γ	spezifische Wärme.
ϱ	Dichte.
$k = \frac{\varkappa}{\varrho \gamma}$	Temperaturleitfähigkeit.
H	äussere Wärmeleitfähigkeit (Konstante des *Newton*'schen Abkühlungsgesetzes).
$h = \frac{H}{\varkappa}$	äussere Temperaturleitfähigkeit.
h'	äussere Temperaturleitfähigkeit eines linearen Leiters (im Teil II mit h bezeichnet; vgl. Nr. **5** und **15**).
$\varkappa_{11}, \varkappa_{12}, \ldots$	Konstanten der Wärmeleitung in einem Krystall.
$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$	die Hauptwärmeleitfähigkeiten.
k_1, k_2, k_3	die Haupttemperaturleitfähigkeiten.
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	die Konstanten des rotatorischen Wärmeflusses.

I. Mathematischer Teil (Rechnungsmethoden).

1. Allgemeines über Dissipation der Energie. Alle physikalischen Prozesse, welche ein System durchmachen kann, sind entweder 1) umkehrbare oder reversible Prozesse, oder 2) nicht umkehrbare oder irreversible Prozesse. Unter 1) versteht man solche Prozesse, die sich vollständig rückgängig machen lassen, derart, dass nicht nur der Endzustand des betreffenden Systems genau gleich ist dem Anfangszustand, sondern dass auch ausserhalb des Systems keine bleibende Änderung eingetreten ist. Unter 2) versteht man solche Vorgänge, welche keine derartige Umkehrung zulassen; bei diesen kann das System nicht in seinen früheren Zustand zurückgebracht werden, ohne dass ausserhalb des Systems eine dauernde Änderung verursacht worden ist. Die Erfahrung lehrt, dass alle Prozesse, welche in der Natur stattfinden, unter 2) fallen, nämlich, dass alle wirklichen Vorgänge nach einer bestimmten Richtung hin verlaufen, und dass die Mittel, welche uns zur Verfügung stehen, nicht hinreichen, irgend ein materielles System so zu leiten, dass es einen streng reversibeln Prozess durchmacht; ein reversibler Prozess ist also ein idealer Begriff, der nur als Grenzfall eines natürlichen Vorgangs zu betrachten ist.

Bei Zugrundelegung der beiden Prinzipien der Erhaltung der Energie und der Erhaltung der Masse, hat eine mechanische Beschreibung der Natur zum Ziel, die verschiedenen Formen, welche die Energie annimmt, zu klassifizieren und die Gesetze, welchen die Umwandlung der Energie von einer Form in eine andere unterworfen sind, zu ergründen. Die Erfahrung lehrt, dass unser thatsächliches Vermögen Energie zu leiten und für unsere Zwecke nutzbar zu machen, ein sehr verschiedenes ist, je nach der Form, in welcher die Energie auftritt;

namentlich über die Energie solcher verborgener Bewegungen, welche in den Molekülen der Materie stattfinden, ist unsere Macht viel geringer als über die Energie der Molarbewegungen. Prozesse, bei welchen die Quantität Energie, worüber wir verfügen können, beständig abnimmt, heissen dissipative Prozesse; die Verwandlung der Energie von einer Form in eine andere weniger nutzbare, oder auch eine Änderung in der Verteilung der Energie unter Beibehaltung ihrer Form, derart, dass ihre Nutzbarkeit abnimmt, heisst Dissipation der Energie[1]). Die Dissipation wird durch die quantitative Abnahme der nutzbaren Energie gemessen; bei jedem natürlichen Vorgang findet, wenn man die ganze Erscheinung in Betracht zieht, Dissipation in grösserem oder kleinerem Mass statt; eben deswegen kommt kein vollkommen reversibler Prozess in der Natur vor.

Der Begriff der Dissipation ist ein rein relativer; er bezieht sich nämlich auf unsere thatsächliche Macht über die Dinge[2]). Dissipirte Energie ist solche, die wir nicht beherrschen; nutzbare Energie ist hingegen solche, die wir in irgend eine erwünschte Bahn leiten können. In der mechanischen Wärmetheorie, aus welcher der Begriff der Dissipation entstanden ist, tritt das Prinzip der Dissipation im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik auf, und nimmt in der Lehre von der Entropie (vgl. den vorangehenden Art. *Bryan*, Nr. **11—13**) eine bestimmte Form an.

Einer der wichtigsten dissipativen Prozesse ist die Wärmeleitung,

---

1) Die Erfahrungsthatsache der Dissipation hat Lord *Kelvin* (*W. Thomson*) in den folgenden Sätzen formuliert — siehe den Aufsatz „On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Energy", Edinb. Proc. 3 (1852), p. 139 und Phil. Mag. 4 (1852), p. 258, 304, auch „Mathematical and Physical papers" 1, p. 511.

(1) There is at present in the material world a universal tendency to the dissipation of mechanical energy.

(2) Any restoration of mechanical energy, without more than an equivalent of dissipation, is impossible in inanimate material processes, and is probably never effected by means of organized matter, either endowed with vegetable life or subjected to the will of an animated creature.

(3) Within a finite period of time past, the earth must have been, and within a finite period of time to come the earth must again be unfit for habitation of man as at present constituted, unless operations have been or are to be performed, which are impossible under the laws to which the known operations going on at present in the material world are subject.

2) Über die Relativität des Begriffs der Dissipation vgl. eine Bemerkung von *Helmholtz*, J. f. Math. 100 (1887), p. 142, auch *Maxwell*, Encyclopaedia Britannica, 9. Aufl., Diffusion, p. 220. Siehe auch *Maxwell*'s „Theory of Heat", p. 192.

bei welcher eine nicht umkehrbare Änderung in der Verteilung einer gewissen Art molekularer kinetischer Energie unter dem Bild einer Wärmeströmung aufgefasst wird. Die Erzeugung der Wärme durch Reibung und die Absorption von Wärme- oder Lichtstrahlen sind ebenfalls dissipative Vorgänge; die Dissipation tritt auch bei der Diffusion der Gase auf, einer Erscheinung, die sich nach den Prinzipien der kinetischen Gastheorie erklären lässt. Der Hauptgegenstand, der in diesem Artikel behandelt wird, ist die Wärmeleitung; die Verfolgung der anderen zahlreichen dissipativen Prozesse gehört in die verschiedenen Einzelgebiete der Physik und Chemie, welche sich mit diesen Prozessen befassen.

Ihrer mathematischen Behandlung nach weisen die verschiedenen dissipativen Vorgänge eine gewisse „Familienähnlichkeit" auf, so dass ihre Theorie mehr oder minder enge an die Theorie der Wärmeleitung als den am längsten und besten bekannten Typus der dissipativen Prozesse angeschlossen werden kann. Dies gilt namentlich von der Elektrizitätsleitung und der Diffusion, welche letztere hier anhangweise zur Sprache kommen wird.

2. Die Grundlagen der Theorie der Wärmebewegung. Die der Hauptsache nach von *Fourier* begründete[3]) Theorie der Wärmebewegung befasst sich mit der aus der Erfahrung bekannten Thatsache, dass zwei Teile desselben Körpers, oder zwei mit einander in Berührung stehende Körper von verschiedener Temperatur, den bestehenden Temperaturunterschied allmählich ausgleichen, indem der wärmere Körper oder Körperteil kühler und der kühlere wärmer wird. Diese Erscheinung stellt man sich als eine Bewegung der Wärme vom wärmeren zum kühleren Körper vor. Man unterscheidet drei wesentlich verschiedene Vorgänge, durch welche der Übergang der Wärme von einer wärmeren an eine kühlere Stelle geschehen kann: 1) Strahlung, wenn die Körper von einander getrennt sind und das dazwischen liegende Medium von der Art ist, die man diatherman nennt; 2) Leitung, wenn die Körper sich berühren oder wenn die Wärmebewegung in einem athermanen Körper stattfindet; 3) Konvektion, wo in einem flüssigen Körper Strömungen der Materie durch die Temperaturunterschiede verursacht werden.

3) Als Vorgänger *Fourier*'s ist namentlich *J. B. Biot* zu nennen, der für den Fall des stationären Wärmeflusses den heutzutage meist nach *Fourier* benannten Ansatz bereits vollständig entwickelt hatte. Vgl. Mémoire sur la propagation de la chaleur, lu à la classe des sciences math. et phys. de l'Institut national (Bibl. britann. Sept. 1804, 27, p. 310), sowie Traité de phys. 4, p. 669, Paris 1816.

Der mechanischen Wärmelehre gemäss werden die Wärmeerscheinungen in einem athermanen Körper auf Bewegungen der Moleküle oder der Atome zurückgeführt; die Wärmeleitungstheorie wäre also innerhalb der mechanischen Naturauffassung als Theorie der Fortpflanzung der betreffenden molekularen Bewegungen zu klassifizieren; mit etwaiger Ausnahme der gasförmigen Körper reichen aber unsere gegenwärtigen Kenntnisse über die molekulare Beschaffenheit der Körper nicht aus, um einen solchen Weg gangbar erscheinen zu lassen. Als *Fourier*[4]), *Poisson*[5]) und andere die Wärmeleitungstheorie begründeten, existierte die mechanische Wärmetheorie im modernen Sinn noch nicht, und trotzdem diese seither eine in vielen Hinsichten recht erfolgreiche Entwickelung durchgemacht hat, sind wir doch nicht im Stande, eine rein mechanische Theorie der Wärmeleitung in festen oder in flüssigen Körpern aufzustellen. (Höchstens könnte man in diesem Zusammenhange darauf hinweisen, dass die „Hauptlösung“ der Wärmleitungsgleichung (s. Nr. **6** und **7** dieses Art.) aufs Lebhafteste an die Verteilungsgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung erinnert, auf welche ja fraglos die Fortpflanzung der Molekularbewegungen zu basieren sein würde.) Dementsprechend hat man in dieser Theorie verschiedene Hilfsbegriffe nötig, wenn man die betreffenden Erscheinungen überhaupt einer mathematischen Behandlung zugänglich machen will, d. h. wenn man viele Fälle einheitlich zusammenfassen und allgemeine Sätze aufstellen will. Ausserdem werden in der mathematischen Behandlung der Erscheinungen verschiedene Voraussetzungen gemacht[6]), welche sogar bei mässigen

---

4) *Fourier*'s Schriften über die Wärmetheorie nehmen ihren Anfang in einem im Jahre 1808 im Bull. des Sci. veröffentlichten Auszug aus einer im vorangehenden Jahre eingereichten Denkschrift (vgl. Oeuvres 2, p. VII). Im Jahre 1811 fasste *Fourier* eine Abhandlung mit dem Titel „Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides“ ab; dieselbe wurde aber erst in den Jahren 1824, 1826 in Par. Mém. 4, 5 veröffentlicht; weitere Schriften erschienen in Par. Mém. 7 (1827); 8 (1829); 12 (1833). Eine Reihe Schriften über die Wärmetheorie befinden sich auch in Ann. Chim. Phys. 3 (1816); 4 (1817); 6 (1817); 13 (1820); 27 (1824); 28 (1825); 37 (1828). In seinem im Jahre 1822 erschienenen Werke „Théorie analytique de la chaleur“ hat *Fourier* den mathematischen Teil seiner Untersuchungen über Wärmeleitung zusammengefasst; seinen Plan, eine ergänzende „théorie physique“ zu schreiben, hat er nicht ausgeführt.

5) *Poisson*'s Untersuchungen sind in seinem Werke „Théorie mathématique de la chaleur“, Paris 1835, enthalten. Siehe auch J. éc. polyt. 12, cah. 19 (1823).

6) Eine Kritik der der *Fourier-Poisson*'schen Wärmeleitungstheorie zu Grunde liegenden Voraussetzungen giebt *W. Hergesell,* Ann. Phys. Chem. 15 (1882), p. 19; daselbst wird die Dehnung eines leitenden Körpers unter gewissen Voraussetzungen in Betracht gezogen. Ansätze zu einer solchen Kritik schon

Temperaturänderungen nur annähernd der wirklichen Erfahrung entsprechen; der Grad, in welchem die theoretischen Resultate den wirklichen Vorgängen entsprechen, kann nur durch Beobachtungen bestimmt werden; dass wir thatsächlich in vielen Fällen die erforderlichen Mittel besitzen, solche Vergleiche auszuführen, und den physikalischen Wert der höchstens nur annähernd richtigen mathematischen Theorie zu schätzen, wird im zweiten Teile dieses Artikels dargethan werden.

Der erste Begriff mit dem wir es zu thun haben, ist der der *Temperatur*, als Grösse betrachtet. Begrifflich wird die Temperatur in einem jeden Punkt eines Körpers durch ein unendlich kleines Thermometer ohne Wärmekapazität gemessen, welches an den betreffenden Punkt gebracht wird; die Temperatur in einem Punkt wird als Funktion sowohl der Lage des Punktes als auch der Zeit betrachtet.

Andere Begriffe, welche eine Hauptrolle in der Theorie spielen, sind die der *Wärmemenge* und die der *spezifischen Wärme.*

In der mechanischen Wärmelehre wird eine *Wärmemenge* durch eine Energiegrösse gemessen; wenn sie einem Körper oder Körperteilchen zugeführt wird, so wird ein Teil davon auf Temperaturerhöhung verwandt, der andere Teil wird aber in irgend eine andere Energieform verwandelt, oder auf Arbeitsleistung verbraucht, indem das Volumen des Körpers geändert wird. In der Wärmeleitungslehre hingegen wird vorläufig angenommen, dass, wenn eine Wärmemenge einem Körperteilchen zugeführt wird, ihre einzige Wirkung in einer Temperaturerhöhung des betreffenden Körperteilchens besteht, dass also keine Änderung des Volumens stattfindet und kein Umsatz in andere Energieformen Platz greift. Das Mass für die Wärmemenge ist in der Theorie der Wärmeleitung das kalorimetrische.

Wenn ein Körperteilchen von der Masse m eine unendlich kleine Wärmemenge δQ gewinnt, so bezeichnen wir die dadurch verursachte Temperaturerhöhung durch δu, wo u die ursprüngliche Temperatur des Teilchens darstellt; dann besteht die Gleichung $\delta Q = m\gamma\delta u$, wo

---

bei *Duhamel,* J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 1; *J. Liouville,* J. de math. 2 (1837), p. 439; *Duhamel*, Par. sav. [étr.] 5 (1838), p. 440; J. éc. polyt. cah. 36 (1856), p. 1; *J. Amsler,* Schweiz. N. Denkschr. 12 (1852) (abgedr. J. f. Math. 42 (1851), p. 327).

Wärmeleitung unter Zugrundelegung des Dulong-Petit'schen (vgl. Anm. 12) statt des Newton'schen Erkaltungsgesetzes (s. Gl. (4)) für den Wärmeaustausch zwischen benachbarten Molekeln bei *G. Libri,* J. f. Math. 7 (1831), p. 116; *J. Liouville,* J. de math. 3 (1838), p. 350.

der Wert von γ im allgemeinen von u und von der Beschaffenheit des Stoffs abhängt. Die Grösse γ heisst die *spezifische Wärme* des Körperteilchens; es wurde von *Fourier* und seinen Nachfolgern angenommen, dass sie unabhängig von der Temperatur u sei; obgleich wir nun wissen, dass dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist, nicht einmal unter der obigen Voraussetzung, dass das Volumen des Teilchens keine Änderung erleidet, wird *Fourier*'s Annahme doch meistens in der mathematischen Theorie beibehalten[7]).

