Entsprechendes liesse sich für andere thermodynamische Koefficienten durchführen; doch möge die vorstehende Liste genügen.

21. Thermo-Elastizität. Als Beispiel eines Systems, dessen Zustand im Gegensatz zu dem der Flüssigkeiten von mehr als einer mechanischen Koordinate abhängt, möge die *Thermodynamik des elastischen festen Körpers*[61]) in allgemeinen Umrissen skizziert werden; nähere Ausführungen hierzu bringt der folgende Artikel.

In der Elastizitätstheorie wird die Formänderung eines Körpers durch sechs Komponenten beschrieben, welche ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z heissen mögen und welche mit den Verrückungen ξ, η, ζ des Punktes x, y, z durch Gleichungen von der Form

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \cdots, \quad \gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \cdots$$

zusammenhängen. Andererseits wird der Spannungszustand durch die Angabe der sechs Komponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z beschrieben, welche so gewählt sind, dass bei einer hinzukommenden Formänderung ($d\varepsilon$, $d\gamma$) die am Körper geleistete Arbeit, pro Volumeinheit des nicht deformierten Körpers berechnet, beträgt:

$$\sigma_x d\varepsilon_x + \cdots + \tau_x d\gamma_x + \cdots$$

Bedeutet ϱ die Dichte im ursprünglichen, nicht-deformierten Zustande, so folgt aus den thermodynamischen Grundgesetzen als zugehörige Anderung du der inneren Energie pro Masseneinheit:

$$du = T ds + \frac{1}{\varrho}(\sigma_x d\varepsilon_x + \cdots + \tau_x d\gamma_x + \cdots). \tag{103}$$

Führt man daneben das thermodynamische Potential $\mathfrak{F}_\varepsilon$ bei gegebener Formänderung ein, nämlich

$$\mathfrak{F}_\varepsilon = u - Ts,$$

so wird

$$d\mathfrak{F}_\varepsilon = - s dT + \frac{1}{\varrho}(\sigma_x d\varepsilon_x + \cdots + \tau_x d\gamma_x + \cdots). \tag{104}$$

Hiernach bedeuten die Produkte ϱu und $\varrho \mathfrak{F}_\varepsilon$ die in üblicher Weise definierten, auf die ursprüngliche Volumeinheit bezogenen elastischen Potentiale, ausgedrückt als Funktionen der Formänderungen einerseits, der Entropie oder der Temperatur andererseits.

Die Integrabilitätsbedingungen liefern Beziehungen[62]) von der Form:

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial s}\right)_{\varepsilon, \gamma} = \left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_x}\right)_{s, \varepsilon', \gamma}, \quad \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial T}\right)_{\varepsilon, \gamma} = -\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_x}\right)_{T, \varepsilon', \gamma} \text{etc.,} \tag{105}$$

---

61) Lord *Kelvin*, Quart. Math. Journ. 1 (1857), p. 57.

62) Erläuterungen hierzu giebt *P. G. Tait*, Sketch of thermodynamics. Edinburgh 1868, p. 114.

wo die den Differentialquotienten beigefügten Indices wieder die beim Differenzieren festgehaltenen Variabeln angeben und ε' im vorliegenden Falle die beiden Grössen ε_y und ε_z vertritt. Die Grösse ϱ wird bei der Differentiation als konstant angesehen, da sie die ursprüngliche Dichte bedeutet.

Wenn die Spannungskomponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z bei den zu betrachtenden Zustandsänderungen gegeben sind, werden die alsdann zu benutzenden Potentiale erhalten, indem man von u und $\mathfrak{F}_\varepsilon$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)$$

subtrahiert; die so erhaltenen Potentiale, welche den Bildungen $\mathfrak{F}_{SX}$ bez. $\mathfrak{F}_{TX}$ in der allgemeinen Theorie der Nr. **16** entsprechen, sind als Funktionen der Spannungen einerseits, der Entropie oder Temperatur andererseits aufzufassen. Dieselben mögen der Kürze halber $\mathfrak{F}_s$ und $\mathfrak{F}_T$ heissen. $\mathfrak{F}_s$ ist wieder bei adiabatischem Spannungsverlauf (z. B. schnelle Schwingungen), $\mathfrak{F}_T$ bei isothermischem (z. B. stationäre Beanspruchung) zu benutzen. Handelt es sich im besonderen um eine stationäre einfache Zugbeanspruchung parallel zur x-Axe bei konstanter Temperatur, so gilt

$$\varepsilon_x = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_T}{\partial \sigma_x}\right)_T$$

und es bedeutet σ_x/ε_x den gewöhnlichen Elasticitätsmodul.

Weiter führt der Umstand, dass $d\mathfrak{F}_s$ und $d\mathfrak{F}_T$ vollständige Differentiale sind, zu den Folgerungen:

$$(106) \qquad \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial s}\right)_{\sigma_x} = -\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}\right)_s, \quad \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial T}\right)_{\sigma_x} = +\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma_x}\right)_T.$$

Diese Gleichungen können ebenso wie die *Maxwell*'schen Relationen in Nr. **19** gedeutet und an Hand des Experimentes[63]) geprüft werden. Z. B. besagt die vorletzte Gleichung, dass eine plötzliche (d. h. adiabatische) Zunahme der Spannung die Temperatur eines Drahtes erhöhen oder erniedrigen wird, je nachdem eine Wärmezufuhr bei konstanter Spannung Verkürzung oder Verlängerung des Drahtes bewirkt. Ersteres ist der Fall bei Kautschuk. Wir verweisen wegen näherer Ausführungen auf den folgenden Art.

---

63) *J. P. Joule,* Lond. Trans. 149 (1859), p. 91; Scientific papers 1, p. 143; *Edlund,* Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 1; 126 (1865), p. 539.