. B. Guccia*, Paris C. R. 142 (1906), p. 1256; Ausdehnungen auf die Flächen, ib., p. 1494, auf die Raumkurven, Pal. Rend. 21 (1906), p. 389.

Anmerkung 8a), p. 320, Z. 7 noch die Worte: „C^n kann dabei einfach oder zusammengesetzt sein (wegen der Ausnahmefälle s. Nr. **33**)“:

8a) In der Tat ist es möglich, die $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte derart zu wählen, dass durch dieselben eine einzige C^n hindurchgeht: es genügt,

n Geraden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu nehmen, und auf a_1 zwei Punkte, auf a_2 drei Punkte, ..., auf a_n $n+1$ Punkte zu fixieren. Eine C^n durch diese $2+3+\cdots+(n+1)=\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte enthält a_n, dann a_{n-1}, u. s. w. Diese Bemerkung, welche mir von *F. Severi* mitgeteilt wurde, kann auf die Gebilde im R_r, die durch eine Gleichung vom Grade n in den $r+1$ homogenen Koordinaten dargestellt sind, ausgedehnt werden, indem man die Formel

$$\binom{n+r+1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-1}+\cdots+\binom{r}{r-1}=\binom{n+r}{r}-1$$

gebraucht.

Am Ende der Anmerkung 34):

Sätze, die diesen beiden von *Bertini* analog sind, gelten auch für die Linearsysteme von Kurven auf irgend einer algebraischen Fläche. Für den ersten s. *Noether*[414]), p. 171; Math. Ann. 8 (1874), p. 524; für beide *F. Enriques*[36]); ein geometrischer Beweis des zweiten für die höheren algebraischen Gebilde bei *F. Severi*, Torino Atti 41 (1905), p. 205 (n. 1).

Am Ende der Anmerkung 74):

Über die *Jacobi*'sche Kurve eines Netzes auf irgend einer algebraischen Fläche, s. *Enriques*[322]), n. 13 ff.; für die Bestimmung ihrer Multiplizität in einem s-fachen Basispunkte des Netzes s. *Severi*[442]), Anm. zu n. 2.

Ende der Anm. 295), nach der Formel $p \leqq (n-1)(n'-1) + n\pi + n'\pi'$, *ist hinzuzufügen:*

Andere Anwendungen des Kriteriums von *Castelnuovo* — auf Kurven, Flächen und höhere algebraische Gebilde — hat *F. Severi* gegeben, Veneto Ist. Atti (8) 8 (1906), p. 625, insbesondere eine Erweiterung seines letzten Satzes auf reduzible Systeme, und einen algebraischen Beweis des folgenden — von ihm vorher schon, Pal. Rend. 21 (1905), p. 257 (Anm. zu p. 281), auf transzendentem Wege bewiesenen — Satzes: „Wenn es auf einer algebraischen Kurve ein irreduzibles algebraisches ∞^1 System von Gruppen aus n Punkten giebt, derart, dass die Vielfachen nach k von diesen Gruppen einer linearen Schar angehören, so gehören auch die Gruppen selbst einer linearen Schar an."

(Abgeschlossen im Juni 1906.)