Wenn eine Platte[8]) von isotropem homogenen Stoff durch zwei Ebenen von grosser Ausdehnung begrenzt ist, und die Temperaturen u_0, u_1 in diesen Ebenen konstant erhalten werden, so fliesst Wärme von der wärmeren (u_1) nach der kälteren Seite (u_0) durch die Platte; die Wärmemenge Q, die in der Zeit t durch die Platte hindurchgeht, ist proportional mit der Oberfläche F der Platte, proportional mit der Zeit t, und umgekehrt proportional mit der Dicke der Platte; da sie überdies verschwindet, wenn $u_0 = u_1$, so setzt man

$$(1) \qquad Q = \varkappa \frac{u_1 - u_0}{d} F t,$$

worin $\varkappa$ ein Faktor ist, der im allgemeinen eine Funktion der beiden Grenztemperaturen u_0, u_1 ist. Es wird nun als annähernd richtig angenommen, dass $\varkappa$ unabhängig ist von den Grenztemperaturen, und nur vom Material der Platte abhängt; $\varkappa$ heisst die (innere) Leitungsfähigkeit der Substanz der Platte.

Im Falle eines athermanen Stoffes macht man weiter die Annahme, dass ein Wärmeaustausch nur zwischen unmittelbar an einander grenzenden Teilen des Körpers stattfindet, man schliesst also die Wärmestrahlung auf endliche Entfernungen gänzlich aus. Wenn δF eine kleine ebene Fläche ist, welche einen Punkt P eines solchen Körpers enthält, und δQ die Wärmemenge bezeichnet, welche in der Zeit δt durch δF hindurchfliesst, so heisst der Grenzwert von

$$\frac{\delta Q}{\delta F \, \delta t},$$

wenn δQ, δt, δF unendlichklein werden, der *Wärmestrom im Punkt P senkrecht zur Oberfläche* δF. Durch Betrachtung der Wärmemengen, welche durch die Oberflächen eines unendlich kleinen Tetraeders fliessen, in Verbindung mit der Annahme, dass Wärme weder zerstört noch in andere Energieformen umgewandelt wird, kann man sodann zeigen, dass der Wärmestrom ein *Vektor* ist, dass also der Wärme-

7) Ein Ansatz zur Behandlung des allgemeinen Falles bei *Fourier*, Par. mém. 8 (1829), Oeuvres 2, p. 180.

8) Vgl. *Fourier*, „Théorie", chap. I, sect. IV, sowie *Biot* (l. c. Anm. 3).

strom in der Richtung (l, m, n) gleich $l\mathfrak{Q}_x + m\mathfrak{Q}_y + n\mathfrak{Q}_z$ ist, worin $\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z$ die Wärmeströme in den Richtungen der Koordinaten und l, m, n die Richtungskoeffizienten bezeichnen. Man nennt die Resultante von $\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z$ *den Wärmestrom* $\mathfrak{Q}$ *im Punkte* (x, y, z); die absolute Grösse dieses Vektors misst die Intensität des Wärmestromes; $\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z$ heissen die *Komponenten des Wärmestroms*.

Es wird vorausgesetzt, dass die Temperatur u im Punkte (x, y, z) zur Zeit t im allgemeinen eine stetige Funktion der Koordinaten x, y, z, t ist, welche stetige differentiierbare Derivierte nach diesen Koordinaten besitzt[9]); daraus folgt, dass zu einer jeden bestimmten Zeit t stetige Flächen existieren, auf welchen die Temperatur konstante Werte hat; diese Flächen heissen isotherme Flächen. Weiter folgt aus der Annahme, dass der Wärmestrom in einem Punkte nur von der Verteilung der Temperatur in der Umgebung des Punktes abhängt, dass in einem isotropen Körper der Wärmestrom immer senkrecht zu derjenigen isothermen Fläche gerichtet ist, auf welcher der betreffende Punkt liegt, und ferner, dass die Grösse des Wärmestroms durch $-\varkappa \partial u/\partial n$ ausgedrückt wird, wo dn ein Element der Normalen zur isothermen Fläche bezeichnet. Der Ausdruck $-\partial u/\partial n$ misst das Temperaturgefälle; *der Wärmestrom kommt also dem Produkt aus Temperaturgefälle und Leitungsfähigkeit gleich.* Da auch das Temperaturgefälle ein Vektor ist, so sind die Komponenten des Wärmestroms $\mathfrak{Q}$:

$$(2)\qquad (\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z) = \left(-\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Wenn zwei verschiedene Körper sich an einer Grenzfläche berühren, erleiden im allgemeinen die Komponenten des Wärmestromes einen Sprung an der Grenzfläche, aber die Komponenten in der Richtung der Normale haben in beiden Körpern denselben Wert. Von *Fourier* wird ausserdem angenommen, dass die Temperatur an der Grenzfläche keinen Sprung macht; die beiden Grenzbedingungen sind unter dieser Voraussetzung

$$(3)\qquad u = u', \quad l\varkappa\frac{\partial u}{\partial x} + m\varkappa\frac{\partial u}{\partial y} + n\varkappa\frac{\partial u}{\partial z} = l\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial x} + m\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial y} + n\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial z},$$

worin $\varkappa$, $\varkappa'$ die Leitungsfähigkeit der beiden Körper, u, u' ihre Tempe-

9) Selbstverständlich ist diese Voraussetzung mit der Vorstellung vom molekularen Aufbau der Materie strenge genommen unvereinbar, wie überhaupt die Behandlung der physikalischen Erscheinungen in ponderabeln Körpern mittels partieller Differentialgleichungen gewisse prinzipielle Schwierigkeiten aufweist. Vgl. hierzu *G. Prasad,* Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat. Göttinger Abhdlgen. (Neue Folge) 2 (1903) Nr. 4; insbesondere Part. II und III.

raturen, l, m, n die Richtungskoeffizienten der Normale im Punkte (x, y, z) der Grenzfläche bedeuten. Von *Poisson*[10]) wird die erste der obigen Bedingungen allgemeiner gefasst; er nimmt an, dass an der Grenzfläche zweier fester Körper, ähnlich wie man für die Grenzfläche eines festen Körpers und einer Flüssigkeit (vgl. Gl. (4)) anzusetzen pflegt:

$$l\varkappa\frac{\partial u}{\partial x} + m\varkappa\frac{\partial u}{\partial y} + n\varkappa\frac{\partial u}{\partial z} = l\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial x} + m\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial y} + n\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial z} = q(u - u'),$$

wo q eine von der Beschaffenheit der beiden Körper in der Nähe der Grenzfläche abhängige Grösse ist. Mit $q = \infty$ folgen hieraus im besonderen die Gl. (3).

Wenn ein fester Körper von Luft oder von einer anderen Flüssigkeit umgeben ist, so wird die Wärmemenge, welche vom Körper an die Flüssigkeit oder umgekehrt abgegeben wird, zum Teil durch Leitung, zum Teil durch Strahlung an der Grenzfläche bedingt; es werden aber auch Bewegungen in der Flüssigkeit entstehen, und daher die Temperaturänderungen in der Nähe der Fläche zum Teil durch Konvektion hervorgerufen werden. Diese komplizierten Vorgänge der Berechnung zu unterwerfen wäre unmöglich ohne eine Hypothese, die die Wirkung aller drei Prozesse einigermassen richtig zusammenfasst. Man macht die Hypothese, dass die Wärmemenge, welche durch ein Flächenelement δF in der Zeit δt strömt, proportional mit $(u - u_0)\delta F \delta t$ ist, wo u die Temperatur des festen Körpers, u_0 diejenige der Flüssigkeit in der Nähe des Elements δF bedeutet; dieser Hypothese gemäss lautet die Bedingung an der Grenzfläche[11])

$$(4) \qquad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial n} = H(u - u_0),$$

worin dn ein Element der nach der Flüssigkeit gerichteten Normale bedeutet, und H eine von der Beschaffenheit der beiden Substanzen abhängige Grösse ist, welche die äussere Leitungsfähigkeit des Körpers genannt wird. Diese Gleichung soll die Gesamtwirkung von Leitung, Strahlung und Konvektion darstellen, und drückt das sogenannte *Newton'sche Gesetz der Abkühlung* aus; dasselbe kann jedoch nur als eine erste Näherung bei hinreichend kleinem Temperaturunterschiede $u - u_0$ gelten. *Dulong* und *Petit* haben zuerst versucht, dasselbe unter Ausschluss von Wärmestrahlung durch eine auf Beobachtung basierte Formel zu ersetzen[12]). Die Wärmeabgabe durch Strahlung

---

10) *Poisson,* „Théorie", p. 127; J. éc. polyt. cah. 19, p. 107.

11) *Fourier,* „Théorie", chap. II, sect. VII.

12) *Dulong* und *Petit,* Annal. chim. phys. 7 (1817), p. 225, 337; Einführung

andrerseits wird nach dem heutigen Stande der Wissenschaft durch das *Stefan*'sche Gesetz[13]) gegeben, wobei man der Wärmeabgabe nach *Dulong* und *Petit* diejenige nach *Stefan* zu überlagern hat. (Vgl. hierzu Nr. **21** dieses Art.)

3. Die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in einem isotropen festen Körper. Allgemeine Sätze. Bei Berücksichtigung der in Nr. **2** angegebenen Voraussetzungen und Definitionen ist es nun möglich, die partielle Differentialgleichung aufzustellen, welcher die Temperatur $u(x, y, z, t)$ im Inneren eines isotropen festen Körpers Genüge leistet. Es sei σ eine innerhalb des leitenden Körpers liegende geschlossene Fläche, γ die spezifische Wärme, ϱ die Dichtigkeit der Materie in einem Punkt auf oder innerhalb der Fläche σ. Da keine Wärme innerhalb σ erzeugt wird, so besteht die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \gamma\varrho u\,dx\,dy\,dz = \iint \varkappa\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right)d\sigma,$$

worin l, m, n die Richtungskoeffizienten der auf $d\sigma$ nach innen gerichteten Normale bedeuten, das dreifache Integral sich auf den Raum innerhalb σ bezieht, und das doppelte Integral auf die Oberfläche von σ. Indem man das Flächenintegral durch ein Volumenintegral ersetzt, erhält man

$$\iiint\left\{\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}dx\,dy\,dz = 0.$$

Da die Fläche σ eine willkürliche ist, so muss in jedem Punkt innerhalb des leitenden Körpers die Gleichung

$$\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \tag{5}$$

erfüllt werden. Falls der Körper homogen ist, nimmt (5) die Form an

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{6}$$

Die Konstante

$$k = \frac{\varkappa}{\gamma\varrho} \tag{7}$$

bezeichnet man als Temperaturleitvermögen, weil bei gegebenen Oberflächentemperaturen die räumliche und zeitliche Temperaturverteilung im Innern nur von ihr abhängt.

---

dieses Gesetzes in die Theorie der Wärmeleitung schon bei *Kelland,* Theory of heat, Nr. 73, p. 69.

13) *J. Stefan,* Wien. Ber., Math. phys. Kl. 79 (1879), p. 391.

Die Gleichung (5) resp. (6) ist die zuerst von *Fourier* aufgestellte *Bewegungsgleichung der Wärme* in einem leitenden Körper.

In der mathematischen Wärmeleitungstheorie handelt es sich hauptsächlich darum, ein Integral dieser partiellen Differentialgleichung zu finden, welches gegebenen Oberflächenbedingungen an der Grenze des Körpers genügt, wobei die Form des betreffenden Körpers und der thermische Anfangszustand desselben vorgeschrieben wird.

Wenn bei der Wärmebewegung die Temperatur in jedem Punkt (x, y, z) unabhängig von der Zeit ist, so heisst die Bewegung stationär; in diesem Falle lautet die Differentialgleichung

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

oder, wenn der Körper homogen ist,

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u = 0.$$

Die Differentialgleichung (8) resp. (9) ist dieselbe, wie sie auch in der Elektrostatik vorkommt, und die spezielle Form (9) ist die Grundgleichung in der Theorie des Gravitationspotentials. Die Bestimmung der stationären Temperatur in einem Körper bei gegebener Oberflächentemperatur fällt also mit der *Green'schen Aufgabe der gewöhnlichen Potentialtheorie* zusammen.

Für die allgemeinere Gleichung (6) der veränderlichen Wärmebewegung lassen sich *allgemeine Sätze* aufstellen, welche bekannten Sätzen der gewöhnlichen Potentialtheorie entsprechen. Es seien u, u' beliebige Funktionen, welche der Beschränkung unterliegen, innerhalb eines gegebenen Raumes S nebst ihren ersten Derivierten nach x, y, z von $t = 0$ bis $t = t_1$ (mit ev. Ausschluss dieser Grenzen selbst) stetig zu sein; es lässt sich leicht beweisen, dass[14])

$$\int_0^{t_1} dt \int dS \left[u'\left(\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u\right) + u\left(\frac{\partial u'}{\partial t} + k\Delta u'\right)\right]$$
$$= \int \{(uu')_{t_1} - (uu')_0\}\, dS + \int_0^{t_1} dt \int k\left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u'}{\partial n}\right) d\sigma;$$

die Integration nach S ist durch den Raum S zu erstrecken, dn ist

14) Diese Formel und die nachfolgenden Anwendungen bei *B. Minnigerode* „Über Wärmeleitung in Krystallen", Diss. Göttingen 1862. Vgl. auch *J. Amsler,* J. f. Math. 42 (1851), p. 316, 327; *E. Beltrami,* Mem. Acc. Bologna (4) 8 (1887), p. 291; *E. Betti,* Mem. Soc. Ital. 40 (3), 1[2]; *A. Sommerfeld,* Math. Ann. 45 (1899), p. 263. Über den stationären Temperaturzustand siehe *K. von der Mühll,* Math. Ann. 2 (1870), p. 643.

ein nach dem Inneren von S gezogenes Element der Normale zum Oberflächenelement $d\sigma$.

