

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0098

LOG Titel: 29. Stationäre oder quasi-periodische Bewegungen

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

implicite neu abgeleitet zu haben. Die Darstellung in den früheren Arbeiten von *Clausius* war äusserst mühsam und undurchsichtig; es bedurfte einer langen Reihe von Schriften zum Teil polemischen Inhalts, die während der Jahre 1871—76 von *Clausius* und *Szily* publiziert wurden, bis der Gegenstand einigermassen klargestellt war.

Die einschlägigen Untersuchungen zerfallen in zwei Klassen, nämlich in solche, welche hinsichtlich der Molekularbewegungen ein bestimmtes Verteilungsgesetz, z. B. das *Boltzmann-Maxwell'sche* Gesetz der kinetischen Gastheorie zu Grunde legen, und in solche, welche von einem derartigen Gesetz unabhängig sind, dafür aber andere Annahmen einführen. Die Untersuchungen der ersten Klasse beziehen sich spezieller auf Gase und werden in dem Art. V 9 besprochen werden; wir werden uns hier auf die Arbeiten der zweiten Klasse beschränken.

Die Unterscheidung zwischen Wärme- und Arbeits-Energie bringt die Einführung von zwei verschiedenen Sorten von Koordinaten mit sich, nämlich der *kontrollierbaren Koordinaten*, deren Abänderung sichtbare Änderungen im System hervorbringt, und der *unkontrollierbaren Koordinaten*, welche die Stellung des einzelnen Moleküls definieren. Die letzteren Koordinaten befinden sich in fortgesetzter Veränderung, aber die einzigen wahrnehmbaren Veränderungen finden statt, wenn dem Körper als Ganzem Energie durch diese Koordinaten mitgeteilt wird, eine Energie, die wir Wärme nennen und mit dQ bezeichnen. Die Energie, die dem Körper durch Abänderung der kontrollierbaren Koordinaten mitgeteilt wird, ist in unserer Bezeichnung $-dW$.

29. Stationäre oder quasi-periodische Bewegungen¹⁰³). Das zu betrachtende System bestehe aus den Molekülen m_1, m_2, \dots , die sich in den Punkten $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots$ befinden. Die kontrollierbaren Koordinaten seien p_1, p_2, \dots . L sei die lebendige Kraft speziell der Molekularbewegung und V die gesamte potentielle Energie für beide Arten von Koordinaten, so dass

$$(166) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{1}{2} \sum m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \\ \delta V = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right) + \sum \frac{\partial V}{\partial p} \delta p. \end{array} \right.$$

Man beweist leicht, dass¹⁰⁴)

103) *R. Clausius*, „Abhandl.“ 2, p. 299 ff.; *Ann. Phys. Chem.* 142 (1871), p. 433; *Suppl.* 7 (1876), p. 215; 146 (1872), p. 585 und *Phil. Mag.* (4) 44 (1872), p. 365; (4) 46 (1873), p. 236 etc.

104) Vgl. z. B. *Thomson* und *Tait*, *Natural Philosophy*, 2. Aufl., Cambridge 1883 1 § 327.

$$(167) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} 2L dt &= \left[\sum m (\dot{x} \delta x + \dot{y} \delta y + \dot{z} \delta z) \right]_{t_1}^{t_2} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta L - \sum m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) \right\} dt. \end{aligned} \right.$$

Nach dem *D'Alembert'schen* Prinzip ist aber

$$\sum m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right) = 0;$$

da nun V sowohl von den kontrollierbaren wie von den molekularen Koordinaten abhängt, kann man mit Rücksicht auf (166) statt (167) schreiben:

$$(167') \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} 2L dt &= \left[\sum m (\dot{x} \delta x + \dot{y} \delta y + \dot{z} \delta z) \right]_{t_1}^{t_2} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta V - \sum \frac{\partial V}{\partial p} \delta p) dt. \end{aligned} \right.$$

In der Thermodynamik vernachlässigt man allgemein die kinetische Energie der sichtbaren Bewegung eines Körpers, d. h. die kinetische Energie, die der Änderung der kontrollierbaren Koordinaten entspricht. Schliessen wir uns dem an, so wird

$$\sum \frac{\partial V}{\partial p} \delta p = -\delta W,$$

wo δW die gesamte äussere Arbeit bedeutet, die bei einer Veränderung der kontrollierbaren Koordinaten geleistet wird. Nach dem ersten Hauptsatz gilt aber

$$\delta Q = \delta U + \delta W = \delta L + \delta V + \delta W.$$

Mithin ergibt sich aus (167')

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2L dt = \left[\sum m (\dot{x} \delta x + \dot{y} \delta y + \dot{z} \delta z) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta Q dt.$$

Setzt man noch das Zeitintervall $t_2 - t_1$ gleich ni , unter n eine ganze Zahl verstanden, und deutet man die Bildung von Mittelwerten durch einen über dem fraglichen Buchstaben angebrachten Strich an, so folgt

$$(168) \quad \begin{aligned} \delta (2ni\bar{L}) &= \left[\sum m (\dot{x} \delta x + \dot{y} \delta y + \dot{z} \delta z) \right]_{t_1}^{t_2} + ni \delta \bar{Q} \\ \text{oder} \\ \frac{\delta \bar{Q}}{\bar{L}} &= \delta \log (i\bar{L})^2 - \frac{[\sum m (\dot{x} \delta x + \dot{y} \delta y + \dot{z} \delta z)]_{t_1}^{t_2}}{ni\bar{L}}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun als Definition einer quasiperiodischen Molekularbewegung festsetzen: *i* soll so gewählt werden können, dass

