Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0081
LOG Titel: 15. Nutzbare Energie oder Wirkungsfähigkeit
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Leistet das System keine Arbeit nach aussen, so wird dQ_a gleich dem Zuwachs der inneren Energie dU; Gl. (23) ergiebt dann

$$U_B - U_A \leqq T_a(S_B - S_A)$$

oder

$$U_B - T_a S_B \leqq U_A - T_a S_A. \tag{25}$$

c) *Die Umgebung habe die gleichförmige, konstante Temperatur T_a und übe den gleichförmigen, konstanten Druck p_a senkrecht gegen die Begrenzung des Systems aus;* dann beträgt die Arbeitsleistung nach aussen $p_a dV$ und es wird $dQ_a = dU - p_a dV$; Gl. (23) ergiebt jetzt

$$U_B - T_a S_B + p_a V_B \leqq U_A - T_a S_A + p_a V_A. \tag{26}$$

d) *Hat das System selbst konstante gleichmässige Temperatur und konstanten gleichmässigen Druck*, so kann man in (25) und (26) T_a durch T und p_a durch p ersetzen. Die dort vorkommenden Ausdrücke werden dann mit den thermodynamischen Potentialen bei gegebenem Volumen oder bei gegebenem Druck (vgl. Nr. **16**) identisch und unsere Ungleichungen besagen alsdann, dass unter den angegebenen Umständen *das System nur solche Übergänge von Zuständen A zu Zuständen B ausführen kann, bei denen die genannten Potentiale nicht wachsen.*

15. Nutzbare Energie oder Wirkungsfähigkeit. Ein Körper M befinde sich auf der absoluten Temperatur T und es sei T_0 die niedrigste Temperatur, die für den Kühler einer mit dem Körper M als Quelle konstruierten Wärmemaschine in Betracht kommt. Wenn dem Körper die Wärmemenge dQ entzogen und wenn gleichzeitig dem Kühler die Wärmemenge dQ_0 mitgeteilt wird, so beträgt die mechanische Arbeit, die in einem vollkommen umkehrbaren Prozess im Maximum geleistet werden kann:

$$dA = dQ - dQ_0, \quad \text{wobei} \quad \frac{dQ}{T} = \frac{dQ_0}{T_0}.$$

Hieraus folgt

$$dA = dQ\left(1 - \frac{T_0}{T}\right). \tag{28}$$

Bedeutet dT den Temperaturabfall, der durch Entziehen der Wärmemenge dQ in dem Körper M bewirkt wird, und Γ die Wärmekapazität des Körpers, so wird die Gesamtarbeit, die aus dem Körper gezogen werden kann, wenn man seine Temperatur bis T_0 erniedrigt:

$$A = \int_{T_0}^{T} \Gamma\left(1 - \frac{T_0}{T}\right) dT.$$

Diese Grösse heisst die *nutzbare Energie des Körpers* oder *seine Wirkungsfähigkeit* [38]).

Ist der Körper kälter als seine Umgebung, so kann man die Sache so auffassen, als ob er ebenfalls ein Quantum nutzbarer Energie besitzt, welches gegeben ist durch

$$Q = \int_{T}^{T_1} \Gamma\left(\frac{T_1}{T} - 1\right) dT,$$

wo T_1 die für den Prozess in Betracht kommende höchste Temperatur der Umgebung und $T < T_1$ ist. Der Prozess würde jetzt darin bestehen, dass dem Körper von aussen her Wärme zugeführt wird, bis er die Temperatur T_1 angenommen hat [39]).

Wenn die Wärmemenge dQ durch Leitung von der Temperatur T_1 zu der Temperatur T_2 übertragen wird, nimmt die mit Hülfe eines Kühlers von der Temperatur T_0 verfügbar werdende Nutzarbeit um den Betrag

$$T_0 dQ\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

ab; wenn ausserdem die Arbeit dW (etwa durch Reibung) bei der Temperatur T in Wärme verwandelt wird, nimmt die nutzbare Energie ferner ab um

$$T_0 dW \frac{1}{T}$$

und nur der Rest von dW kann rückwärts in Arbeit verwandelt werden.

In allen solchen Fällen sagt man, dass die genannten Energiebeträge zerstreut worden sind. Da in Wirklichkeit Reibung und Wärmeabgabe durch Leitung nie völlig zu vermeiden sind, tritt eine Zerstreuung der nutzbaren Energie überall auf. Man spricht daher von dem *Prinzip der Energiezerstreuung* oder *Dissipation* [40]).