Wenn nun u der Differentialgleichung (6) genügt, und wenn u' die „adjungierte" Gleichung[15])

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + k\Delta u' = 0$$

erfüllt und sich für $\lim t = t_1$ dem Wert

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k(t_1 - t)})^3} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y)^2+(z-z')^2}{4k(t_1-t)}}$$

nähert, so lässt sich beweisen, indem man den Punkt (x', y', z') durch eine kleine Oberfläche umhüllt und den von ihr eingeschlossenen Raum von der Integration S ausschliesst, dass der Wert $u(x', y', z', t_1)$ von u im Punkt (x', y', z') durch

$$u(x', y', z', t_1) = \int (uu')_{t=0}\, dS + \int_0^{t_1} dt \int k\left(u\frac{\partial u'}{\partial n} - u'\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

dargestellt wird. Anstatt u' führe man die Funktion $v(t) = u'(t_1 - t)$ ein; v genügt der Gleichung (6) und nähert sich für $\lim t = 0$ dem Wert

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k t})^3} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4kt}}.$$

Um nun die Temperatur $u(x', y', z', t_1)$ im Punkte $(x'\ y'\ z')$ zu bestimmen, wenn die Temperatur U der Oberfläche σ von S gegeben ist, muss man den Bedingungen, welchen v genügt, noch diejenige hinzufügen, dass v an der Oberfläche σ verschwinden soll. In diesem Fall erhalten wir

$$(10)\qquad u(x', y', z', t_1) = \int u_0 v(t_1)\, dS + \int_0^{t_1} dt \int U \frac{\partial}{\partial n} v(t_1 - t)\, d\sigma;$$

diesem Resultat gemäss reduziert sich die Bestimmung von u auf die Bestimmung einer Funktion v, welche den obigen einfacheren Bedingungen zu genügen hat. Ist an der Oberfläche von S nicht die Temperatur des Körpers selbst, sondern die Temperatur U der Umgebung gegeben, so dass u der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(u - U), \quad h = \frac{H}{\varkappa}$$

15) In Bezug auf Randwertaufgaben im allgemeinen, sowie wegen des Begriffs der adjungierten Differentialgleichung vgl. Art. *Sommerfeld* (II A 7c, Nr. **4**, **9**, **10**, **14**).

zu genügen hat, so bestimme man v derart, dass an der Oberfläche

$$\frac{\partial v}{\partial n} = hv;$$

in diesem Fall wird u durch die Gleichung

$$(10') \quad u(x', y', z', t_1) = \int u_0 v(t_1)\, dS + \int_0^{t_1} dt \int h\, Uv(t_1 - t)\, d\sigma$$

ausgedrückt.

Die Funktion v spielt hier eine ähnliche Rolle, wie die *Green'sche Funktion in der gewöhnlichen Potentialtheorie*; sie stellt die Temperatur dar, die zur Zeit t_1 an der Stelle (x', y', z') vorhanden ist, wenn zur Zeit $t = 0$ die Temperatur von S überall Null war und nur an der Stelle (x, y, z) einen unendlich grossen Wert hatte, vorausgesetzt, dass im ersten der obigen Fälle die Temperatur der Oberfläche, im zweiten die der Umgebung stets gleich Null ist.

Aus diesen Resultaten folgt leicht, dass es nicht zwei verschiedene Funktionen u geben kann, welche den ihnen auferlegten gleichen Bedingungen genügen, dass also die Lösung des Problems durch jene Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Übrigens lässt sich der Eindeutigkeitsbeweis auch führen, ohne dass dabei, wie es im Vorstehenden geschah, die Existenz der „Green'schen Funktion" v vorausgesetzt wird[16].

Aus der partiellen Differentialgleichung (6) schliesst man, wenn die Oberflächentemperatur von S stets Null ist:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int u^2\, dS = -\int k\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} dS;$$

ist nicht die Oberflächentemperatur selbst, sondern die Temperatur der Umgebung Null, so gilt dieselbe Gleichung bei Hinzufügung von $-h\int u^2\, dS$ auf der rechten Seite. Daraus folgt, dass $\int u^2\, dS$ in beiden Fällen beständig abnimmt, wenn t ins Unendliche wächst; die Grenze, der sich diese positive Grösse dabei nähert, *kann keine andere als Null sein.*

Die lineare Form der Wärmebewegungsgleichung zeigt unmittelbar, dass eine Summe von Lösungen abermals eine Lösung der Gleichung ist; wenn man also Lösungen so zusammensetzen kann, dass ihre Summe den Grenzbedingungen Genüge leistet, so ist letztere die (eindeutig bestimmte) Lösung der betreffenden Aufgabe. Man darf

---

16) Vgl. z. B. *Riemann-Weber,* Part. Differentialgl. II, p. 86; *Heine,* Kugelfunktionen 2, p. 307—312.

dabei den einzelnen Gliedern der Summe irgend welche Grenzbedingungen auferlegen, welche mit den Bedingungen verträglich sind, denen die Summe genügen soll. Ein wichtiges Beispiel dieser *Methode der Zusammensetzung von Lösungen* besteht darin, dass die Temperatur u in der Form einer Reihe $\sum u_r f_r(t)$ dargestellt wird, worin die Funktionen u_r unabhängig von t sind; aus der Differentialgleichung folgt dann, dass die Funktionen $f(t)$ die Form haben müssen $Ae^{-\alpha t}$, wo A und α Konstante, und dass die Funktionen u_r der Differentialgleichung

$$k\Delta u + \alpha u = 0$$

genügen müssen. Diese Darstellung eignet sich besonders für den Fall, in welchem der Körper seine Wärme an ein umgebendes Medium abgiebt, dessen Temperatur konstant und, was keine weitere Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, gleich Null angenommen werden möge; schreibt man in diesem Falle

$$u = \sum A_r e^{-\alpha_r t} u_r,$$ [17])

so müssen die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ aus der Oberflächenbedingung

$$\frac{\partial u_r}{\partial n} - h u_r = 0$$

bestimmt werden. Es lässt sich durch Anwendung der Differentialgleichung leicht beweisen, dass

$$(11) \qquad (\alpha_r - \alpha_s)\iiint \gamma \varrho u_r u_s \, dx\, dy\, dz = \iint \varkappa \left(u_s \frac{\partial u_r}{\partial n} - u_r \frac{\partial u_s}{\partial n}\right) d\sigma;$$

da nun die rechte Seite durch Wahl der α zum Verschwinden gebracht ist, so wird

$$\iiint \gamma \varrho u_r u_s \, dx\, dy\, dz = 0;$$

auch den Wert von

$$\iiint \gamma \varrho u_r^2 \, dx\, dy\, dz$$

kann man in speziellen Fällen aus Gl. (11) entnehmen, indem man zur Grenze $\alpha_r = \alpha_s$ übergeht. Wenn die Anfangstemperatur $\Phi(x, y, z)$ gegeben ist, so lässt sie sich unter gewissen zu ermittelnden Beschränkungen in die Form entwickeln

---

17) Lösungen von der Form $e^{-\alpha t} u$ nennt *Kelvin* (*W. Thomson*) „harmonic solutions", Mathematical and physical Papers 2, p. 50. Die Funktionen u_r heissen Normalfunktionen, vgl. das Buch von *F. Pockels*, „Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$", Leipzig 1891, p. 93. Siehe auch *H. Poincaré,* Par. C. R. 107 (1888), p. 967 und Par. C. R. 104, p. 1754.

$$\Phi(x, y, z) = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_r u_r + \cdots,$$

wo A_r den Wert

$$\frac{\iiint \gamma \varrho u_r \Phi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint \gamma \varrho u_r^2\, dx\, dy\, dz}$$

hat[18]). Unter der angegebenen Grenzbedingung kann man mit Hilfe des Lehrsatzes

$$\iiint \gamma \varrho u_r u_s\, dx\, dy\, dz = 0$$

beweisen, dass alle α reell sind[19]), da ja, wenn komplexe und daher auch konjugiert komplexe α möglich wären, die linke Seite der vorigen Gleichung positiv ausfallen müsste, wenn man für u_r, u_s die zu konjugierten α gehörigen Funktionen u wählt. Ist dagegen die Temperatur des umgebenden Mediums variabel, so werden bei einem analogen Ansatz der Lösung die α im allgemeinen komplex.

Es habe ein leitender Körper die Anfangstemperatur Null und die Oberflächentemperatur $\Phi(t)$; wenn $\Phi(t) = 1$, so sei die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u = \Psi(x, y, z, t).$$

Dann lässt sich die Temperatur für allgemeine Werte von $\Phi(t)$ durch Zusammensetzung finden. *Es gilt nämlich*[20])

$$u = \Phi(0)\, \Psi(x, y, z, t) + \int_0^t \Phi'(t')\, \Psi(x, y, z, t - t')\, dt'$$

oder anders geschrieben

$$u = \int_0^t \Phi(t') \frac{d}{dt} \Psi(x, y, z, t - t')\, dt'. \tag{12}$$

Man kann auf ähnliche Weise verfahren, wenn der Körper sich durch Strahlung in ein umgebendes Medium mit der Temperatur $\Phi(t)$ abkühlt.

Bei vielen Aufgaben ist es zweckmässig, drei geeignet gewählte *orthogonale Koordinaten* h_1, h_2, h_3 als Raumkoordinaten anstatt der cartesischen anzuwenden; h_1, h_2, h_3 sind Parameter von drei Flächen,

---

18) Derartig allgemeine Koeffizientenbestimmungen scheinen zuerst von *J. R. Merian* bei einem hydrodynamischen Problem ausgeführt zu sein, Basel 1828, umgearbeitet von *K. Vondermühll,* Math. Ann. 27 (1886), p. 575.

19) *Poisson,* „Théorie", p. 178, 179; auch *Duhamel,* J. éc. polyt. 14, cah. 22 (1833).

20) Diese Methode hat im Anschluss an *Fourier,* Par. mém. 8 (1829) (Oeuvres 2, p. 161) im wesentlichen *Duhamel* gegeben J. éc. polyt. 14, cah. 22 (1833), p. 34; vgl. auch *Heine,* „Kugelfunktionen" 2, p. 311—314.

die sich im Punkt (x, y, z) orthogonal schneiden und welche je einer Flächenschar angehören. Die umgestaltete partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung lautet[21]), wenn h_1, h_2, h_3, t als unabhängige Variabele gewählt werden,

$$\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = H_1 H_2 H_3 \left\{\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\varkappa\frac{H_1}{H_2 H_3}\frac{\partial u}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\varkappa\frac{H_2}{H_3 H_1}\frac{\partial u}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\varkappa\frac{H_3}{H_1 H_2}\frac{\partial u}{\partial h_3}\right)\right\},$$

worin H_1 den Wert von

$$\left\{\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

bedeutet, und H_2, H_3 entsprechende Werte in Bezug auf h_2, h_3 haben; die Länge des Linienelementes

$$ds = \{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

lässt sich in der Form

$$\left\{\left(\frac{dh_1}{H_1}\right)^2 + \left(\frac{dh_2}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{dh_3}{H_3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ausdrücken.

Bei Aufgaben der Wärmeleitungslehre mag in Bezug auf die Grenzbedingungen bemerkt werden, dass man es an einer Grenzfläche im allgemeinen nicht mit dem Funktionswert selbst, sondern mit dem *Grenzwert der Funktion* zu thun hat. Wenn z. B. die Temperatur an der Oberfläche eines leitenden Körpers gegeben ist, so ist zu bewirken, dass $\lim u(x, y, z, t)$, wenn x, y, z gegen ihre Werte in einem Punkt der Oberfläche konvergieren, dem gegebenen Oberflächenwert gleich wird. Ebenso ist bei gegebener Anfangstemperatur $u_0(x, y, z)$ lediglich zu verlangen, dass $\lim u(x, y, z, t)$ für $t = 0$ gleich der Anfangstemperatur u_0 werde, während $u(x, y, z, 0)$ gegebenenfalls von u_0 verschieden ausfallen kann. Die Funktion $u_0(x, y, z)$ kann an einzelnen Flächen oder in einzelnen Punkten Unstetigkeiten erleiden, während die Funktion $u(x, y, z, t)$ für alle positive Werte von t doch stetig ist[22]).

Wenn der Temperaturzustand eines leitenden Körpers zu einer bestimmten Zeit gegeben ist, so kann man die Frage aufwerfen, *ob*

---

21) Diese Transformation rührt von *Lamé* her, J. éc. polyt. 14, cah. 23 p. 191, auch „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications", Paris 1857. Sie wurde auch von *Kelvin* (*W. Thomson*) gefunden Cambr. Math. J. 4 (1843), p. 33, und „Mathematical and physical Papers" 1, p. 25. Vgl. auch *Heine*, „Kugelfunktionen", p. 303—308.

22) *K. Weierstrass*, Berl. Sitzungs-Ber. (1885) p. 803; speziell mit Rücksicht auf die Wärmeleitung: *A. Sommerfeld*, Die willkürlichen Funktionen in der mathem. Physik. Diss. Königsberg 1891, *G. Prasad*, Göttinger Abhdlgn. (Neue Folge) 2 (1903) Nr. 4.

diese Temperaturverteilung aus einer früheren Verteilung durch Wärmeleitung entstanden sein kann. Die Antwort auf diese Frage ist, dass eine solche frühere Wärmeverteilung nicht immer existiert, aber dass sie sich in sehr allgemeinen Fällen eindeutig bestimmen lässt. Im Fall der linearen Leitung hat *P. Appell* [23]) eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die Existenz einer solchen vorhergehenden Wärmeverteilung aufgestellt. Jedenfalls lässt sich die Temperaturfunktion, wenn sie nicht konstant ist, niemals unendlich weit in die Vergangenheit zurückführen, ohne dass sie aufhört zu existieren oder endlich zu sein.

4. Die Wärmeleitung in krystallinischen Körpern. Wenn die Wärmeleitung in einem Krystall [24]) stattfindet, darf man im allgemeinen nicht annehmen, dass die Richtung des Wärmestromes senkrecht zu der isothermen Fläche liegt. Mit Rücksicht auf die Erfahrungsthatsache, dass der Wärmestrom durch jedes Flächenelement nur von der Temperaturverteilung in der nächsten Umgebung desselben abhängt, ist die einfachste Annahme die, dass die Komponenten des Wärmestroms sich als lineare Funktionen der Komponenten des Temperaturgefälles ausdrücken lassen, dass also

$$\mathfrak{Q}_x = -\varkappa_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{12}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{13}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\mathfrak{Q}_y = -\varkappa_{21}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{22}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{23}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\mathfrak{Q}_z = -\varkappa_{31}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{32}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{33}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Hierin bedeuten ($\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$) die Komponenten des Wärmestromes, und die $\varkappa$ Konstanten, welche von der Beschaffenheit des Mediums abhängen; es wird gewöhnlich angenommen, dass diese Konstanten unabhängig sind von der Temperatur u; diese neun Konstanten heissen Konstanten der Wärmeleitungsfähigkeit. Die obigen Gleichungen haben

---

23) J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Siehe auch *Kelvin,* Cambr. Math. J. 4 (1843), p. 67, oder „Mathematical and physical Papers" 1, p. 39.

24) Die Wärmeleitung in Krystallen hat *Duhamel* zuerst behandelt, J. éc. polyt. 13, cah. 21 (1832), p. 356; 19 (1848), p. 155; Par. C. R. 25 (1842), p. 842; ebenda 27 (1848), p. 27. Siehe auch *P. O. Bonnet,* Par. C. R. 27 (1848), p. 49; *B. Minnigerode,* N. Jahrb. f. Mineralogie 1 (1886), p. 1; *P. Morin,* Par. C. R. 66 (1868), p. 1332; *M. J. Moutier,* Bull. soc. phil. (7) 8 (1884), p. 134; *Kelvin,* Math. and phys. Papers 1, p. 282. Eine gute Darstellung des Gegenstandes ist im Lehrbuch von *Liebisch,* „Physikalische Krystallographie", Leipzig 1891, zu finden.