$$(169) \quad \frac{[\sum m (\dot{x} \delta x + \dot{y} \delta y + \dot{z} \delta z)]_1^2}{ni\bar{L}}$$

entweder gleich Null wird oder unbegrenzt abnimmt, wenn man *n* unbegrenzt wachsen lässt; *i* definieren wir in diesem Falle als Quasi-Periode des Systems. Trifft unsere Bedingung zu, so gilt einfach

$$(170) \quad \frac{\delta \bar{Q}}{L} = \delta \log (i\bar{L})^2.$$

Folgen die Quasi-Perioden rasch aufeinander, während die Änderungen der kontrollierbaren Koordinaten und der Wärmefluss hinreichend langsam vor sich gehen, so kann man δQ an Stelle von $\delta \bar{Q}$ schreiben. Die vorige Gleichung sagt nun aus, dass \bar{L} ein integrierender Nenner von δQ ist und ist mithin dem thermodynamischen Satze analog, dass T ein integrierender Nenner von δQ ist. Manche physikalische Überlegungen lassen es glaubhaft erscheinen, dass die absolute Temperatur eines und desselben Körpers dauernd der kinetischen Energie seiner Moleküle proportional sei; wenn dies allgemein richtig wäre, so würde Gl. (170) sich mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik decken.

Man beachte, dass die Endgleichung (170) unabhängig von *n* ist und daher durch Vergrößerung von *n* nicht geändert wird, dass man ferner statt *i* irgend ein Vielfaches von *i* setzen kann, ohne den Wert von $\delta \log (i\bar{L})^2$ zu beeinflussen, so dass eine genaue Kenntnis von *i* nicht erforderlich ist. Unzweifelhaft liegt in der Definition von *i* eine begriffliche Schwierigkeit¹⁰⁵). Im Falle der monocyclischen Systeme (s. u.) oder rein periodischer Bewegungen ist die Bedeutung von *i* leicht zu verstehen; nicht so in allgemeineren Fällen.

Die Annahme der Quasi-Periodizität in der obigen Form lässt sich allgemein rechtfertigen, wenn man es mit einem System zu thun hat, welches nach der Ausdrucksweise von Boltzmann „molekular ungeordnet“ ist. Bei der stationären Bewegung eines solchen Systems sind entgegengesetzte Geschwindigkeitsrichtungen gleich wahrscheinlich; überdies führt der Umstand, dass die Bewegungen der einzelnen Moleküle unkontrollierbar sind, zu dem Schlusse, dass bei allen in Wirklichkeit vorkommenden Lagenänderungen die Verschiebungen

105) Am deutlichsten spricht sich Clausius hierüber in der Arbeit: Über einen neuen mechanischen Satz, Bonn. Ber. (1873), p. 137; Ann. Phys. Chem. 150 (1873), p. 106; Phil. Mag. (4) 46 (1873), p. 236, aus.

δx , δy , δz unabhängig sind von den Geschwindigkeitskomponenten \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} ¹⁰⁶). Alsdann ist $\sum m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)$ eine Grösse, die mit der Zeit fluktuiert und im Mittel Null ist; die Fluktuationen, die den Bewegungsänderungen der einzelnen Moleküle entsprechen, werden klein sein und werden in der Zeit nicht systematisch anwachsen. Nimmt man also die Zeit n_i hinreichend gross im Verhältnis zu derjenigen Zeit i , in der sich diese Fluktuationen abspielen, so kann man in der That behaupten, dass der Ausdruck (169) beliebig klein gemacht werden kann. Man bemerke noch, dass der Begriff der Unkontrollierbarkeit die Annahme einschliesst, dass die Molekularbewegungen sehr rasche sind und dass die Zeitintervalle, die wir bei den Zustandsänderungen des Körpers als Ganzes zu betrachten haben, gross sind gegenüber der Zeit der Fluktuation der Molekularbewegungen.

30. Monocyklische Systeme. Ganz ähnliche Folgerungen hat *Helmholtz*¹⁰²) aus der Betrachtung der monocyklischen Systeme abgeleitet.

Ein System heisst monocyklisch oder polycyklisch, wenn es eine oder mehrere in sich zurücklaufende Bewegungen enthält, entsprechend einer oder mehreren „cyklischen“ Koordinaten. Die besonderen Eigenschaften, die einer cyklischen Koordinate zukommen, sind folgende:

1) Die kinetische und potentielle Energie hängt nicht von den cyklischen Koordinaten q_b selbst ab; in die kinetische Energie gehen nur die Geschwindigkeitskoordinaten \dot{q}_b ein.

2) Bei Zustandsänderungen des Systems sind die Geschwindigkeiten der nichtcyklischen kontrollierbaren Koordinaten (q_a), sowie die Beschleunigungen der cyklischen und nichtcyklischen Koordinaten klein.

Bedeutet H die *Lagrange'sche* Funktion $H = L - V$, so geben die allgemeinen *Lagrange'schen* Gleichungen:

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial H}{\partial q}$$

für die allgemeinen Kraftkoordinaten P_b auf Grund der Festsetzungen 1) und 2):

$$(171) \quad P_b = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_b} \right) = \frac{dp_b}{dt},$$

wobei p_b die zu q_b gehörige allgemeine Impulskoordinate ist.

106) Hätte man es andererseits in der Hand die Bewegungen der einzelnen Moleküle in dem Sinne zu beeinflussen, dass ihre Verschiebungen in Beziehung treten zu ihren Geschwindigkeiten, so würde ersichtlich die gesamte Energie der Molekularbewegung in mechanische Energie verwandelt werden können und der zweite Hauptsatz würde hinfällig werden.