Betrachten wir ein System von Körpern, welches sich in einem unendlichen gleichförmig temperierten Medium befindet, so können wir über die nutzbare Energie des Systems die folgenden Sätze aussprechen:

38) Lord *Kelvin*, Phil. Mag. 7 (1879), p. 348; Math. Phys. Papers 1, p. 456.

39) Der umgekehrte Prozess, bei dem ein Körper unter die Temperatur seiner Umgebung abgekühlt werden soll, verbraucht Nutzarbeit; man denke an die Erzeugung von künstlichem Eis in einer Eismaschine, die durch eine Dampfmaschine bethätigt wird.

40) Lord *Kelvin*, Edinb. Proc. 3 (1852); Phil. Mag. (4) 4 (1852) p. 304 und 4) 5 (1853), p. 102; Math. Phys. Papers 1, p. 511 u. 554.

1) *Sie hängt von der Temperatur T_0 des umgebenden Mediums ab.*

2) *Sie ist, für jeden Körper einzeln berechnet, um so grösser, je mehr seine Temperatur von T_0 verschieden ist.*

3) *Sie nimmt bei allen nicht umkehrbaren Prozessen ab.*

4) *Ihre Abnahme beträgt bei jedem solchen Prozesse das T_0-fache der Zunahme der Entropie.*

Wenn man die Arbeit berechnet, die jeder Körper beim Abkühlen auf die Temperatur T_0 der Umgebung zu leisten vermag, ergiebt sich der folgende einfache Ausdruck[41]) der nutzbaren Energie:

Angenommen, es werde dem Körper die Wärmemenge dQ entzogen, und es betrage dabei die Änderung des Volumens dV, die Änderung der inneren Energie dU. Die Arbeit, welche die Wärmemenge dQ zwischen den Temperaturen T und T_0 leisten kann, ist $dQ(1-T_0/T)$ und die Arbeit, welche der Körper vermöge seiner Volumänderung leistet, ist $-pdV$. Daher beträgt die gesamte verfügbar werdende mechanische Arbeit

$$dA = dQ\left(1-\frac{T_0}{T}\right) - pdV;$$

da aber

$$dU = dQ - pdV$$

war, kann man schreiben

$$dA = dU - T_0\frac{dQ}{T} = dU - T_0 dS.$$

Die gesamte nutzbare Energie des Körpers ergiebt sich so zu

$$(29) \qquad A = \int_{T_0}^{T}(dU - T_0 dS) = U - U_0 - T_0(S - S_0).$$

Handelt es sich um ein nach aussen hin isoliertes System ungleich erwärmter Körper von endlicher Grösse, so ist die innerhalb des Systems nutzbar zu machende Energie gleich derjenigen Arbeit, die man erhält, wenn man durch vollkommen umkehrbare Prozesse das ganze System auf eine gemeinsame Temperatur bringt[42]).

Die gemeinsame Temperatur sei T_0. Das Endergebnis wird durch die Annahme nicht geändert, dass die Vorgänge zwischen den Körpern des Systems einerseits und einem Hülfskörper andererseits stattfinden, der selbst die Temperatur T_0 besitzt, vorausgesetzt, dass die algebraische Summe der vom Hülfskörper aufgenommenen Wärme-

41) Einen geometrischen Beweis desselben giebt *Maxwell,* Theory of heat, chap. 12, 10. Aufl. (1891), p. 188.

42) Lord *Kelvin,* Edinb. Proc. 3 (1852), p. 139; Phil. Mag. (4) 4 (1852), p. 304 und (4) 5 (1853), p. 102; *Tait,* Sketch of thermodynamics, p. 124; Edinb. Proc. 1867—1868.

mengen gleich Null ist. Bedeutet T_r die Anfangstemperatur, Γ_r die Wärmekapazität des r^{ten} Körpers, so wird nach dem zweiten Hauptsatz die von dem r^{ten} Körper auf den Hülfskörper übertragene Wärme

$$T_0 \int_{T_0}^{T_r} \Gamma_r \frac{dT}{T};$$

da aber der Hülfskörper im ganzen keine Wärmezufuhr erhalten soll, muss sein:

$$\sum^{(r)} \int_{T_0}^{T_r} \Gamma_r \frac{dT}{T} = 0. \tag{30}$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Endtemperatur T_0. Ist letztere bekannt, so berechnet sich die nutzbare Energie als die während des Temperaturausgleichs freigewordene Wärmemenge zu