Duhamel und *Lamé*[25]) durch Betrachtung des Austausches der Wärme unter benachbarten Molekülen begründet. Schreiben wir

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{23} + \varkappa_{32}), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{31} + \varkappa_{13}), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{12} + \varkappa_{21}),$$
$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{23} - \varkappa_{32}), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{31} - \varkappa_{13}), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{12} - \varkappa_{21}),$$
$$X = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial u}{\partial z},$$

so erhalten[26]) wir

$$(\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z) = (\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z) + (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z),$$

worin

$$\mathfrak{P}_x = \varkappa_{11} X + \lambda_3 Y + \lambda_2 Z, \qquad \mathfrak{R}_x = \mu_3 Y - \mu_2 Z,$$
$$\mathfrak{P}_y = \lambda_3 X + \varkappa_{22} Y + \lambda_1 Z, \qquad \mathfrak{R}_y = \mu_1 Z - \mu_3 X,$$
$$\mathfrak{P}_z = \lambda_2 X + \lambda_1 Y + \varkappa_{33} Z, \qquad \mathfrak{R}_z = \mu_2 X - \mu_1 Y.$$

Der Vektor $\mathfrak{P}$ hat die Richtung der Normale im Punkt (X, Y, Z) an das Ellipsoid

$$\varkappa_{11} x^2 + \varkappa_{22} y^2 + \varkappa_{33} z^2 + 2\lambda_1 yz + 2\lambda_2 zx + 2\lambda_3 xy = \text{const.};$$

die Grösse des Vektors ist gleich dem reziproken Werte des Abstands der Tangentialebene im Punkte X, Y, Z vom Mittelpunkte des Ellipsoids. Dieses Ellipsoid heisst das *Ellipsoid der linearen Leitungsfähigkeit*[27]); seine Hauptaxen liefern ein System ausgezeichneter Koordinatenaxen, welche als *Hauptaxen der Leitungsfähigkeit* bezeichnet werden können[28]). Der „rotatorische Vektor" $\mathfrak{R}$ ist gleich dem vektoriellen Produkt aus dem Radiusvektor (X, Y, Z) und dem durch

---

25) „Leçons sur la théorie anal. de la chal." In seiner Behandlung meint *Lamé* nicht angenommen zu haben, dass das Medium nach zwei entgegengesetzten Richtungen gleiche Wärmeleitungsfähigkeit besitzt; dass die Meinung irrig sei, hat *Minnigerode* in seiner Dissertation „Über Wärmeleitung in Krystallen", Göttingen 1862, bewiesen. Die Theorien von *Duhamel* und *Lamé* basieren auf einer Betrachtung des Wärmeaustausches unter benachbarten Molekülen. Dieselben Gleichungen kommen in den Theorien der Elektrizitätsströmungen, der dielektrischen und magnetischen Polarisation vor. Vgl. *Maxwell*'s „Theory of electricity" 1, p. 418; 2, p. 63, 3. Aufl.

26) *G. G. Stokes*, Cambr. and Dubl. Math. J. (2) 6 (1851), p. 215, oder „Math. and phys. Papers" 3, p. 203, hat die Wirkung der Koeffizienten μ_1, μ_2, μ_3 bez. ω_1, ω_2, ω_3 (s. folgende S.) auf die Form der Strömungskurven in einem Körper untersucht, welcher einen Quellenpunkt enthält; er zeigt, dass eine gewisse spiralförmige Bewegung bei Krystallen auftritt, welche keine oder nur eine einzige Symmetrieaxe besitzen. Über die spiralförmige Bewegung siehe auch *Boussinesq*, Par. C. R. 66 (1868), p. 1194.

27) Siehe *Boussinesq*, Par. C. R. 65 (1867), p. 104; 66 (1868), p. 1194; J. de math. (2) 14 (1869), p. 265. Auch *Lamé*, „Leçons sur la théorie de la chal.", p. 35 u. ff.

28) *Duhamel*, J. éc. polyt. 13, cah. 21 (1832), p. 377.

die Werte der μ gegebenen Vektor (μ_1, μ_2, μ_3). Er hat demnach die Richtung senkrecht zur Ebene durch den Radiusvektor (X, Y, Z) und die Gerade, deren Richtungskoeffizienten mit (μ_1, μ_2, μ_3) proportional sind; die absolute Grösse dieses Vektors ist

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} (\mu_1{}^2 + \mu_2{}^2 + \mu_3{}^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi,$$

worin φ den zwischen (X, Y, Z) und (μ_1, μ_2, μ_3) enthaltenen Winkel bedeutet. Wählt man die Hauptaxen der Leitungsfähigkeit als Koordinatenaxen, so verschwinden die λ; für $\varkappa_{11}, \varkappa_{22}, \varkappa_{33}$ schreiben wir kürzer $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$. Bezeichnen wir noch die Komponenten des Vektors (μ_1, μ_2, μ_3) im neuen Koordinatensystem mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, so haben wir den Vektor $\mathfrak{Q}$ nunmehr durch die folgenden Formeln zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_x &= \varkappa_1 X + \omega_3 Y - \omega_2 Z,\\ \mathfrak{Q}_y &= \varkappa_2 Y + \omega_1 Z - \omega_3 X,\\ \mathfrak{Q}_z &= \varkappa_3 Z + \omega_2 X - \omega_1 Y;\end{aligned}$$

es hat sich also herausgestellt, dass nur sechs unabhängige Konstanten der Leitungsfähigkeit existieren, zu denen die drei Richtungsgrössen hinzukommen, welche die Lage der Hauptaxen definieren. Die Konstanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ heissen die *Hauptleitungsfähigkeiten des Krystalls*; mit Rücksicht auf die Symmetrie der einzelnen Krystallgruppen lässt sich zeigen, dass in gewissen Fällen die Konstanten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ Null sein müssen.

Geradeso wie bei einem isotropen Körper ergiebt sich jetzt, dass die Temperaturfunktion in einem leitenden Krystall der Gleichung

$$\gamma\varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_z}{\partial z} = 0$$

Genüge leistet; nimmt man die Hauptaxen der Leitungsfähigkeit als Koordinatenaxen, so lässt sich die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in der einfachen Form schreiben

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

worin

$$k_1 = \frac{\varkappa_1}{\gamma\varrho}, \quad k_2 = \frac{\varkappa_2}{\gamma\varrho}, \quad k_3 = \frac{\varkappa_3}{\gamma\varrho}$$

als Haupttemperaturleitfähigkeiten bezeichnet werden können. Diese Form gilt, gleichviel ob die Konstanten ω verschwinden oder nicht, indem sich die mit diesen Konstanten behafteten Glieder in der Differentialgleichung der Wärmebewegung gegenseitig zerstören. Schreibt man schliesslich noch, indem man unter k eine ganz beliebige Grösse von der Dimension der Temperaturleitfähigkeit versteht:

$$x' = \sqrt{\frac{k}{k_1}}\,x, \quad y' = \sqrt{\frac{k}{k_2}}\,y, \quad z' = \sqrt{\frac{k}{k_3}}\,z,$$

so reduziert sich die Gleichung auf dieselbe Form wie bei einem isotropen Körper, nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u;$$

die in Nr. 3 enthaltenen Sätze über Lösungen dieser Gleichung lassen sich daher unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen.

5. Die lineare Wärmeleitung. Wenn die Wärmebewegung solcher Art ist, dass die isothermischen Flächen parallele Ebenen sind, so hängt die Temperatur ausser von der Zeit nur von einer Raumkoordinate ab. In diesem Fall, wo die Bewegung *linear* genannt wird, reduziert sich die Gleichung der Wärmeleitung auf die Form

$$\gamma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right); \tag{13}$$

wenn $\varkappa$ als konstant angenommen und wieder $k = \frac{\varkappa}{\gamma \varrho}$ gesetzt wird, hat die Gleichung die Form[29])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{14}$$

Diese Annahme einer konstanten Leitungsfähigkeit wird den Untersuchungen von *Fourier*, *Poisson* und anderen zu Grunde gelegt. Um die Differentialgleichungen (13) oder (14) anwenden zu können, wird vorausgesetzt, entweder dass der Leiter in der Richtung der yz-Ebene unendlich ausgedehnt ist, oder dass der leitende Körper aus einem Stab besteht, der vor seitlicher Ausstrahlung geschützt ist.

Hat man es andrerseits mit einem Stabe zu thun, der in ein Medium von konstanter Temperatur (die wir gleich Null annehmen können) seitlich ausstrahlt, so lässt sich, unter den Voraussetzungen, dass der Querschnitt und die äussere Leitungsfähigkeit konstant sind, die Differentialgleichung für die Wärmebewegung auf die Form (2) reduzieren. Die Gleichung lautet nämlich in diesem Fall zunächst:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h' u, \tag{15}$$

---

29) Mit der Integration dieser Gleichung haben sich viele Mathematiker beschäftigt; u. a. *Laplace*, J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 255; *Fourier*, „Théorie"; *Poisson*, „Théorie"; *Ampère*, J. éc. polyt. 10, p. 587; *L. Schläfli*, J. f. Math. 72 (1870), p. 263; *A. Harnack*, Zeitschr. Math. Phys. 32 (1887), p. 91; *S. v. Kowalewski*, J. f. Math. 80 (1875), p. 22; *G. Darboux*, Par. C. R. 106, p. 651; *P. Appell*, J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Siehe auch *Jordan*, „Cours d'Analyse" 3; *Boussinesq*, „Cours d'Analyse infinitésimale"; *Riemann-Hattendorff* und *Riemann-Weber*, „Part. Differentialgl."

wo h' eine von dem Umfang des Querschnitts und der äusseren Leitungsfähigkeit abhängige Konstante ist; (genauere Definition derselben in Nr. **15**, wo indessen wieder einfacher h statt h' geschrieben ist); setzt man

$$u = e^{-h't} v, \tag{16}$$

so genügt v einer Gleichung, die mit (14) der Form nach übereinstimmt[30]).

Eine einfache Lösung der Differentialgleichung (14) ist

$$u = A e^{\alpha x + k \alpha^2 t},$$

wo A, α willkürliche reelle oder komplexe Zahlen darstellen; schreibt man $\alpha = p \pm iq$, so ergibt sich als Lösung

$$u = A e^{px + k(p^2 - q^2)t} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (qx + 2kpqt),$$

oder als besonderer Fall derselben

$$u = A e^{-km^2 t} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx.$$

Durch Zusammensetzung solcher Lösungen, in denen den Konstanten p, q, resp. m, eine unendliche Anzahl verschiedener Werte zugeschrieben wird, haben *Fourier*, *Poisson* und *Duhamel* Ausdrücke in der Form von unendlichen Reihen und bestimmten Integralen erhalten, welche die Temperatur in speziellen Fällen der linearen Wärmeleitung ausdrücken. Indem sich *Fourier* die Aufgabe stellte, die einem *willkürlich* gegebenen Anfangstemperaturzustand entsprechende Lösung in der angegebenen Form zu erhalten, wurde er auf seine bahnbrechenden Untersuchungen der sogenannten *Fourier*'schen Reihen und Integrale geführt, welche in ihrer späteren Entwicklung einen so grossen Einfluss auf die reine Mathematik ausgeübt und so viele Anwendungen in der mathematischen Physik gefunden haben. Die wichtigsten auf diese Weise erhaltenen Resultate führen wir hier an.

a) Es sei ein unendlich ausgedehnter Leiter durch die beiden Ebenen $x = 0$, $x = a$ begrenzt; wenn die Ebenen die konstanten Temperaturen u_0, u_1 haben, und dieser Zustand so lange gedauert hat, dass der Anfangszustand keinen Einfluss mehr hat, so ist die Bewegung eine stationäre, und die Temperatur wird ausgedrückt durch[31])

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) \frac{x}{a}.$$

b) Ein Stab von der Länge a gebe Wärme durch Strahlung an

30) *Poisson*, „Théorie", p. 265.

31) *Fourier*, „Théorie", chap. VII.

ein Medium ab, welches die konstante Temperatur Null hat, und es gelten sonst die gleichen Bedingungen wie unter a), so ergiebt sich für die Temperatur im Zustand des Gleichgewichts[32])

$$u = \left[u_0 \operatorname{Sin}\left\{\sqrt{\frac{h'}{k}}(a-x)\right\} + u_1 \operatorname{Sin}\left(\sqrt{\frac{h'}{k}}x\right)\right] / \operatorname{Sin}\left(a\sqrt{\frac{h'}{k}}\right).$$

Wenn a unendlich gross gesetzt wird, so erhält man die Lösung

$$u = u_0 e^{-\sqrt{\frac{h'}{k}}x}$$

für den Fall eines unendlich langen Stabes, dessen Ende $x = 0$ die konstante Temperatur u_0 hat, und welcher die an diesem Ende eintretende Wärme durch laterale Strahlung verliert.

c) Es sei die Anfangstemperatur eines Leiters durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

ausgedrückt und die Temperatur der beiden Grenzflächen $x = 0$, $x = a$ Null. Die Lösung[33]) ist in diesem Fall gegeben durch die *Fourier*sche Reihe:

$$u = \sum A_n e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2}t} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

oder

$$u = \frac{2}{a}\sum e^{-\frac{k n^2\pi^2}{a^2}t} \sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}dx'.$$

Wenn a unendlich gross wird, so erhalten wir das *Fourier*'sche Integral:

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-k\alpha^2 t} f(x')\sin\alpha x \sin\alpha x'\, d\alpha\, dx'.$$

d) Für den in c) beschriebenen Leiter ist, wenn die Grenzebenen verschiedene konstante Temperaturen u_0, u_1 haben[34]),

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)\frac{x}{a} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\{u_0 - u_1(-1)^n\} e^{-\frac{k n^2\pi^2}{a^2}t}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$+ \frac{2}{a}\sum e^{-\frac{k n^2\pi^2}{a^2}t}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}dx'.$$

---

32) *Fourier*, „Théorie", chap. I, sect. V. Wegen der experimentellen Bestätigung dieser Formel vgl. Nr. **20** dieses Art.

33) *Fourier*, „Théorie", chap. IX.

34) *Duhamel*, J. éc. polyt. **14**, cah. 22 (1833).

Hier ergiebt sich die Bedeutung der beiden ersten Terme der rechten Seite aus a), die des letzten aus c). Der dritte Term bedeutet diejenige Temperatur, die unser Leiter haben würde, wenn seine Anfangstemperatur gleich $-u_0 - (u_1 - u_0)\frac{x}{a}$ ist und seine Grenzebenen auf der Temperatur Null gehalten werden.

e) Die Lösung für denselben Leiter wie in d), wobei aber jetzt die Temperaturen der Grenzebenen vorgeschriebene Funktionen der Zeit $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ sein mögen, lässt sich nach Gl. (12) aus der Lösung in d) durch Zusammensetzung ableiten; sie lautet[35])

$$u = \frac{2k\pi}{a^2}\sum n \sin\frac{n\pi x}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{kn^2\pi^2}{a^2}(t-t')}\{\varphi_0(t') - (-1)^n\varphi_1(t')\}\,dt'$$

$$+\frac{2}{a}\sum e^{-\frac{kn^2\pi^2}{a^2}t}\sin\frac{n\pi x}{a}\int\limits_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'.$$

Dieser Ausdruck stellt die Temperatur an den Grenzflächen selbst ersichtlich nicht dar, ergiebt aber die richtigen Oberflächenwerte $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, wenn man, von $x > 0$ oder $x < a$ kommend, den Limes von u für $x = 0$ oder $x = a$ bildet.

