SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0100
LOG Titel: 31. Mechanische und statistische Bilder
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Eine andere Ableitung desselben Resultats giebt *J. J. Thomson*[107]). Bei dieser scheinen die notwendigen Voraussetzungen die folgenden zu sein:

1) Die kinetische Energie enthält keine Produkte $\dot{q}_a \dot{q}_b$ von kontrollierbaren in unkontrollierbare Geschwindigkeitskoordinaten, sie ist vielmehr von der Form

$$L = L_a + L_b .$$

2) Wenn die kinetische Energie der Molekularbewegung L_b eine der kontrollierbaren Koordinaten q_a enthalten sollte, so muss dieses in einem dem ganzen Ausdruck L_b gemeinsamen Faktor geschehen, oder mit anderen Worten, L_b muss die Form haben $f(q_a) \cdot \varphi(\dot{q}_b)$. Träfe dieses nämlich nicht zu, so würden die wahrnehmbaren Erscheinungen von einzelnen Molekülgruppen mehr wie von anderen beeinflusst werden.

31. Mechanische und statistische Bilder. Eine Anzahl von Beispielen für monocyklische Systeme sind von *Boltzmann*[108]) u. a. angegeben. Ein *Watt*'scher Regulator an der Dampfmaschine ist ein einfaches Beispiel dieser Art, aber eine noch einfachere Verwirklichung eines monocyklischen Systems liefert eine Welle mit einem radial von ihr auslaufenden Arm, beide massenlos gedacht. Auf diesem Arm kann ein Knopf von der Masse m entlanggleiten und die Lage des Knopfes lässt sich durch einen in geeigneter Weise über eine Rolle geführten Faden regulieren oder „kontrollieren" (vgl. den mittleren Teil der Fig. 6). Den Abstand r des Knopfes von der Wellenmittellinie hat man als die kontrollierbare Koordinate anzusehen, der Umdrehungswinkel θ der Welle bildet die cyklische Koordinate. Man zeigt leicht, dass für langsame Bewegungen des Knopfes, bei denen die kinetische Energie der radialen Bewegung vernachlässigt werden kann:

$$\frac{dQ}{L} = 2d \log (r^2 \dot{\theta}),$$

wo dQ die an der Koordinate θ geleistete Arbeit bezeichnet. Bedeutet p den zu θ gehörigen Drehimpuls, i die Dauer einer vollen Umdrehung, so ist die rechte Seite gleich $d \log (p^2)$; dafür kann man auch, da $r^2 \dot{\theta} = 2L/m\dot{\theta} = Li/m\pi$ ist, schreiben $d \log (iL)^2$. Die erstere Schreibweise entspricht den Entwickelungen von Nr. **30**, die letztere denen von Nr. **29**.

---

107) *J. J. Thomson*, Applications of Dynamics chap. VI, p. 94 der engl. Ausgabe.

108) *L. Boltzmann*, J. f. Math. 98 (1885), p. 85; Vorlesungen über *Maxwell*'s Theorie, 1, Leipzig 1891, p. 8—23.

Eine Abänderung[109]) dieses Mechanismus entsteht, wenn man die Welle mit zwei Scheiben C und D versieht, welche nacheinander in Berührung mit zwei Scheiben A und B gebracht werden können (vgl. Fig. 6). Die Scheiben A und B mögen sich mit den unveränderlichen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 umdrehen und übertragen, wenn sie nach einander mit den Scheiben C oder D in Berührung sind, diese Geschwindigkeiten auf die Welle. Dieses System kann man ein genaues Gegenstück eines *Carnot*'schen Kreisprozesses ausführen lassen, wobei die Scheiben A und B die Rolle von Quelle und Kühler, die Winkelgeschwindigkeit die Rolle der Temperatur, und der zugehörige Drehimpuls die Rolle der Entropie spielt. Den Isothermen des Kreisprozesses, längs denen der Arbeitsstoff in Berührung mit Quelle oder Kühler ist, entsprechen hier diejenigen Vorgänge, bei denen die Welle gleichförmig rotiert und sich bezw. mit ihrer oberen oder unteren Scheibe gegen A oder B gegenlegt, während gleichzeitig der Drehimpuls mit der Stellung des Knopfes sich verändert. Den adiabatischen Linien des Kreisprozesses entspricht die freie Umdrehung der Welle, welche bei konstantem Drehimpuls verläuft, während gleichzeitig die Winkelgeschwindigkeit von ω_1 nach ω_2 abnimmt oder umgekehrt von ω_2 bis ω_1 zunimmt, in dem Maasse wie der Knopf an seiner Führung entlang gleitet. Sind Q_1 und Q_2 die Energiemengen, die das System von der schneller laufenden Scheibe aufnimmt oder die es an die langsamer laufende abgiebt, so lässt sich zeigen, dass $Q_1/\omega_1 = Q_2/\omega_2$, entsprechend der thermodynamischen Gleichung $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$.

