## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
**Jahr:** 1903
**Kollektion:** Mathematica
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN360709532
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

**LOG Id:** LOG_0099
**LOG Titel:** 30. Monozyklische Systeme
**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

## Terms and Conditions



## Contact

$\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ unabhängig sind von den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$[106]). Alsdann ist $\sum m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)$ eine Grösse, die mit der Zeit fluktuiert und im Mittel Null ist; die Fluktuationen, die den Bewegungsänderungen der einzelnen Moleküle entsprechen, werden klein sein und werden in der Zeit nicht systematisch anwachsen. Nimmt man also die Zeit $ni$ hinreichend gross im Verhältnis zu derjenigen Zeit $i$, in der sich diese Fluktuationen abspielen, so kann man in der That behaupten, dass der Ausdruck (169) beliebig klein gemacht werden kann. Man bemerke noch, dass der Begriff der Unkontrollierbarkeit die Annahme einschliesst, dass die Molekularbewegungen sehr rasche sind und dass die Zeitintervalle, die wir bei den Zustandsänderungen des Körpers als Ganzes zu betrachten haben, gross sind gegenüber der Zeit der Fluktuation der Molekularbewegungen.

**30. Monocyklische Systeme.** Ganz ähnliche Folgerungen hat *Helmholtz*[102]) aus der Betrachtung der monocyklischen Systeme abgeleitet.

Ein System heisst monocyklisch oder polycyklisch, wenn es eine oder mehrere in sich zurücklaufende Bewegungen enthält, entsprechend einer oder mehreren „cyklischen" Koordinaten. Die besonderen Eigenschaften, die einer cyklischen Koordinate zukommen, sind folgende:

1) Die kinetische und potentielle Energie hängt nicht von den cyklischen Koordinaten $q_b$ selbst ab; in die kinetische Energie gehen nur die Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{q}_b$ ein.

2) Bei Zustandsänderungen des Systems sind die Geschwindigkeiten der nichtcyklischen kontrollierbaren Koordinaten $(q_a)$, sowie die Beschleunigungen der cyklischen und nichtcyklischen Koordinaten klein.

Bedeutet $H$ die *Lagrange*'sche Funktion $H = L - V$, so geben die allgemeinen *Lagrange*'schen Gleichungen:

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial H}{\partial q}$$

für die allgemeinen Kraftkoordinaten $P_b$ auf Grund der Festsetzungen 1) und 2):

$$P_b = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_b}\right) = \frac{dp_b}{dt}, \tag{171}$$

wo $p_b$ die zu $q_b$ gehörige allgemeine Impulskoordinate ist.

---

106) Hätte man es andererseits in der Hand die Bewegungen der einzelnen Moleküle in dem Sinne zu beeinflussen, dass ihre Verschiebungen in Beziehung treten zu ihren Geschwindigkeiten, so würde ersichtlich die gesamte Energie der Molekularbewegung in mechanische Energie verwandelt werden können und der zweite Hauptsatz würde hinfällig werden.

Infolgedessen wird die an den Koordinaten $q_b$ geleistete Arbeit

$$dQ = \Sigma P_b \dot{q}_b dt = \Sigma \dot{q}_b \frac{dp_b}{dt} dt = \Sigma \dot{q}_b dp_b \tag{172}$$

und der cyklische Teil der kinetischen Energie lautet als homogene Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten:

$$2L_b = \Sigma \dot{q}_b p_b.$$

Für ein monocyklisches System gilt insbesondere:

$$dQ = \dot{q}_b dp_b, \quad 2L_b = \dot{q}_b p_b,$$

woraus man schliesst

$$\frac{dQ}{\dot{q}_b} = dp_b \quad \text{sowie} \quad \frac{dQ}{L_b} = 2d(\log p_b). \tag{173}$$

Es sind also sowohl $\dot{q}_b$ wie $L_b$ integrierende Nenner von $dQ$. Dies entspricht der bekannten Thatsache, dass ein Differentialausdruck stets unendlich viele integrierende Faktoren zulässt, wenn er einen solchen Faktor besitzt. So ist auch in der Thermodynamik die Temperatur nicht der einzige integrierende Nenner von $dQ$. *Helmholtz* betont daher, dass der zweite Hauptsatz nicht durch die Angabe erschöpft wird, dass $dQ$ überhaupt einen integrierenden Nenner besitzt; vielmehr ist in die Aussage des zweiten Hauptsatzes aufzunehmen, dass der integrierende Nenner die Eigenschaft der Temperatur besitze, die in dem Satze enthalten ist, dass „Wärme von dem wärmeren nach dem kälteren Körper überzugehen strebt".