Setzen wir $\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = \varphi(t)$, so wird der erste Teil des obigen Ausdrucks

$$\frac{4k\pi}{a^2}\sum(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{k(2n+1)^2\pi^2}{a^2}(t-t')}\varphi(t')\,dt'.$$

Diese Formel lässt sich auf den Fall eines dünnen, ringförmigen[36]) Leiters von der Länge a mit konstantem Querschnitt anwenden, unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt $x = 0$ die vorgeschriebene Temperatur $\varphi(t)$ hat, und dass keine laterale Strahlung stattfindet.

f) Die Temperatur eines Ringes, dessen Anfangstemperatur Null ist, von dem ein Querschnitt ($x = 0$) auf der konstanten Temperatur u_0 gehalten wird und der in ein umgebendes Medium von der konstanten Temperatur Null ausstrahlt, ist mit Rücksicht auf den letzten Ausdruck und die Transformation (16) durch die Formel gegeben:

35) *Poisson,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 69; *Fourier,* Par. mém. 8 (1829), p. 581 (Oeuvres 2, p. 145); *Dirichlet,* J. f. Math. 5 (1830), p. 287 (Werke 1, p. 161).

36) Die Wärmeleitung in einem dünnen Ring hat *Fourier* behandelt, siehe „Théorie", chap. IV.

$$u = u_0 \frac{4\pi}{a^2} \sum (2n+1) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \left\{ \frac{1 - e^{-\left[h' + k\frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2}\right]t}}{\frac{h'}{k} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2}} \right\}.$$

g) Betrachten wir nun den Fall eines durch die Ebenen $x = 0$, $x = a$ begrenzten Leiters, bei welchem Strahlung über die beiden Grenzebenen stattfindet (vgl. auch Nr. **23**). Wenn die Temperatur der Umgebung in beiden Fällen Null ist, so lassen sich Lösungen von der Form

$$u = \sum e^{-k\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)$$

anwenden, wo λ eine der unendlich vielen reellen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda a}{2} = + \frac{h}{\lambda}, \quad \operatorname{tg} \frac{\lambda a}{2} = - \frac{\lambda}{h}$$

bezeichnet. *Fourier* hat die Entwicklung einer willkürlich gegebenen Funktion in der Form einer Reihe $\sum(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)$ untersucht[37]). Wenn $f(x)$ die Anfangstemperatur ist, so lautet das Resultat[38])

$$u = 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} e^{-k\lambda_r^2 t} \frac{\lambda_r \cos \lambda_r x + h \sin \lambda_r x}{2h + a(h^2 + \lambda_r^2)} \int_0^a (\lambda_r \cos \lambda_r x' + h \sin \lambda_r x') f(x') dx'.$$

Im Fall $a = \infty$ wird die entsprechende Formel

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x') e^{-k\lambda^2 t} \frac{(\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x)(\lambda \cos \lambda x' + h \sin \lambda x')}{h^2 + \lambda^2} d\lambda\, dx'.$$

Im letzteren Falle braucht man, wenn die Temperatur der Umgebung $\varphi(t)$ anstatt Null ist, nur den Ausdruck

$$\frac{2h}{\pi} \int_0^t dt' \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t') \lambda^2 e^{-k\lambda^2(t-t')} \frac{(\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x)(\lambda \cos \lambda x' + h \sin \lambda x')}{h^2 + \lambda^2} d\lambda\, dx'$$

hinzuzufügen, um die nunmehrige Temperaturverteilung im Innern des Leiters zu erhalten.

h) Es sei ein unendlich ausgedehnter Leiter durch die Ebene $x = 0$ begrenzt und die Temperatur der Grenzebene sei $A \cos(\lambda t + \beta)$, so lässt sich leicht verifizieren oder auch aus der Formel in e) ableiten, dass die Temperatur im leitenden Körper

$$A e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x} \cos\left(\lambda t - x\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} + \beta\right)$$

---

37) *Fourier*, „Théorie", chap. VII.

38) *Poisson*, „Théorie", p. 267, 323. *Poisson* behandelt auch den allgemeinen Fall der Ausstrahlung in einen Raum von beliebiger Temperatur, ebenda p. 264.

ist[39]), vorausgesetzt, dass der Zustand schon so lange gedauert hat, dass alle Spuren der Anfangstemperatur verschwunden sind. Diese Formel findet Anwendung auf die Temperatur der Erde, wobei das in Betracht kommende Stück der Erdoberfläche als eben angesehen wird[40]). Es geht aus der Formel hervor, dass die Amplitude einer Temperaturschwankung nach der Tiefe hin schnell abnimmt und in einer gewissen Tiefe unmerklich wird. Die Maxima pflanzen sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2k\lambda}$ in die Tiefe fort; diese Geschwindigkeit nimmt ab, wenn die Periode wächst; insbesondere pflanzen sich die Tagesmaxima schneller fort als die Jahresmaxima.

Wenn Strahlung an der Grenzfläche $x = 0$ in ein Medium stattfindet, dessen Temperatur $A \cos(\lambda t + \beta)$ ist, so ergibt sich[41]) für die Temperatur in einem Punkt des Leiters

$$Ah\left\{h^2 + h\sqrt{\frac{2\lambda}{k}} + \frac{\lambda}{k}\right\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x} \cos\left(\lambda t - x\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} + \beta - \varepsilon_\lambda\right),$$

wo

$$\operatorname{tg} \varepsilon_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda}}{h\sqrt{2k} + \sqrt{\lambda}}.$$

Wenn die Temperatur der Umgebung $\varphi(t)$ ist und die Anfangstemperatur des Leiters $f(x)$, kann die Temperatur des Körpers durch[42])

$$\frac{h}{\pi}\int_0^\infty dt' \int_0^\infty \frac{\varphi(t')\, e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x} \cos\left\{\lambda(t-t') - \sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x - \varepsilon_\lambda\right\}}{\left\{h^2 + h\sqrt{\frac{2\lambda}{k}} + \frac{\lambda}{k}\right\}^{\frac{1}{2}}}\, d\lambda$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\, e^{-k\varrho^2 t} \frac{(\varrho \cos \varrho x + h \sin \varrho x)(\varrho \cos \varrho x' + h \sin \varrho x')}{h^2 + \varrho^2}\, d\varrho\, dx'$$

dargestellt werden; dieses Resultat ist mit dem am Ende von g) angegebenen äquivalent.

i) Aus dem *Fourier*'schen Integrale folgt, dass die Temperatur in einem Punkt eines unendlich ausgedehnten Körpers, dessen Anfangstemperatur $f(x)$ ist, durch die Formel[43])

---

39) *Poisson*, „Théorie", p. 346.

40) Den entsprechenden Fall der Kugeloberfläche behandelt *Fourier* in der Preisschrift von 1811, Par. mém. 5 (1821/22), p. 153, Oeuvres 2, p. 1.

41) *Poisson*, „Théorie", p 330 und supplément; siehe auch *Kelvin*, Cambr. Math. J. 3 (1842), p. 206 oder „Math. and phys. Papers" 1, p. 10—21.

42) *Poisson*, „Théorie", p. 334.

43) *Fourier*, „Théorie", chap. IX, wo die anderen Formen auch angegeben werden.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{\infty} f(x') e^{-k\alpha^2 t} \cos\alpha(x-x')\,dx'$$

dargestellt ist. Dieses Resultat lässt sich auf die folgenden beiden Formen bringen, von denen die zweite schon vor *Fourier* von *Laplace*[44]) behandelt worden ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}\,dx',$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} f(x+2q\sqrt{kt})\,dq.$$

Im besonderen sei $f(x) = u_1$ für $x > 0$, $f(x) = u_2$ für $x < 0$; dann erhält man aus der zweiten Form für die Temperatur zur Zeit t an der Stelle x:

$$\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_1-u_2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-q^2}\,dq.$$ [45]) [46])

Nimmt man z. B. $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, so wird an der Stelle $x = 0$ dauernd die Temperatur $u = (u_1 + u_2)/2 = 1$ herrschen. Die vorige Formel geht in diesem Falle über in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-q^2}\,dq.$$

6. Die Behandlung der linearen Wärmebewegung nach der Methode der Quellpunkte. Wenn in einem unendlich ausgedehnten leitenden Körper die Anfangstemperatur $\varphi(x)$ überall verschwindet, mit Ausnahme der Umgebung einer einzelnen Ebene x', so ist die Temperatur zur Zeit t im Punkte x

$$\frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}},$$

44) *Laplace*, J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 255 (Oeuvres 13).

45) *Kelvin* hat diese Formel benutzt, um die Zeit abzuschätzen, die verstrichen ist, seit die Erdoberfläche fest wurde, siehe Edinb. Trans. 23 (1862) oder „Math. and phys. Papers“ 3, p. 295; „On the secular cooling of the earth“; auch *Thomson* und *Tait*, Natural philosophy, appendix D.

46) Tafeln zur Berechnung dieses in der Wärmeleitung ebenso wie in der Gastheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtigen Integrales finden sich in jedem grösseren Handbuch über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Näheres hierüber in Encykl. I D 1, Art. *Czuber*, Anm. 123, und I D 2, Art. *Bauschinger*, Nr. 4.

vorausgesetzt, dass $\int \varphi(x')\,dx'$ eine endliche Grenze Q besitzt. Indem wir die Aufmerksamkeit auf eine der x-Achse parallele Gerade beschränken, nennen wir den Punkt x' einen momentanen *Quellpunkt*[47]) von der Stärke Q. Mit $Q = 1$ ergiebt sich die sogenannte Hauptlösung

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}$$

der Differentialgleichung der linearen Wärmebewegung; dieselbe spielt hier eine ähnliche Rolle, wie die Lösung $1/r$ in der gewöhnlichen Potentialtheorie.

Wenn Wärme im Punkt x' kontinuierlich erzeugt wird und die in der Zeit dt' erzeugte Wärmemenge $\varphi(t')dt'$ beträgt, so ist die Temperatur zur Zeit t

$$\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t')}} \varphi(t')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4k(t-t')}}\, dt';$$

in diesem Fall heisst der Punkt x' ein kontinuierlicher Quellpunkt.

Wenn zwei momentane Quellpunkte von der Stärke Q resp. $-Q$ in den Punkten $x' + dx'$, x' existieren, so zwar, dass „ihr Moment“ $Q \cdot dx' = P$ einen endlichen Wert hat, so entsteht im Punkt x' ein *Doppelquellpunkt,* welcher die Temperatur

$$\frac{P}{4\sqrt{\pi}(kt)^{\frac{3}{2}}} (x - x')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}$$

im Punkte x verursacht; die Grösse P heisst die Stärke des Doppelquellpunktes.

Die von einem kontinuierlichen Doppelquellpunkt verursachte Temperatur ist

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \frac{x-x'}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4k(t-t')}} \varphi(t')\, dt',$$

---

47) Der Gebrauch von Quellpunkten in dieser Theorie rührt in der Hauptsache von *Kelvin* her; siehe „Encycl. Britann.“, 9. Aufl., 11, p. 587, oder „Math. and phys. Papers“ 2, p. 41, wo viele Anwendungen gemacht werden. Die sogleich zu nennende „Hauptlösung“ war indessen schon *Poisson* bekannt; Par. mém. 2 (1818), p. 151; Bull. soc. philom. 1822, p. 83. Ihre Deutung als Wirkung eines Quellpunktes findet sich gelegentlich bei *Fourier,* „Théorie“, Nr. 374 und 378.

wo $\varphi(t')$ die Stärke zur Zeit t' bezeichnet; wenn x sich dem Wert x' nähert, so hat dieser Ausdruck den Grenzwert $\frac{1}{2k}\varphi(t)$, falls $x > x'$, oder $-\frac{1}{2k}\varphi(t)$, falls $x < x'$.

Besonders fruchtbar erweist sich die Methode der Quellpunkte im Zusammenhang mit dem *Symmetrieprinzip* (*Spiegelungsprinzip*). Nach diesem Prinzip verfährt man, um die Temperaturfunktion in einem begrenzten Raum zu bestimmen, allgemein gesprochen so, dass man den betr. Raum und zugleich die Temperaturfunktion ins Unendliche fortsetzt. Der Gesamtverlauf der Temperaturfunktion wird durch ihre singulären Punkte bestimmt, welche, wenn in dem ursprünglich gegebenen Raum Quellpunkte vorgeschrieben waren, teilweise aus diesen, teilweise aus Quellpunkten in der Fortsetzung des Raumes bestehen. Die letzteren sucht man in solcher Weise zu bestimmen, dass den Grenzbedingungen an der Oberfläche des Raumes Genüge geleistet wird. In einfachen Fällen, z. B. wenn der Leiter durch eine oder mehrere Ebenen begrenzt wird, lassen sich die erforderlichen neuen Quellpunkte als Spiegelbilder der ursprünglich gegebenen, ohne Anwendung von Rechenoperationen, unmittelbar konstruieren. Insbesondere kann man in solchen Fällen, indem man in dem ursprünglichen Gebiet *einen* Quellpunkt von beliebiger Lage annimmt, die „Green'sche Funktion" v (vgl. Nr. 3) für das betr. Gebiet herstellen. Auch Doppelquellpunkte können an den Grenzebenen auf ähnliche Weise gespiegelt werden wie einfache Quellpunkte.

Übrigens ist das Symmetrieprinzip nicht notwendig an die Vorstellung der Quellpunkte gebunden, in welchem Falle seine Verwendung nur besonders anschaulich wird. Es ergiebt sich dieses schon daraus, dass man jede beliebige Temperaturverteilung als Verteilung von Quellpunkten ansehen kann. In der That handelt *Lamé*, der als Erster das Spiegelungsverfahren in der Wärmeleitungstheorie systematisch anwendete (vgl. Nr. 7g) stets von kontinuierlichen Temperaturverteilungen, die er in den Aussenraum des fraglichen Gebietes symmetrisch fortsetzt.

a) Der nach der positiven Richtung unendlich ausgedehnte Körper sei durch die Ebene $x = 0$ begrenzt, und diese Grenzebene habe die Nulltemperatur; die anfängliche Temperaturverteilung betrachte man als eine Verteilung von Quellpunkten von der Stärke $f(x')\,dx'$ an der Stelle x'. Ihr Spiegelbild besteht aus einer Verteilung von Quellpunkten in der Fortsetzung des Körpers nach der negativen Richtung der x-Achse, so dass im Punkte $-x'$ die Stärke $-f(x')\,dx'$ beträgt. Die Temperaturverteilung zur Zeit t ist durch

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int\limits_0^\infty \left\{e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4kt}}\right\} f(x')\,dx',$$

oder die äquivalente Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty f(2\beta\sqrt{kt}+x)e^{-\beta^2}d\beta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty f(2\beta\sqrt{kt}-x)e^{-\beta^2}d\beta$$

ausgedrückt.