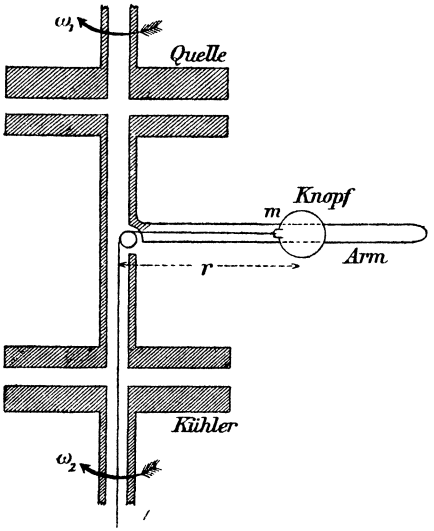

Fig. 6.

Boltzmann[110]) hat ferner gezeigt, dass man von einem einzelnen Teilchen ausgehend, dessen Bewegung monocyklische Eigenschaften nicht zu haben braucht, allemal ein monocyklisches System konstruieren kann, indem man eine grosse Anzahl solcher Teilchen oder Körper hintereinander anordnet.

109) *G. H. Bryan,* Rep. Brit. Assoc. 1891 p. 108.

110) *L. Boltzmann,* J. f. Math. 98, (1885) p. 68.

Z. B. ist ein einzelnes Teilchen, welches eine Ellipse unter einer vom Brennpunkte ausgehenden Kraft a/r^2 beschreibt, für sich nicht monocyklisch; wohl aber bildet ein Strom von solchen Teilchen, dessen Dichtigkeit an jeder Stelle unabhängig von der Zeit ist — also eine Art Saturnsring — ein monocyklisches System. Hier findet *Boltzmann*

$$dQ = Ld \log \frac{a^2}{L};$$

als cyklische Koordinate kann dabei diejenige Massensumme gewählt werden, die durch irgend einen Querschnitt bis zur Zeit t hindurchgeht.

Ein anderes Beispiel liefert ein Strom von Teilchen von der Gesamtmasse m, welche geradlinige Schwingungen unter dem Einfluss eines konservativen Kraftfeldes ausführen. Hierbei wird $dQ = 2Ld \log (iL)$, wo i die Schwingungsdauer. Die allgemeinen Geschwindigkeits- und Impulskoordinaten können dabei wie folgt gewählt werden

$$\dot{q}_b = \frac{m}{i}, \quad p_b = \frac{2iL}{m}.$$

In dem besonderen Fall, wo ein Strom von Teilchen zwischen zwei parallelen elastischen Wänden im Abstand a voneinander, hin und her reflektiert wird, sei v die Geschwindigkeit des Stromes, $\frac{1}{2}m$ die ganze Masse, die sich in der einen oder anderen Richtung bewegt; dann sind die allgemeinen Geschwindigkeits- und Impulskoordinaten sowie die kinetische Energie in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Festsetzungen gegeben durch

$$\dot{q}_b = \frac{mv}{2a}, \quad L = \frac{2a^2\dot{q}_b^{\,2}}{m}, \quad p_b = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = 2av.$$

Dieses System ist strenge monocyklisch. Betrachtet man aber einen Strom von Teilchen, der von den vier Seiten eines rechtwinkligen Kastens unter den Winkeln D und $90^0 - D$ zurückgeworfen wird, so erhält man ein System, welches nicht monocyklisch ist, sofern Änderungen in der Grösse des Winkels D in Betracht gezogen werden.

Boltzmann hat schliesslich gezeigt, dass ein Gas, dessen Molekeln nach dem *Boltzmann-Maxwell*'schen Gesetz verteilt sind, ähnliche Eigenschaften besitzt, wie die monocyklischen Systeme von *Helmholtz*, und dass die mittlere kinetische Energie der Translationsbewegung seiner Teilchen ein integrierender Nenner von dQ wird. Näheres hierüber vgl. Art. V 9.

32. Analogien zum Wärmegleichgewicht. Der Satz, dass die absolute Temperatur ein integrierender Nenner von dQ ist, setzt uns nur in den Stand, *verschiedene Temperaturen an dem gleichen Körper* zu vergleichen. Will man den zweiten Hauptsatz auf dynamischem