$$A = \sum^{(r)} \int_{T_0}^{T_r} \Gamma_r dT. \tag{31}$$

Ist die Wärmekapazität der Körper insbesondere unabhängig von der Temperatur, so lauten die beiden letzten Gleichungen einfach:

$$\log T_0 = \frac{\Sigma \Gamma_r \log T_r}{\Sigma \Gamma_r} \tag{32}$$

und

$$A = \Sigma \Gamma_r T_r - T_0 \Sigma \Gamma_r. \tag{33}$$

Besteht das System nur aus zwei Körpern von gleicher Wärmekapazität ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma/2$, wo Γ die Wärmekapazität des ganzen Systems bedeutet), so ergiebt sich

$$T_0 = \sqrt{T_1 T_2}; \quad A = \frac{\Gamma}{2}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2.$$

Auch im allgemeinen Falle von beliebig vielen Körpern und beliebigen Wärmekapazitäten lässt sich ein ähnlich einfaches Resultat erzielen, wenn man das System in eine Anzahl von Teilen zerlegt denkt, deren Wärmekapazitäten unter sich gleich sind. Die Voraussetzung, dass die Wärmekapazitäten nicht von der Temperatur abhängen sollen, wird dabei aufrecht erhalten. Ist n die Anzahl der so unterschiedenen Teile des Systems und heissen die Anfangstemperaturen derselben $T_1, T_2, \ldots, T_n$, so ergiebt sich wegen $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \cdots = \Gamma_n = \Gamma/n$:

$$T_0 = (T_1 T_2 \ldots T_n)^{1/n} = \boldsymbol{G}(T) \tag{34}$$

und

$$A = \frac{\Gamma}{n}(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - \Gamma T_0 = \Gamma(\boldsymbol{A}(T) - \boldsymbol{G}(T)). \tag{35}$$

Hier bedeutet $G(T)$ das geometrische, $A(T)$ das arithmetische Mittel der Anfangstemperaturen $T_1, \ldots, T_n$. *Die nutzbare Energie eines nach aussen hin isolierten Systems erweist sich so gleich dem Produkt aus der Wärmekapazität des Systems in die Differenz aus dem arithmetischen und geometrischen Mittel der Anfangstemperaturen.*

II. Allgemeine Begriffe und Methoden der Thermodynamik.

16. Thermodynamische Potentiale. Der erste und zweite Hauptsatz kann in die Aussagen[43]) zusammengefasst werden, dass

$$dU = dQ - dW \tag{36}$$

und

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{37}$$

die vollständigen Differentiale zweier Funktionen sind, deren Werte durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmt werden; diese beiden Funktionen heissen *Energie* und *Entropie* des Systems.

Wir gehen jetzt dazu über, diese Gleichungen auf die Frage nach dem Gleichgewicht eines thermisch-homogenen idealen thermodynamischen Systems von n mechanischen Freiheitsgraden anzuwenden. Der Zustand eines solchen Systems ist durch n allgemeine Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und durch *eine* absolute Temperatur T völlig festgelegt. Nennt man $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die allgemeinen Komponenten der Kraft nach den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so wird die bei irgend einer „Verrückung" oder Zustandsänderung $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ des Systems geleistete äussere Arbeit gleich

$$dW = X_1 dx_1 + X_2 dX_2 + \cdots + X_n dx_n.$$

Aus der vorangestellten analytischen Formulierung des ersten und zweiten Hauptsatzes schliessen wir, dass

$$dU = TdS - X_1 dx_1 - X_2 dx_2 - \cdots - X_n dx_n. \tag{38}$$

Nun hingen Energie und Entropie nur von dem augenblicklichen Zustand des Systems ab; sie sind also bekannt, wenn $T, x_1, \ldots, x_n$ gegeben sind. Andrerseits kann der Zustand des Systems auch durch $S, x_1, \ldots, x_n$ festgelegt werden; dann müssen sich Energie und Tem-

43) Die zweite dieser Aussagen ist mit der Behauptung gleichwertig, dass T ein „integrierender Nenner" des Differentials dQ ist. Vgl. *Zeuner,* Grundzüge der mechan. Wärmeth., 2. Aufl., p. 74, wo die fragliche Eigenschaft für den reziproken Wert der *Carnot*'schen Funktion μ ausgesprochen wird, der mit T identisch ist.