wendung der Annahme einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf die Berechnung der Kometenbahnen.

III. Erweiterung des Newton'schen Gesetzes für bewegte Körper [82]).

21. Übertragung der elektrodynamischen Grundgesetze auf die Gravitation. Das Ergebnis der Versuche, unter Beibehaltung des *Newton*'schen Gesetzes auch für bewegte Körper eine endliche Fortpflanzung der Gravitation einzuführen und dadurch die bestehenden Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung zu heben, muss als ein wenig befriedigendes bezeichnet werden. Es ist deshalb nicht zu verwundern, wenn versucht wurde, die Giltigkeit des *Newton*'schen Gesetzes für bewegte Körper überhaupt in Zweifel zu ziehen, es nur als Spezialfall für ruhende Körper zu betrachten und für bewegte Körper ein erweitertes Gesetz an seine Stelle zu setzen.

Vor allem wurde untersucht, ob nicht die schon bekannten elektrodynamischen Grundgesetze dem genannten Zwecke genügen.

Das *Weber*'sche Grundgesetz, das *Zöllner* bekanntlich für das Grundgesetz aller Fernkräfte hielt, wonach für zwei Massenelemente m_1 und m_2 im Abstand r das Potential

$$P = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}\left[1 - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \qquad (c = \text{Lichtgeschwindigkeit})$$

ist, wurde von *C. Seegers* [83]) und *G. Holzmüller* [84]) auf die Planetenbewegungen im allgemeinen durchgeführt, von *F. Tisserand* [85]) und *H. Servus* [86]) numerisch durchgerechnet. Es würde für den Merkur eine anomale säkulare Perihelbewegung von ca. 14″ geben.

Die Übertragung des *Gauss*'schen [87]) elektrodynamischen Grundgesetzes auf die Gravitation in der Form, dass als Anziehungskraft K zweier Massenelemente mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 bezw. x_2, y_2, z_2,

---

82) Referate über einen Teil der Arbeiten aus diesem Gebiet bei *S. Oppenheim* [77]), *P. Drude* [77]) und *F. Tisserand* [77]).

83) Diss. Göttingen 1864.

84) Zeitschr. Math. Phys. 1870, p. 69—91.

85) Paris, C. R. 75 (1872), p. 760 und 110 (1890), p. 313.

86) Diss. Halle 1885. *F. Zöllner* citiert, *W. Scheibner* habe nach brieflicher Mitteilung auf Grund des *Weber*'schen Gesetzes 6,7″ säkulare Perihelbewegung für Merkur berechnet. Den Grund für die Abweichung dieser Zahl von der im Texte angegebenen doppelt so grossen liegt darin, dass *Scheibner* die Konstante c im *Weber*'schen Gesetz gleich dem $\sqrt{2}$fachen der Lichtgeschwindigkeit setzt.

87) Ges. Werke 5, p. 616 f., Nachlass.

$$K = \frac{G \cdot m_1 m_2}{r^2}\left\{1 + \frac{2}{c^2}\left[\left(\frac{d(x_1 - x_2)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(y_1 - y_2)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(z_1 - z_2)}{dt}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\right\}$$

angenommen wird, liefert nach der Berechnung von *F. Tisserand*[88]) für den Merkur auch nur eine säkulare Perihelbewegung von 28″.

Aus dem *Riemann*'schen[89]) Grundgesetz:

$$P = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}$$

(x, y, z Koordinaten von m_1 relativ zu m_2)

würde nach *M. Lévy*[90]) gerade die doppelte Perihelbewegung des Merkur, wie aus dem *Weber*'schen Gesetze folgen.