Wenn die Temperatur an der Grenzebene gleich $\varphi(t)$ vorgeschrieben ist, so denken wir uns einen kontinuierlichen Doppelquellpunkt von der Stärke $2k\varphi(t')\,dt'$ an der Grenzebene; die durch denselben verursachte Temperaturverteilung[48]) wird durch

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4k(t-t')}}\,\varphi(t')\,dt',$$

oder den äquivalenten Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-q^2}\varphi\left(t-\frac{x^2}{4kq^2}\right)dq$$

dargestellt.

b) Der Ausdruck

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int\limits_0^a f(x')\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left\{e^{-\frac{(x-x'-2na)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+x'-2na)^2}{4kt}}\right\}dx'$$

stellt die Temperaturverteilung in einem durch $x=0$, $x=a$ begrenzten Körper dar, wenn die Grenzebenen die Temperatur Null haben und $f(x)$ die Anfangstemperatur ist. Hier werden Quellpunkte von der Stärke $f(x')\,dx'$ an den Stellen $x'+2na$, und von der Stärke $-f(x')\,dx'$ an den Stellen $-x'+2na$ in Betracht gezogen.

Wenn die Grenzebene $x=0$ die Temperatur $\varphi(t)$ hat, und die andere Grenzebene die Temperatur Null, so erhalten wir den hinzukommenden Ausdruck durch eine Verteilung von Doppelquellpunkten von abwechselnden Zeichen in den Punkten $2na$, wo n alle positiven und negativen ganzen Zahlwerte hat. Der hinzuzufügende Ausdruck lautet:

---

48) Siehe *Kelvin,* Lond. Proc. R. S. 7 (1855), p. 382, oder „Math. and phys. Papers" 2, p. 61: „On the theory of the electric telegraph".

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t \varphi(t')\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left\{(-1)^n(x+2na)e^{-\frac{(x+2na)^2}{4k(t-t')}}\right\}\frac{dt'}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}.$$

Ein entsprechender Ausdruck ist hinzuzufügen, wenn die Grenzebene $x = a$ nicht die Temperatur 0, sondern eine beliebig wechselnde Temperatur hat. Durch Addition der drei vorangehenden Ausdrücke erhalten wir eine andere Form der in Nr. **5** e) angegebenen Lösung.

c) Wenn einem Ringe von der Länge a und der gleichmässigen Anfangstemperatur Null eine Wärmemenge Q zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = 0$ zugeführt wird und sich im Ringe ausbreitet, so ist die Temperaturverteilung durch

$$\frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+na)^2}{4kt}}$$

ausgedrückt. Diese Formel erhält man, wenn man sich den Ring in fortgesetzter Wiederholung auf eine unendliche Gerade abgebildet denkt und auf dieser eine Verteilung von momentanen Quellpunkten in den Punkten $x = na$, alle von der gleichen Stärke Q, anbringt. Der vorstehende Ausdruck ist, bis auf einen konstanten Faktor, identisch mit einer der in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommenden θ-Funktionen. Löst man dieselbe Aufgabe nach der *Fourier*'schen Methode der Reihenentwickelung und vergleicht die entstehenden Resultate, so erhält man eine wichtige Formel aus der Transformationstheorie der θ-Funktionen[49]).

d) Wenn der von der Ebene $x = 0$ begrenzte Körper von einem Medium umgeben ist, dessen Temperatur durch $\varphi(t)$ ausgedrückt wird, so ist der von der Anfangstemperatur unabhängige Teil der Temperaturverteilung im Körper[50])

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dz\int_{\frac{x+z}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-q^2-hz}\varphi\left\{t-\frac{(x+z)^2}{4kq^2}\right\}dq;$$

hier sind Doppelquellpunkte von der Stärke $he^{-hz}dz\cdot\varphi(t)$ in jedem Punkt $-z$ auf der negativen Seite der x-Axe verteilt. Der vom Anfangszustand abhängige Teil der Temperaturverteilung[51]) ist

49) Vgl. z. B. *H. Poincaré*, „Th. de la propagation de la chaleur", p. 91 ähnlich schon bei *Poisson*, „Théorie", suppl. p. 51.

50) *E. W. Hobson*, Cambr. Proc. 6 (1888), p. 184; eine andere äquivalente Formel hat *Boussinesq* durch eine allgemeine Methode der Integration erhalten; siehe das Buch „Applications des potentiels", Paris 1885, p. 404.

51) *G. H. Bryan*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 7 (1889), p. 246.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int_0^\infty \left\{e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+x')^2}{4kt}}\right\} f(x')\,dx'$$

$$- \frac{2h}{2\sqrt{\pi k t}}\int_0^\infty dz \int_0^\infty e^{-hz-\frac{(x+x'+z)^2}{4kt}} f(x')\,dx'.$$

Dabei wird der Quellpunkt $f(x')\,dx'$ durch eine gleich starke Quelle im Punkte $-x'$ und eine Verteilung von Quellpunkten von der Stärke $-2he^{-hz}dz\,f(x')\,dx'$ in den Punkten $-(x'+z)$ abgebildet.

Im Fall $\varphi(t) = 0$, $f(x) = C$ ist die Temperatur in einem Punkte des sich abkühlenden Körpers

$$\frac{C}{2\sqrt{\pi k t}}\left\{\int_0^\infty \left\{e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+x')^2}{4kt}}\right\} dx' - 2h\int_0^\infty dz \int_0^\infty e^{-hz}\cdot e^{-\frac{(x+x'+z)^2}{4kt}}\,dx'\right\}.$$

Die semikonvergente Reihe[52])

$$\frac{C}{h\sqrt{\pi k t}}\left\{1 - \frac{1}{2h^2kt} + \frac{1\cdot 3}{(2h^2kt)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2h^2kt)^3} + \cdots\right\},$$

welche aus der obigen Formel für $x = 0$ hervorgeht, eignet sich zur Berechnung der Temperatur an der Grenzfläche, wenn t einen nicht zu kleinen Wert hat; für grosse Werte von t ist $\frac{C}{h\sqrt{\pi k t}}$ der approximative Ausdruck für die Oberflächentemperatur.

e) Es sei der unendliche Raum von zwei Substanzen erfüllt, die an der Ebene $x = 0$ zusammenstossen; bei einem gegebenen Anfangszustand lässt sich die Temperaturverteilung zur Zeit t in den beiden Körpern durch die Methode der Spiegelbilder ermitteln. Es genügt als Anfangszustand im besonderen zu Grunde zu legen: eine Quelle im Punkte $x = x'$ (z. B. $x' > 0$), sonst überall die Anfangstemperatur Null.

Wenn k_1, k_2 die Werte der Temperaturleitfähigkeit k und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ diejenigen der Wärmeleitfähigkeit $\varkappa$ in den beiden Substanzen sind, so kann man leicht verifizieren, dass die Lösung[53])

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{e^{-\frac{(x-x')^2}{4k_1 t}} + \frac{\varkappa_1\sqrt{k_2} - \varkappa_2\sqrt{k_1}}{\varkappa_1\sqrt{k_2} + \varkappa_2\sqrt{k_1}}\, e^{-\frac{(x+x')^2}{4k_1 t}}\right\}, \quad x > 0,$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{2\varkappa_1\sqrt{k_2}}{\varkappa_1\sqrt{k_2} + \varkappa_2\sqrt{k_1}}\, e^{-\frac{\left(x-\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}x'\right)^2}{4k_2 t}}, \quad x < 0$$

52) Vgl. wegen ähnlicher asymptotischer Formeln: *Fourier*, „Théorie", Nr. 380; *Poisson*, „suppl.", Note B.

53) *A. Sommerfeld*, Math. Ann. 45 (1894), p. 266; ohne Benützung von Quell-

den beiden Bedingungen

$$\varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad u_1 = u_2$$

an der Grenzebene genügt; die Stärke der erforderlichen Spiegelbilder ist also hier nach Massgabe des Verhältnisses der Temperaturleitfähigkeiten k_1, k_2 und der Wärmeleitfähigkeiten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zu wählen. Die Aufgabe lässt sich auch lösen, wenn die allgemeineren Bedingungen

$$\varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + H_1(u_1 - u_2) = 0, \quad \varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + H_2(u_1 - u_2) = 0$$

an der Grenzebene angenommen werden, oder wenn der Leiter nicht aus zwei, sondern aus drei oder mehr thermisch heterogenen Teilen besteht.

Die Untersuchung der Wärmeleitung in einem Medium von kontinuierlich variabler Leitfähigkeit haben *Sturm* und *Liouville* zu ihren allgemeinen, mathematisch wertvollen Untersuchungen angeregt[54]). Die Differentialgleichung (14) ist dabei durch die allgemeinere (13) zu ersetzen. Der Methode nach schliessen sich diese Untersuchungen an die der vorigen Nummer an, wobei an die Stelle der *Fourier*'schen Entwickelungen nach trigonometrischen Funktionen solche nach *Sturm-Liouville'schen Funktionen* treten.

7. Die Wärmeleitung in zwei oder drei Dimensionen. Elementare Lösungen der Gleichungen der Wärmebewegung für drei oder zwei Dimensionen sind

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} px \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qy \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} rz \cdot e^{-k(p^2+q^2+r^2)t}$$

resp.

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} px \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qy \cdot e^{-k(p^2+q^2)t}.$$

Solche Lösungen lassen sich unmittelbar in denjenigen Fällen verwenden, wo der Körper durch Ebenen begrenzt ist, die den Koordinatenebenen parallel laufen.

a) Der Körper sei durch die drei Ebenen $x = 0$, $y = l$, $y = -l$ begrenzt, und es sei $u = 0$ an den Grenzen $y = \pm l$, $u = U$ an der Grenze $x = 0$. Der stationäre Wärmezustand lässt sich in diesem Fall durch den Ausdruck[55]) darstellen

---

punkten behandelt von *H. Weber,* Gött. Nachr. 1893, p. 722, und Vierteljahrschr. der naturf. Ges. in Zürich, Mai 1871.

54) *J. Liouville,* Gergonne ann. 21 (1830/31), p. 133; *Sturm* und *Liouville,* J. de math. 1, 2, 3 (1836—38). Vgl. auch *M. W. Stekloff,* Ann. de Toulouse (2) 2 (1901), p. 281. Näheres hierüber s. Encykl. II, Art. *Bôcher,* II A 7 a und Art. *Burkhardt,* II A 11.

55) *Fourier,* „Théorie", chap. III, sect. 4, 5.

$$u = \frac{4U}{\pi}\left\{e^{-\frac{\pi x}{2l}}\cos\frac{\pi y}{2l} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3\pi x}{2l}}\cos\frac{3\pi y}{2l} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5\pi x}{2l}}\cos\frac{5\pi y}{2l} - \cdots\right\}$$

oder

$$u = \frac{2U}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\left(\cos\frac{\pi y}{2l} \Big/ \mathfrak{Sin}\,\frac{\pi x}{2l}\right).$$

b) Ein unendlich langer Stab von rechteckigem Querschnitt sei durch die vier Ebenen $x = 0$, $x = a$, $y = \beta$, $y = -\beta$ begrenzt; die Temperatur an den Ebenen $x = 0$, $x = a$ werde durch $f(y)$, $F(y)$ gegeben, und an den Ebenen $y = \pm\beta$ sei vorausgesetzt, dass der Körper an ein Medium grenze, dessen Temperatur Null ist und in welches er Wärme durch Strahlung abgiebt. Die stationäre Temperaturverteilung erfüllt die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - hu = 0 \text{ für } y = -\beta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + hu = 0 \text{ für } y = +\beta, \quad u = f(y) \text{ für } x = 0, \quad u = F(y) \text{ für } x = a.$$

Die Lösung[56]) dieser Aufgabe lautet

$$u = 4\sum \lambda(2\lambda\beta + \sin 2\lambda\beta)^{-1}\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\pi\left\{\mathfrak{Sin}\,\lambda(\pi - x)\int_0^\beta f_1(y)\cos\lambda y\,dy\right.$$
$$\left. + \mathfrak{Sin}\,\lambda x\int_0^\beta F_1(y)\cos\lambda y\,dy\right\}\cos\lambda y$$
$$+ 4\sum \mu(2\mu\beta - \sin 2\mu\beta)^{-1}\,\mathfrak{Cof}\,\mu\pi\left\{\mathfrak{Sin}\,\mu(\pi - x)\int_0^\beta f_2(y)\sin\lambda y\,dy\right.$$
$$\left. + \mathfrak{Sin}\,\mu x\int_0^\beta F_2(y)\sin\mu y\,dy\right\}\sin\mu y;$$

in diesem Ausdruck ist zur Abkürzung gesetzt

$$2f_1(y) = f(y) + f(-y), \qquad 2f_2(y) = f(y) - f(-y),$$
$$2F_1(y) = F(y) + F(-y), \qquad 2F_2(y) = F(y) - F(-y);$$

λ bezeichnet eine positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda\beta\operatorname{tg}\lambda\beta = h\beta,$$

und μ eine positive Wurzel der Gleichung

$$\mu\beta\operatorname{cotg}\mu\beta = -h\beta.$$

c) Die stationäre Wärmebewegung in einem rechtwinkligen Parallelepipedon unter den Bedingungen

56) *Stokes*, „Math. and phys. Papers“ 1, p. 292, wo mehrere ähnliche Aufgaben gelöst werden.

$$u = f_1, \quad x = 0, \qquad u = F_1, \quad x = a,$$
$$u = f_2, \quad y = 0, \qquad u = F_2, \quad y = b,$$
$$u = f_3, \quad z = 0, \qquad u = F_3, \quad z = c$$

lässt sich in ähnlicher Form aus den vorangestellten elementaren Lösungen aufbauen.

d) Die in einem unbegrenzten homogenen (zwei- oder dreidimensionalen) Körper durch einen Quellpunkt von der Stärke Q verursachte Temperatur wird durch[57])

$$\frac{Q}{(2\sqrt{\pi k t})^2} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4kt}} \quad \text{resp.} \quad \frac{Q}{(2\sqrt{\pi k t})^3} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4kt}}$$

ausgedrückt. Wenn Wärme im Punkte $x'y'$ resp. $x'y'z'$ kontinuierlich erzeugt wird, sodass die in der Zeit dt' erzeugte Wärmemenge $\varphi(t')dt'$ beträgt, so ist die Temperatur zur Zeit t

$$\int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi k(t-t')})^2} \varphi(t') e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4k(t-t')}} dt'$$

resp.

$$\int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi k(t-t')})^3} \varphi(t') e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4k(t-t')}} dt'.$$

Wenn der Anfangszustand $u = f(x, y)$ resp. $u = f(x, y, z)$ in einem unbegrenzten Körper gegeben ist, so lautet der Ausdruck, welcher die Temperatur zur Zeit t darstellt,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p^2+q^2)} f(x + 2p\sqrt{kt},\ y + 2q\sqrt{kt})\, dp\, dq$$

resp.

$$\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p^2+q^2+r^2)} f(x + 2p\sqrt{kt},\ y + 2q\sqrt{kt},\ z + 2r\sqrt{kt})\, dp\, dq\, dr.$$

Diese Ausdrücke erhält man dadurch, dass man z. B. im dreidimensionalen Falle den Punkt x', y', z' als Quellpunkt von der Stärke $f(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$ betrachtet. Wenn die Anfangstemperatur nur in einem endlichen, den Punkt (0, 0, 0) umgebenden Teil des Körpers von Null verschieden ist, so wird die Temperatur nach längerer Zeit durch den Ausdruck

57) *Fourier*, „Théorie", chap. IX, sect. 2. Den Temperaturzustand, welcher von einem beweglichen Quellpunkt verursacht wird, hat *Boussinesq*, Par. C. R. 110, p. 1242 untersucht.

$$\frac{A}{8\pi^{\frac{3}{2}}k^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

bestimmt, wo A die zu Anfang vorhandene totale Wärmemenge bezeichnet.

e) Im zweidimensionalen Fall sei ein sonst unendlich ausgedehnter Wärmeleiter durch die Axe $y = 0$ begrenzt; die von einer Doppelquelle im Punkt $(x', 0)$ verursachte Temperatur ist

$$\frac{Py}{8\pi k^2 t^2}e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4kt}},$$

wo P die Stärke des Doppelquellpunktes bezeichnet, dessen Axe zur x-Axe senkrecht liegt. Wenn der Doppelquellpunkt ein kontinuierlicher von der Stärke $2kf(x')\,dx'\,dt'$ ist, so haben wir als Ausdruck für die Temperatur zur Zeit t

$$\frac{1}{4\pi k}f(x')\,dx'\int_0^t \frac{y}{(t-t')^2}e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4k(t-t')}}dt';$$

indem wir dieses Integral auswerten, erhalten wir[58])

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(x-x')^2+y^2}f(x')\,e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4kt}}dx',$$

welcher Ausdruck überall in der x-Axe mit Ausnahme des Elements dx' verschwindet, und in diesem Element den Grenzwert $f(x')$ annimmt. Daraus ersieht man, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-x')^2+y^2}e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4kt}}f(x')\,dx'$$

die Temperatur darstellt, wenn die Anfangstemperatur in der Ebene überall Null ist und die Temperatur der Grenzlinie stets den gegebenen von der Zeit unabhängigen Wert $f(x)$ hat.