In dem allgemeinen Fall eines polycyklischen Systems wird $dQ$ im allgemeinen keinen integrierenden Nenner besitzen, es sei denn, dass besondere Bedingungen erfüllt sind. Eine solche Bedingung wäre die folgende: Man nehme hinsichtlich der Zustandsänderungen des Systems an, dass die cyklischen Geschwindigkeitskoordinaten beständig ihren Anfangswerten proportional sind. Bezeichnet man den Proportionalitätsfaktor mit $n$ und deutet Anfangswerte durch den Index $^0$ an, so wird

$$\dot{q}_b = n\dot{q}_b^0, \quad p_b = np_b^0, \quad L = n^2 L^0,$$

wobei jetzt $n$ die einzige Variable ist, und

$$dQ = \Sigma n\dot{q}_b^0 d(np_b^0) = ndn\Sigma \dot{q}_b^0 p_b^0 = 2ndnL^0,$$

mithin

$$\frac{dQ}{L} = 2d\log n. \tag{174}$$

Diese Gleichung steht wieder in Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatz und den Überlegungen von *Clausius* und *Szily*.

Eine andere Ableitung desselben Resultats giebt *J. J. Thomson*[107]). Bei dieser scheinen die notwendigen Voraussetzungen die folgenden zu sein:

1) Die kinetische Energie enthält keine Produkte $\dot{q}_a \dot{q}_b$ von kontrollierbaren in unkontrollierbare Geschwindigkeitskoordinaten, sie ist vielmehr von der Form
$$L = L_a + L_b.$$

2) Wenn die kinetische Energie der Molekularbewegung $L_b$ eine der kontrollierbaren Koordinaten $q_a$ enthalten sollte, so muss dieses in einem dem ganzen Ausdruck $L_b$ gemeinsamen Faktor geschehen, oder mit anderen Worten, $L_b$ muss die Form haben $f(q_a) \cdot \varphi(\dot{q}_b)$. Träfe dieses nämlich nicht zu, so würden die wahrnehmbaren Erscheinungen von einzelnen Molekülgruppen mehr wie von anderen beeinflusst werden.

**31. Mechanische und statistische Bilder.** Eine Anzahl von Beispielen für monocyklische Systeme sind von *Boltzmann*[108]) u. a. angegeben. Ein *Watt*'scher Regulator an der Dampfmaschine ist ein einfaches Beispiel dieser Art, aber eine noch einfachere Verwirklichung eines monocyklischen Systems liefert eine Welle mit einem radial von ihr auslaufenden Arm, beide massenlos gedacht. Auf diesem Arm kann ein Knopf von der Masse $m$ entlanggleiten und die Lage des Knopfes lässt sich durch einen in geeigneter Weise über eine Rolle geführten Faden regulieren oder „kontrollieren" (vgl. den mittleren Teil der Fig. 6). Den Abstand $r$ des Knopfes von der Wellenmittellinie hat man als die kontrollierbare Koordinate anzusehen, der Umdrehungswinkel $\theta$ der Welle bildet die cyklische Koordinate. Man zeigt leicht, dass für langsame Bewegungen des Knopfes, bei denen die kinetische Energie der radialen Bewegung vernachlässigt werden kann:
$$\frac{dQ}{L} = 2d \log (r^2\dot{\theta}),$$
wo $dQ$ die an der Koordinate $\theta$ geleistete Arbeit bezeichnet. Bedeutet $p$ den zu $\theta$ gehörigen Drehimpuls, $i$ die Dauer einer vollen Umdrehung, so ist die rechte Seite gleich $d \log (p^2)$; dafür kann man auch, da $r^2\dot{\theta} = 2L/m\dot{\theta} = Li/m\pi$ ist, schreiben $d \log (iL)^2$. Die erstere Schreibweise entspricht den Entwickelungen von Nr. **30**, die letztere denen von Nr. **29**.

---

107) *J. J. Thomson*, Applications of Dynamics chap. VI, p. 94 der engl. Ausgabe.

108) *L. Boltzmann*, J. f. Math. 98 (1885), p. 85; Vorlesungen über *Maxwell*'s Theorie, 1, Leipzig 1891, p. 8—23.