Lévy hat deshalb vorgeschlagen, das *Riemann*'sche und *Weber*'sche Gesetz zu kombinieren in der Form:

$$\begin{aligned} P &= P_{Weber} + \alpha\,(P_{Riemann} - P_{Weber}) \\ &= \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[(1 - \alpha)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \alpha\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

und nun α aus der beobachteten säkularen Perihelbewegung des Merkur zu bestimmen. Nimmt man als beobachtete Perihelbewegung 38″, als durch das *Weber*'sche Gesetz geliefert 14,4″[91]), so folgt $\alpha = 1{,}64$ = approx. $^5/_3$.[90]) Wird die durch andere Beobachter angegebene Perihelbewegung des Merkur 41,25″, als durch das *Weber*'sche Gesetz gegeben 13,65″[91]) zu Grunde gelegt, so wird $\alpha = 2{,}02$.

Das Gesetz, zu welchem man auf diese Weise gelangt, hat den entschiedenen Vorteil, in der Elektrodynamik genau das gleiche zu leisten wie das *Riemann*'sche und *Weber*'sche, für die Gravitation aber eine Erweiterung des *Newton*'schen Gesetzes für bewegte Körper darzustellen, welche die schlimmste Differenz, die bisher zwischen Beobachtung und Berechnung bestand, wegschafft.

22. Übertragung der Lorentz'schen elektromagnetischen Grundgleichungen auf die Gravitation. *H. A. Lorentz*[92]) hat den Versuch gemacht, die von ihm auf bewegte Körper ausgedehnten *Maxwell*'schen Gleichungen[93]) auf die Gravitation anzuwenden. In der Vorstellung

88) Paris, C. R. 110 (1890), p. 313.

89) Schwere, Elektrizität und Magnetismus, ed. *Hattendorf*, Hannover 1896, p. 313 ff.

90) Paris, C. R. 110 (1890), p. 545—551. Für die Bewegung von zwei Massen wurde das Gesetz allgemein schon von *O. Limann* (Diss. Halle 1886) behandelt.

91) *Tisserand*[85]) (Paris, C. R. 75) und *Servus*[86]).

92) Amsterdam Versl., April 1900.

93) Harlem, Arch. Néerl. 25 (1892), p. 363.

über die Konstitution der gravitierenden Moleküle schliesst er sich dabei im wesentlichen, wenn auch in etwas modernisierter Form, an *F. Zöllner* an. Über die Begründung des *Lorentz*'schen Ansatzes wird in Nr. **36** berichtet werden.

Die Zusatzkräfte, welche *Lorentz* ausser den vom *Newton*'schen Gesetz gelieferten bekommt, enthalten als Faktor entweder $\left(\frac{p}{c}\right)^2$ oder $\frac{p \cdot w}{c^2}$, worin p die konstant angenommene Geschwindigkeit des Centralkörpers, w die Geschwindigkeit des Planeten relativ zum Centralkörper und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Diese Zusatzkräfte sind also so klein, dass sie wohl in allen Fällen sich der Beobachtung entziehen werden, im Falle des Merkur, wie die Rechnung von *Lorentz* zeigt, sicher unter dem Beobachtbaren liegen. Daraus folgt, dass die *Lorentz*'schen Gleichungen, verbunden mit der *Zöllner*'schen Anschauung über die Natur der gravitierenden Moleküle, auf die Gravitation zwar angewandt werden können[94]), aber zur Beseitigung der bestehenden Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung nichts beitragen.

23. Die Laplace'sche Annahme. In ganz anderer Weise hat schon *Laplace*[95]) eine Erweiterung des *Newton*'schen Gesetzes für bewegte Körper ins Auge gefasst. Er scheint sich die vom anziehenden Körper m_1 ausgehende Kraft als eine Art Welle vorzustellen, die auf jeden Körper m_2, den sie trifft, eine Anziehungskraft vom Betrage $G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ in der Richtung, in welcher sie fortschreitet, ausübt. Nun kommt es bei der Wirkung einer solchen Welle auf einen in Bewegung befindlichen Körper m_2 nur an auf die *relative* Bewegung von Welle und Körper. Man kann sich also den Körper m_2 im Raum ruhend denken, wenn man der Welle ausser ihrer Geschwindigkeit in der Richtung von r noch eine Geschwindigkeitskomponente, gleich und entgegengesetzt der Geschwindigkeit von m_2, erteilt. Der Körper m_2 erhält also nicht nur eine Kraftkomponente in der Richtung von r, sondern auch noch eine andere, entgegen der Richtung seiner Bahn und vom Betrage $\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{v}{c}$[96]), wenn $v =$ Geschwindigkeit von m_2, c Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation bezeichnet.