Wenn die Anfangstemperatur nicht Null sondern $\varphi(x, y)$ ist, so muss man dem obigen den Ausdruck hinzufügen

$$\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4kt}}-e^{-\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{4kt}}\right]\varphi(x', y')\,dx'\,dy',$$

den man erhält, indem man die Quellpunkte $\varphi(x', y')\,dx'\,dy'$ gegen die Grenzlinie $y = 0$ spiegelt.

f) Wenn ein unendlich ausgedehnter dreidimensionaler Körper

58) *E. W. Hobson,* Lond. Math. Soc. Proc. 19 (1887), p. 279.

durch die Ebene $z=0$ begrenzt ist und von einem Punkte dieser Ebene aus erwärmt wird, so betrachte man einen in der Begrenzungsebene gelegenen und senkrecht gegen diese gerichteten kontinuierlichen Doppelquellpunkt; die von ihm herrührende Temperatur beträgt

$$\frac{Pz}{16\pi^{\frac{3}{2}}k^{\frac{5}{2}}}\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{\frac{5}{2}}}\, e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}{4k(t-t')}} \quad \text{oder} \quad \frac{Pz}{k\pi^{\frac{3}{2}}r^3}\int_{\frac{r}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

wo $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+z^2$. Dieser Ausdruck wird für $x=x'$, $y=y'$ im Limes $z=0$ unendlich gross und verschwindet sonst überall in der Grenzebene $z=0$.

g) Durch die Methode der Spiegelbilder in ihrer Anwendung auf Quellpunkte oder kontinuierliche Temperaturverteilungen lassen sich Aufgaben auch für solche Gebiete lösen, die durch wiederholte Abspiegelung den ganzen Raum einfach und lückenlos erfüllen [59]. *G. Lamé* [60]) hat auf diese Weise Wärmeleitungsaufgaben ausser für das rechteckige Parallelepipedon, das Prisma mit regulär dreieckiger Basis etc., welche ersichtlich bei symmetrischer Wiederholung zu einer regulären Raumeinteilung Anlass geben, auch für einige Tetraeder behandelt („Tetraeder 1/6" und „Tetraeder 1/24"), welche den 6. oder den 24. Teil des Würfels bilden. Diesen Tetraedern ist von *A. Schönflies* [61]) ein weiteres hinzugefügt, welches ebenfalls den Fundamentalbereich einer regulär-symmetrischen Raumeinteilung bildet und für welches daher Wärmeleitungsaufgaben ebenfalls nach dem Spiegelungsverfahren unmittelbar gelöst werden können. Auch wenn Strahlung an den Grenzebenen stattfindet, lässt sich das Spiegelungsverfahren bei solchen Gebieten anwenden [62]).

8. Wärmeleitung in einer Kugel. Wenn die Differentialgleichung der Wärmebewegung auf Polarkoordinaten $r\theta\varphi$ transformiert wird, so nimmt sie die Form an

---

59) Solche Gebiete könnte man mit Benutzung eines funktionentheoretischen Terminus als ebenflächig begrenzte symmetrische „automorphe Fundamentalbereiche" bezeichnen.

60) Siehe seine beiden Bücher „Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes", Paris 1857, „Leçons sur la théorie analytique de la chaleur", Paris 1861. Über die Wärmebewegung in einem Tetraeder siehe *Cotton*, Ann. de Toul. (2) 2 (1900). Eine Arbeit, die noch nicht erwähnt wurde, ist die von *Betti*, „Sopra la determinazione delle temperatura variabili di una lastra terminata", Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 371.

61) *A. Schönflies*, Math. Ann. 34 (1889), p. 172.

62) *G. H. Bryan*, Lond. Math. Soc. Proc. 22 (1891), p. 424.

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}ru\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}ru\right].$$

Betrachten wir zunächst den Fall[63]), dass u unabhängig von θ und φ ist, dann wird unsere Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru),$$

hat also dieselbe Form, wie im Fall der linearen Bewegung, nur dass ru anstatt u die abhängige Variable ist.

Wenn eine Kugel vom Radius c, deren Anfangstemperatur gleich $F(r)$ ist, von einem Medium umgeben ist, dessen Temperatur Null ist, und sich durch Strahlung abkühlt, so muss u die Nebenbedingungen erfüllen:

$$u = F(r) \text{ für } t = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0 \text{ für } r = c.$$

Insbesondere genügt der zweiten dieser Nebenbedingungen der Ausdruck

$$u = e^{-k\lambda^2 t}\frac{\sin\lambda r}{r},$$

falls λ eine Wurzel der Gleichung

$$\lambda c \cos\lambda c = (1 - hc)\sin\lambda c.$$

ist. Setzen wir $\lambda c = \psi$, $hc - 1 = p$, so wird λ durch die Gleichung $\psi\cos\psi + p\sin\psi = 0$ bestimmt; diese Gleichung hat keine komplexen Wurzeln, und wenn $p > -1$ ist, auch keine rein imaginären. Ist $-1 < p < 0$, so liegt eine Wurzel in jedem der Intervalle

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)\cdots;$$

ist $p > 0$, so liegt eine Wurzel in jedem der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)\cdots.$$

Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ lassen sich bequem mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln berechnen.

Entwickelt man nun die Funktion $F(r)$ in der Form

63) Den symmetrischen Fall hat *Fourier* behandelt, siehe „Théorie“, chap. V sowie *Poisson,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 112. Die Konvergenz der Reihen ist von *Cauchy* u. A. sowie neuerdings von *Fugisawa* untersucht, Diss. Strassburg 1885 „Über eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Funktion fortschreitende unendliche Reihe“; auch J. of College of Scienc. of Japan 2 (1889). Im übrigen verweisen wir wegen der Konvergenzfragen auf Encykl. II A 9, Art. *Burkhardt* über Reihenentwickelungen.

$$F(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \lambda_n r}{r} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{\lambda_n^2 + \left(h - \frac{1}{c}\right)^2}{\lambda_n^2 + h^2 - \frac{h}{c}} \int_0^c r F(r) \sin \lambda_n r \, dr,$$

so ergiebt sich für die Temperatur selbst die Formel

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \lambda_n r}{r} \cdot e^{-k\lambda_n^2 t} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{\lambda_n^2 + \left(h - \frac{1}{c}\right)^2}{\lambda_n^2 + h^2 - \frac{h}{c}} \int_0^c r F(r) \sin \lambda_n r \, dr.$$

Nach längerer Zeit wird die Temperatur durch das erste Glied dieser Reihe mit genügender Annäherung dargestellt.

Eine allgemeinere Lösung der Differentialgleichung ist[64])

$$e^{-k\lambda^2 t} V_n(\theta, \varphi) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{r^{\frac{1}{2}}} \quad \text{oder} \quad e^{-k\lambda^2 t} \cdot r^n V_n(\theta, \varphi) \frac{d^n}{d(r^2)^n} \frac{\sin \lambda r}{r},$$

worin $V_n(\theta, \varphi)$ eine Kugelfunktion vom Grade n bedeutet, und $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ die *Bessel*'sche Funktion mit der Ordnungszahl $n + \frac{1}{2}$ ist. Diese Lösung findet Anwendung, wenn die Temperatur an der Oberfläche vorgeschrieben ist, oder wenn der Körper sich durch Ausstrahlung abkühlt. Die gegebene Oberflächen- oder Aussentemperatur ist dabei in eine Reihe nach Kugelfunktionen in der Form $\sum V_n(\theta, \varphi)$ zu entwickeln.

9. Wärmeleitung in einem Kreiscylinder. Hat der leitende Körper die Form eines Kreiscylinders, so verwendet man die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

hierin bedeutet ϱ die Entfernung von der Axe des Cylinders, φ das Azimuth und z die der Axe parallele Koordinate. Dieser Gleichung genügt die Lösung

$$u = e^{-k\lambda^2 t} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \cdot e^{\pm pz} \cdot J_m\left(\varrho\sqrt{p^2 + \lambda^2}\right),$$

wo $J_m(x)$ die *Bessel*'sche Funktion m^{ter} Ordnung bezeichnet, welche der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) u = 0.$$

64) *Poisson,* „Théorie", p. 363; *Laplace,* Connaissance des temps 1823, p. 245; Mécanique céleste, livre 11, chap. 4, 1823; *Duhamel,* J. éc. polyt. 14, chap. 22, p. 36. Siehe auch *Langer,* Habilit.-Schr. Jena (1875) „Über die Wärmeleitung in einer homogenen Kugel"; *K. Baer,* Diss. Halle 1878 „Über die Bewegung der Wärme in einer homogenen Kugel".

Zunächst werde ein Cylinder von unendlicher Länge und vom Radius a betrachtet; die Anfangstemperatur sei unabhängig von z und φ und der Cylinder von einem Medium umgeben, welches die Temperatur Null hat[65]); in diesem Fall gebrauchen wir die Lösung

$$u = e^{-k\lambda^2 t} J_0(\lambda \varrho).$$

Die Grenzbedingung laute $hu + \frac{\partial u}{\partial \varrho} = 0$; die Konstante λ lässt sich durch die Gleichung

$$h J_0(\lambda a) + \lambda J_0'(\lambda a) = 0$$

bestimmen. *Fourier* hat nun gezeigt, dass diese Gleichung unendlich viele reelle positive Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ besitzt, und dass eine willkürlich gegebene Funktion $F(\varrho)$ sich in eine Reihe

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} A_r J_0(\lambda_r \varrho)$$

entwickeln lässt; man findet

$$A_r = \frac{\int_0^a F(\varrho)\, J_0(\lambda_r \varrho)\, \varrho\, d\varrho}{\frac{1}{2} a^2 \{J_0(\lambda_r a)\}^2 \left(1 + \frac{4h^2}{\lambda_r^2}\right)}$$

Identifiziert man die hier vorkommende willkürliche Funktion $F(\varrho)$ mit der Anfangstemperatur des Cylinders, so ist die Temperatur zur Zeit t

$$u = \sum_{r=1}^{r=\infty} A_r e^{-k\lambda_r^2 t} J_0(\lambda_r \varrho).$$

Im Falle die Anfangstemperatur sowohl von ϱ als von φ abhängt, sowie im Falle eines Cylinders von endlicher Länge, kann die Lösung aus den obigen allgemeineren Lösungen zusammengesetzt werden.

Die Hauptlösung (vgl. Nr. 6) im Fall von zwei Dimensionen

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k t})^2} e^{-\frac{R^2}{4kt}}$$

ist mit dem Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 k t} \lambda\, d\lambda \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(\lambda \varrho) J_m(\lambda \varrho') \cos m(\varphi - \varphi')$$

äquivalent; hierin bedeutet R die Entfernung

---

65) *Fourier,* „Théorie", chap. VI, wo die Funktion J_0 auftritt. Die Funktionen J_m zuerst bei *Poisson,* J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 239, 335. Siehe auch *Melchior,* Programm Realgymn. Fulda 1884—85.

$$\{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')\}^{\frac{1}{2}}$$

der beiden Punkte (ϱ, φ), (ϱ', φ').

Für eine ebene (*Riemann*'sche) Fläche mit einem r-fachen Windungspunkt[66]) lautet die entsprechende Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 k t} \lambda \, d\lambda \sum_{-\infty}^{\infty} J_{\frac{m}{r}}(\lambda\varrho) J_{\frac{m}{r}}(\lambda\varrho') \cos\frac{m}{r}(\varphi - \varphi').$$

Im Falle $r = 2$ findet man hieraus durch Summation der Reihe

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\sqrt{\pi k t})^2} e^{-\frac{R^2}{4kt}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\varrho\varrho'}{kt}}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Diese Lösung lässt sich auf den Fall anwenden, dass die Ebene (x, y) längs eines vom Nullpunkte auslaufenden Halbstrahles aufgeschnitten ist und die Wärmebewegung in dieser aufgeschnittenen Ebene untersucht werden soll.

10. Wärmeleitung in Körpern von verschiedenen speziellen Formen. Die Aufgabe, den stationären Wärmezustand eines Ellipsoides zu ermitteln, dessen Oberfläche auf gegebener Temperatur erhalten wird, hat *G. Lamé*[67]) unter Zugrundelegung der *elliptischen Koordinaten* zuerst gelöst. Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Oberfläche darstellt, sind diese Koordinaten im Punkte (x, y, z) die drei positiven Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - e^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - f^2} = 1,$$

worin

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad f^2 = a^2 - c^2;$$

66) *A. Sommerfeld*, Math. Ann 45 (1894), p. 276.

