

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0088

LOG Titel: 21. Thermo-Elastizität

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Entsprechendes liesse sich für andere thermodynamische Koeffizienten durchführen; doch möge die vorstehende Liste genügen.

21. Thermo-Elastizität. Als Beispiel eines Systems, dessen Zustand im Gegensatz zu dem der Flüssigkeiten von mehr als einer mechanischen Koordinate abhängt, möge die *Thermodynamik des elastischen festen Körpers*⁶¹⁾ in allgemeinen Umrissen skizziert werden; nähere Ausführungen hierzu bringt der folgende Artikel.

In der Elastizitätstheorie wird die Formänderung eines Körpers durch sechs Komponenten beschrieben, welche $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ heissen mögen und welche mit den Verrückungen ξ, η, ζ des Punktes x, y, z durch Gleichungen von der Form

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \dots, \quad \gamma_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \dots$$

zusammenhängen. Andererseits wird der Spannungszustand durch die Angabe der sechs Komponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ beschrieben, welche so gewählt sind, dass bei einer hinzukommenden Formänderung ($d\varepsilon, d\gamma$) die am Körper geleistete Arbeit, pro Volumeinheit des nicht deformierten Körpers berechnet, beträgt:

$$\sigma_x d\varepsilon_x + \dots + \tau_x d\gamma_x + \dots$$

Bedeutet ϱ die Dichte im ursprünglichen, nicht-deformierten Zustande, so folgt aus den thermodynamischen Grundgesetzen als zugehörige Änderung du der inneren Energie pro Masseneinheit:

$$(103) \quad du = Tds + \frac{1}{\varrho} (\sigma_x d\varepsilon_x + \dots + \tau_x d\gamma_x + \dots).$$

Führt man daneben das thermodynamische Potential \mathfrak{F}_e bei gegebener Formänderung ein, nämlich

$$\text{so wird} \quad \mathfrak{F}_e = u - Ts,$$

$$(104) \quad d\mathfrak{F}_e = -sdT + \frac{1}{\varrho} (\sigma_x d\varepsilon_x + \dots + \tau_x d\gamma_x + \dots).$$

Hiernach bedeuten die Produkte ϱu und $\varrho \mathfrak{F}_e$ die in üblicher Weise definierten, auf die ursprüngliche Volumeinheit bezogenen elastischen Potentiale, ausgedrückt als Funktionen der Formänderungen einerseits, der Entropie oder der Temperatur andererseits.

Die Integrabilitätsbedingungen liefern Beziehungen⁶²⁾ von der Form:

$$(105) \quad \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial s} \right)_{\varepsilon, \gamma} = \left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_x} \right)_{s, \varepsilon', \gamma}, \quad \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial T} \right)_{\varepsilon, \gamma} = - \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_x} \right)_{T, \varepsilon', \gamma} \text{ etc.,}$$

61) Lord Kelvin, Quart. Math. Journ. 1 (1857), p. 57.

62) Erläuterungen hierzu giebt P. G. Tait, Sketch of thermodynamics. Edinburgh 1868, p. 114.

wo die den Differentialquotienten beigefügten Indices wieder die beim Differenzieren festgehaltenen Variablen angeben und ε' im vorliegenden Falle die beiden Größen ε_y und ε_z vertritt. Die Grösse ϱ wird bei der Differentiation als konstant angesehen, da sie die ursprüngliche Dichte bedeutet.

Wenn die Spannungskomponenten σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z bei den zu betrachtenden Zustandsänderungen gegeben sind, werden die alsdann zu benutzenden Potentiale erhalten, indem man von u und \mathfrak{F} den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)$$

subtrahiert; die so erhaltenen Potentiale, welche den Bildungen \mathfrak{F}_{sx} bez. \mathfrak{F}_{tx} in der allgemeinen Theorie der Nr. 16 entsprechen, sind als Funktionen der Spannungen einerseits, der Entropie oder Temperatur andererseits aufzufassen. Dieselben mögen der Kürze halber \mathfrak{F}_s und \mathfrak{F}_T heissen. \mathfrak{F}_s ist wieder bei adiabatischem Spannungsverlauf (z. B. schnelle Schwingungen), \mathfrak{F}_T bei isothermischem (z. B. stationäre Beanspruchung) zu benutzen. Handelt es sich im besonderen um eine stationäre einfache Zugbeanspruchung parallel zur x -Axe bei konstanter Temperatur, so gilt

$$\varepsilon_x = - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_T}{\partial \sigma_x} \right)_T$$

und es bedeutet σ_x/ε_x den gewöhnlichen Elasticitätsmodul.

Weiter führt der Umstand, dass $d\mathfrak{F}_s$ und $d\mathfrak{F}_T$ vollständige Differentiale sind, zu den Folgerungen:

$$(106) \quad \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial s} \right)_{\sigma_x} = - \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma_x} \right)_s, \quad \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial T} \right)_{\sigma_x} = + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma_x} \right)_T.$$

Diese Gleichungen können ebenso wie die *Maxwell*'schen Relationen in Nr. 19 gedeutet und an Hand des Experimentes⁶³⁾ geprüft werden. Z. B. besagt die vorletzte Gleichung, dass eine plötzliche (d. h. adiabatische) Zunahme der Spannung die Temperatur eines Drahtes erhöhen oder erniedrigen wird, je nachdem eine Wärmezufuhr bei konstanter Spannung Verkürzung oder Verlängerung des Drahtes bewirkt. Erstes ist der Fall bei Kautschuk. Wir verweisen wegen näherer Ausführungen auf den folgenden Art.

63) *J. P. Joule*, Lond. Trans. 149 (1859), p. 91; *Scientific papers* 1, p. 143; *Edlund*, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 1; 126 (1865), p. 539.