94) Das schliesst die Möglichkeit in sich, dass *die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation gleich der Lichtgeschwindigkeit* ist.

95) Méc. cél. 4, livre X, chap. VII, § 19 u. 22.

96) Die Verhältnisse würden also ganz denen bei der Aberration des Lichts entsprechen.

Die Durchführung dieser Anschauung liefert für die Planeten wenig Befriedigendes: sie ergiebt eine Perihelbewegung überhaupt nicht, wohl aber eine säkulare Änderung der mittleren Länge und zwar z. B. für den Mond von solchem Betrage, dass als unterste Grenze von c ungefähr 100 000 000 mal die Lichtgeschwindigkeit angenommen werden müsste. Nicht uninteressant ist aber, dass die Anschauung von *Laplace* dieselbe Wirkung ergiebt, wie ein der Geschwindigkeit des Planeten proportionaler *Widerstand des Mediums.*

Ein — allerdings dem *Quadrat* der Geschwindigkeit proportionaler — Widerstand des Mediums könnte vielleicht nach *Encke*[97]) und *v. Oppolzer*[98]) die p. 36 aufgeführten Unregelmässigkeiten des *Encke*'schen Kometen erklären. Die von *Oppolzer* vorausgesetzten und auf dieselbe Weise erklärten Anomalien des *Winnecke*'schen Kometen sind inzwischen durch Rechnungen *E. v. Haerdtl*'s[99]) als nicht vorhanden nachgewiesen worden.

24. Die Annahme von Gerber. Die beiden Voraussetzungen von *P. Gerber*[100]) sind die folgenden.

a) Das von einer Masse μ nach einer zweiten m ausgesandte Potential P ist $\frac{\mu}{r}$, wo r den Abstand von μ und m *im Moment der Aussendung* des Potentials bedeutet. Dieses Potential pflanzt sich mit der endlichen Geschwindigkeit c fort.

b) Es ist eine gewisse Dauer nötig, damit das Potential „bei m angelangt, dieser Masse sich mitteile, d. h. den ihm entsprechenden Bewegungszustand von m hervorrufe". „Wenn die Massen ruhen, geht die Bewegung des Potentials mit ihrer eigenen Geschwindigkeit an m vorüber; dann bemisst sich sein auf m übertragener Wert nach dem umgekehrten Verhältnis zum Abstande. Wenn die Massen aufeinander zueilen, verringert sich die Zeit der Übertragung, mithin der übertragene Potentialwert im Verhältnis der eigenen Geschwindigkeit des Potentials zu der aus ihr und der Geschwindigkeit der Massen bestehenden Summe, da das Potential in Bezug auf m diese Gesamtgeschwindigkeit hat."

Zu dem Wert, den das Potential unter diesen Annahmen haben muss, gelangt *Gerber* auf folgende Weise:

„Das Potential bewegt sich ausser mit seiner Geschwindigkeit c noch mit der Geschwindigkeit der anziehenden Masse. Der Weg

---

97) Citiert bei *von Oppolzer.*

98) Astr. Nachr. 97, p. 150—154 u. 228—235.

99) Wien. Denkschr. 56 (1889), p. 179 f.

100) Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 93—104.

$r - \Delta r$[101]), den die beiden sich entgegenkommenden Bewegungen, die des Potentials und die der angezogenen Masse, in der Zeit Δt zurücklegen, beträgt daher

$$\Delta t\left(c - \frac{\Delta r}{\Delta t}\right),$$

während $r = c\,\Delta t$ ist. Also erhält man für den Abstand, bei dem sich das Potential zu bilden anfängt und dem es umgekehrt proportional ist,

$$r - \Delta r = r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{\Delta r}{\Delta t}\right).$$

Weil ferner die Geschwindigkeit, mit der die Bewegungen aneinander vorbeigehen, den Wert

$$c - \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

hat, fällt das Potential wegen des Zeitverbrauchs zu seiner Mitteilung an m auch proportional

$$\frac{c}{c - \frac{\Delta r}{\Delta t}}$$

aus. Man findet so

$$P = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2}.$$

Solange der Weg Δr kurz und deshalb $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ gegen c klein ist, darf man dafür $\frac{dr}{dt}$ setzen. Dadurch wird

$$P = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2},$$

woraus mit Hülfe des binomischen Satzes bis zur zweiten Potenz folgt:

$$P = \frac{\mu}{r}\left[1 + \frac{2}{c}\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].“$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf die Planetenbewegungen ergiebt das bemerkenswerte Resultat: Bestimmt man aus der beobachteten Perihelbewegung des Merkur die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, so erhält man $c = 305\,500$ km/sec, also überraschend genau die Lichtgeschwindigkeit oder: *Setzt man in der Gerber'schen Gleichung als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation die Lichtgeschwindigkeit ein, so ergiebt diese Gleichung genau die beobachtete anomale Perihelbewegung des Merkur.*

Für die anderen Planeten folgen aus der *Gerber*'schen Annahme

101) $\Delta r > 0$ bei wachsendem r.

keine Schwierigkeiten, ausgenommen für Venus, wo der *Gerber*'sche Ansatz die etwas zu grosse säkulare Perihelbewegung von 8″ ergiebt.

Die *Gerber*'sche Annahme zeigt also, ebenso wie diejenige von *Lévy*, dass eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation von derselben Grösse wie die Lichtgeschwindigkeit nicht nur möglich ist, sondern sogar dazu dienen kann, die schlimmste Differenz, welche bisher zwischen astronomischer Beobachtung und Berechnung vorhanden war, aus der Welt zu schaffen. Allerdings ist dies nur erreicht worden dadurch, dass die Gültigkeit des *Newton*'schen Gesetzes auf ruhende Körper beschränkt und für bewegte Körper ein erweitertes Gesetz zu Grunde gelegt wurde.

IV. Erweiterung des Newton'schen Gesetzes für unendlich grosse Massen.

25. Schwierigkeit des Newton'schen Gesetzes bei unendlich grossen Massen. Gegen die Allgemeingültigkeit des *Newton*'schen Gesetzes sind noch nach einer ganz anderen Richtung Bedenken geäussert und ist die Notwendigkeit einer Erweiterung in Betracht gezogen worden.

Im Falle, dass der Weltraum unendlich viele Massen enthält, hätte man, um die in irgend einem Punkt wirkende Kraft zu bekommen, streng genommen die Aufgabe zu lösen: die Wirkung unendlich vieler Massen von endlicher Grösse in einem bestimmten Punkte anzugeben.

C. Neumann[102]) hat wohl zuerst darauf hingewiesen, dass in diesem Falle die aus dem *Newton*'schen Gesetz sich ergebenden Kräfte unbestimmt werden können. *H. Seeliger*[103]) hat diese Frage allgemeiner durchgeführt und gezeigt, dass bei unendlichen Massen das *Newton*'sche Gesetz sowohl unendlich grosse Kräfte liefern als dieselben auch ganz unbestimmt lassen kann.

26. Beseitigung der Schwierigkeit durch Änderung des Attraktionsgesetzes. Zur Beseitigung dieser Schwierigkeit schlägt *Seeliger* vor, das *Newton*'sche Gesetz etwas zu modifizieren und diskutiert verschiedene Möglichkeiten.

Die schon von *Laplace* besprochene Form

$$K = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot e^{-\alpha r}$$

102) Leipz. Abh. 1874.

103) Astr. Nachr. 137 (1895), p. 129—136; Münchn. Ber. 26 (1896), p. 373—400. Kontroverse von *J. Wilsing* und *H. Seeliger* über den Gegenstand, Astr. Nachr. 137 u. 138.