67) *G. Lamé*, J. de math. 4 (1839), p. 126. Andere Arbeiten von *Lamé*, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, befinden sich in den sechs ersten Bänden und im Band 8 desselben Journals. Eine Übersicht über die ersten Resultate Ann. Chim. Phys. 53 (1833), p. 190. Die erste Einführung der isothermen Koordinaten geschah in einem Mémoire in den Savans étrangers 5, 1838, abgedruckt J. de math. 2 (1837), p. 147; siehe auch J. éc. polyt. cah. 23 sowie die beiden Werke „Leçons sur les fonctions inverses", Paris 1857, und „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications", Paris 1859.

bezeichnet man diese Koordinaten durch ϱ, μ, ν, so genügen sie im Inneren des Ellipsoids den Bedingungen

$$a \geqq \varrho \geqq f, \quad f \geqq \mu \geqq e, \quad e \geqq \nu \geqq 0.$$

Wenn man die drei *elliptischen Integrale*

$$\xi = \int_f^\varrho \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - f^2}\sqrt{\varrho^2 - e^2}}, \quad \eta = \int_e^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - e^2}\sqrt{f^2 - \mu^2}},$$

$$\zeta = \int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{f^2 - \nu^2}\sqrt{e^2 - \nu^2}}$$

einführt, so nimmt die Differentialgleichung der Wärmebewegung die Form an

$$(\mu^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\varrho^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\varrho^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Es wird nun gezeigt, dass diese Gleichung durch das Produkt

$$E(\varrho)\, E(\mu)\, E(\nu)$$

erfüllt wird, wo $E(\varrho)$ eine ganze Funktion vom Grade n in ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - e^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - f^2}$ ist, und $E(\mu)$, $E(\nu)$ dieselben Funktionen von μ, $\sqrt{\mu^2 - e^2}$, $\sqrt{f^2 - \mu^2}$, resp. ν, $\sqrt{f^2 - \nu^2}$, $\sqrt{e^2 - \nu^2}$ sind. Die Funktion E heisst eine *Lamé'sche Funktion*, und $E(\varrho)$ erfüllt die Gleichung

$$(\varrho^2 - e^2)(\varrho^2 - f^2)\frac{d^2 E}{d\varrho^2} + \varrho(2\varrho^2 - e^2 - f^2)\frac{dE}{d\varrho} + [(e^2 + f^2)p - n(n+1)\varrho^2]\, E = 0,$$

worin p einen Parameter bezeichnet, der so zu bestimmen ist, dass die vorstehende Gleichung eine Lösung der erwähnten Art besitzt, nämlich eine ganze Funktion des n^{ten} Grades in ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - e^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - f^2}$. Es wird weiter gezeigt, dass es $2n + 1$ reelle verschiedene Werte von p giebt, welche der obigen Bedingung genügen, und dass daher $2n + 1$ verschiedene Funktionen $E(\varrho)$ des Grades n existieren. Dementsprechend hat man $2n + 1$ verschiedene Produkte $E(\varrho)\, E(\mu)\, E(\nu)$ zur Verfügung, die der Gleichung der Wärmeleitung Genüge leisten, und welche eindeutig und endlich im ganzen Ellipsoid sind. (Näheres über *Lamé*'sche Funktionen in Bd. II der Encykl.)

Die Aufgabe des stationären Wärmeflusses wird nun dadurch gelöst, dass die gegebene Oberflächentemperatur in eine (im allgemeinen unendliche) Summe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=2n+1} A_{n,m}\, E_{n,m}(\mu)\, E_{n,m}(\nu)$$

entwickelt wird; der Temperaturzustand in einem jeden Punkte im Innern des Ellipsoids wird alsdann durch den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=2n+1} A_{n,m}\frac{E_{n,m}(\varrho)}{E_{n,m}(a)}E_{n,m}(\mu)\,E_{n,m}(\nu)$$

dargestellt.

Die Lösung des Problems der nicht stationären Wärmebewegung in einem Ellipsoid hat *Mathieu*[68]) auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert. Im Fall des Rotationsellipsoids[69]) reduziert sich das *Lamé*'sche Produkt auf das Produkt einer trigonometrischen Funktion und zweier Kugelfunktionen. Die nicht stationäre Wärmebewegung in einem Rotationsellipsoid hat *C. Niven*[70]) behandelt.

Die Bestimmung der Wärmebewegung in einem elliptischen Cylinder kommt auf die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\lambda^2 u=0$$

hinaus; setzt man $x=\mathfrak{Cos}\,\omega\cos\varphi$, $y=\mathfrak{Sin}\,\omega\sin\varphi$, so wird diese Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\lambda^2(\cos^2\varphi-\mathfrak{Cos}^2\,\omega)u=0.$$

Eine Lösung derselben ist $u=\mathsf{E}(\omega)\,\mathsf{E}(\varphi)$, wo $\mathsf{E}(\omega)$, $\mathsf{E}(\varphi)$ den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\mathsf{E}}{d\omega^2}-(\lambda^2\,\mathfrak{Cos}^2\,\omega-p)\mathsf{E}=0,\quad \frac{d^2\mathsf{E}}{d\varphi^2}+(\lambda^2\cos^2\varphi-p)\mathsf{E}=0$$

Genüge leisten; der Parameter p muss dabei so bestimmt werden, dass $\mathsf{E}(\varphi)$ in φ mit der Periode 2π periodisch wird. Diese Funktionen heissen *Funktionen des elliptischen Cylinders*[71]); durch Zusammensetzung der Produkte $e^{-\alpha t}\cos mz\cdot\mathsf{E}(\omega)\,\mathsf{E}(\varphi)$ mit $\alpha=k(m^2+\lambda^2)$ kann der Temperaturzustand unter gegebenen Bedingungen theoretisch

---

68) *E. Mathieu*, Cours de physique, p. 269.

69) *G. Lamé*, J. de math. 4 (1839), p. 351; *Heine*, J. f. Math. 26 (1843), p. 185; *J. Liouville*, J. de math. 11 (1846), p. 217, 261.

70) *C. Niven*, Lond. Phil. Trans. 171 (1879), p. 117. Für den Fall des Rotationsparaboloids siehe *K. Baer*, Diss. Halle 1881.

71) *E. Mathieu* hat den ersten Versuch gemacht, diese Gleichung zu lösen, J. de math. (2) 13 (1868), p. 137—203; auch „Cours de physique mathématique", 1873, p. 122—164. In *Heine*'s „Kugelfunktionen" 1, p. 401 und 2, p. 202 findet man eine Behandlung dieser Funktionen. Siehe auch *Besser*, Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 257, 305; *Maclaurin*, Cambr. Phil. Trans. 17 (1899), p. 41; *Lindemann*, Math. Ann. 22 (1883), p. 117.

ermittelt werden. Die entsprechenden Funktionen für den parabolischen Cylinder hat *H. Weber*[72]) entwickelt.

Der stationäre Temperaturzustand in einem von zwei nicht konzentrischen Kugeln begrenzten Raum wurde von *C. Neumann*[73]) untersucht. Derselbe Forscher[74]) hat auch die nicht-stationäre Wärmebewegung in demselben Falle behandelt; es kommen dabei die sogenannten peripolaren Koordinaten und gewisse Kugelfunktionen zur Anwendung, deren Grad die Hälfte einer ganzen Zahl ist. *Mathieu*[75]) hat sich mit dem Wärmeproblem in einem von zwei nicht-konzentrischen Kreiscylindern begrenzten Gebiet und in Cylindern mit lemniskatischem Querschnitt beschäftigt.

11. Theorie des Schmelzens und des Gefrierens bei Wärmeleitung. Man kann die Wärmeleitungstheorie auf eine Art von Problemen anwenden, bei denen die Wärmebewegung eine Änderung im Aggregatzustand des Leiters verursacht[76]).

Wenn ein Eisprisma durch die beiden Ebenen $x = 0$, $x = c$ begrenzt ist, und die Temperatur der unteren Ebene $x = 0$ konstant gleich $U (> 0)$ erhalten wird, so wird bei der Wärmebewegung das Eis allmählich in Wasser verwandelt, und es handelt sich darum, die Höhe h des geschmolzenen Teils des Prismas zu irgend einer Zeit t zu bestimmen, nachdem das Schmelzen angefangen hat. Es bezeichne λ die Schmelzwärme der Volumeneinheit des Eises, so wird in der Zeit dt die Wärmemenge $-\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} dt$ darauf verwendet, das Eis auf einer Länge dh des Prismas in Wasser zu verwandeln, wobei die Temperatur zunächst den Nullwert beibehält; wir erhalten also

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} dt = \lambda\, dh, \quad \text{für } x = h.$$

Nun genügt der Ausdruck

---

72) *H. Weber,* Math. Ann. 1 (1869), p. 31, siehe auch *K. Baer,* Progr. Realgymn. Küstrin, 1883.

73) *C. Neumann,* Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht konzentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Halle 1862. Vgl. *Heine,* „Kugelfunktionen" 2, p. 261. Siehe auch *Frosch,* Zeitschr Math. Phys. 17 (1872), p. 498.

74) *C. Neumann,* Theorie der Elekrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Halle 1864. Siehe auch *Hicks,* „Toroidal functions", Lond. Phil. Trans. 172 (1882), p. 609.

75) *E. Matthieu,* Par. C. R. 68 (1869), p. 590; J. de math. (2) 14 (1869), p. 65.

76) *L. Saalschütz,* Astr. Nachr. Nr. 1321 (1861), § 12 ff.; *J. Stefan,* Wien. Ber. 98[2a] (1889), p. 473, 616, 965 und Monatshefte f. Math. u. Phys., 1. Jahrg. 1890, p. 1.

$$u = A\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\alpha} e^{-z^2}\,dz$$

einerseits der partiellen Differentialgleichung der Wärmebewegung, andererseits lässt er sich bei geeigneter Bestimmung von A und α den Nebenbedingungen unseres Problems anpassen, wobei das vom Wasser erfüllte Gebiet durch die Bedingung $0 \leqq \frac{x}{2\sqrt{kt}} \leqq \alpha$ zu umgrenzen ist. Da $u = U$ für $x = 0$ und $u = 0$ für $x = h$, so ist zu setzen:

$$h = 2\alpha\sqrt{kt}, \qquad U = A\int\limits_{0}^{\alpha} e^{-z^2}\,dz,$$

und die obige Bedingung für die Stelle $x = h$ giebt

$$A\varkappa e^{-\alpha^2} = 2k\alpha\lambda.$$

Die Höhe $h = 2\alpha\sqrt{kt}$ lässt sich daher aus der Gleichung

$$\alpha e^{\alpha^2}\int\limits_{0}^{\alpha} e^{-z^2}\,dz = \frac{\varkappa U}{2k\lambda}$$

bestimmen; es ist dies eine transcendente Gleichung für α, deren Wurzeln mit Hülfe von numerischen Tafeln[77]) berechnet werden können.

Wenn die Ebene $x = 0$ eine gegebene unter dem Gefrierpunkt liegende Temperatur U_1 hat, und in unendlicher Tiefe die über dem Gefrierpunkt liegende Temperatur U_2 gleichfalls gegeben ist[78]), so dringt der Frost in das Wasser allmählich vor; die Geschwindigkeit, mit welcher dieses geschieht, lässt sich alsdann durch eine ähnliche Methode bestimmen, wie die soeben angedeutete.

12. Wärmeleitung und innere Reibung in einer bewegten Flüssigkeit. Sind die Teilchen einer Flüssigkeit in relativer Bewegung, so wird Wärme durch die innere Reibung erzeugt und in der Flüssigkeit fortgeleitet. In diesem Fall[79]) muss noch besonders festgesetzt werden, was man unter der Temperatur in einem Punkt der Flüssigkeit zu verstehen hat, da die Temperatur hier nicht auf die gleiche Weise gemessen werden kann, wie bei einem Körper, dessen Teilchen

77) Vgl. Anm. 46.

78) Die Lösung dieser Aufgabe befindet sich im *Riemann-Weber*'schen Buch 2, p. 118—122.

79) Diese Theorie hat *Kirchhoff* aufgestellt, siehe seine „Vorlesungen über die Theorie der Wärme", Leipzig 1894, p. 113.

sich in relativer Ruhe befinden. Die Temperatur wird nun durch den Satz definiert, dass die Energie einer bewegten unendlich kleinen Flüssigkeitsmasse gleich ist ihrer lebendigen Kraft plus der Energie, die sie in der Ruhe bei gleicher Dichtigkeit und gleicher Temperatur haben würde. Es sei ϱ die Dichtigkeit, u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens an der Stelle (x, y, z), T die Temperatur daselbst, γ_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, M eine Konstante der Flüssigkeit, die wir „Dilatationswärme" nennen können und die das Verhältnis $dQ/d\varrho$ bei konstant gehaltener Temperatur bedeutet; dann besteht die Gleichung

$$\begin{aligned}-M\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\gamma_v\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right\}\\+\frac{1}{\varrho}\Big[\mu\Big\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\Big\}-2\mu'\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\Big],\end{aligned}$$

worin μ, μ' zwei von der Beschaffenheit der Flüssigkeit (Viskosität und Kompressibilität) abhängende Konstanten bedeuten; ist die Flüssigkeit inkompressibel, so verschwindet μ' aus der Gleichung; $\varkappa$ bezeichnet wie sonst die Wärmeleitungsfähigkeit.

An der Grenzfläche, wo zwei Flüssigkeiten, oder eine Flüssigkeit und ein fester Körper sich berühren, müssen Grenzbedingungen durch besondere Voraussetzungen aufgestellt werden; diese bestehen zum Teil aus Annahmen über die Druckkomponenten in den beiden Substanzen und die Art und Weise, wie sie von der relativen Bewegung der beiden Substanzen an der Grenzfläche abhängen. Die Temperaturbedingungen, die an der Grenzfläche zu erfüllen sind, lauten

$$T=T',$$

$$\varkappa\frac{\partial T}{\partial n}-\varkappa'\frac{\partial T'}{\partial n}=-\lambda\{(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2\},$$

worin λ eine Konstante, welche die sogenannte äussere Reibung misst, und dn ein zur Grenzfläche senkrechtes Linienelement bezeichnet. Die Theorie der Wärmeleitung in Gasen hat ihre Stelle in der kinetischen Gastheorie.

13. Diffusion. Wenn sich zwei verschiedene Flüssigkeiten oder Gase in demselben Gefässe befinden, und die beiden Substanzen anfangs getrennt waren, so durchdringen sie sich allmählich, so dass nach theoretisch unendlicher Zeit eine homogene Mischung der beiden Substanzen entstanden ist; dieser Vorgang heisst Diffusion.

Die Theorie der Diffussion zweier Flüssigkeiten, von welchen die eine etwa eine Salzlösung und die andere das Lösungsmittel ist, hat zuerst *Fick*[80]) durch die Annahme zu begründen gesucht, dass die freie Diffusion (d. h. eine solche, die ohne Scheidewand vor sich geht) nach demselben Gesetz stattfindet, wie die Verbreitung der Wärme in Leitern. Wenn das Gefäss ein cylindrisches ist, mit vertikaler Axe, und die Flüssigkeiten übereinander geschichtet sind, so befinden sie sich in allen Punkten einer Horizontalebene im gleichen Zustand prozentualer Mischung. Es wird angenommen, dass die Salzmenge dS, die in der Zeit dt einen Horizontalschnitt F durchsetzt, proportional mit $F dt$ und mit dem Konzentrationsgefälle $\partial u/\partial x$ an der betreffenden Stelle sei; unter der Konzentration u versteht man dabei die Gewichtsmenge Salz in der Volumeinheit der Lösung; die Koordinate x ist in einem cylindrischen Gefäss parallel der Axe desselben zu messen. Man erhält unter dieser Annahme

$$dS = kF\frac{\partial u}{\partial x}dt,$$

worin die „Diffusionskonstante“ k von der Natur des Salzes und des Lösungsmittels abhängt. Der Salzzuwachs in einer Schicht von der Dicke dx während der Zeit dt wird entsprechend

$$kF\frac{\partial^2 u}{dx^2}dt\,dx.$$

Da dieser Zuwachs andererseits gleich der zeitlichen Konzentrationsänderung $\frac{\partial u}{\partial t}dt$ multipliziert in das Volumen $F dx$ der Schicht ist, so erhalten wir dieselbe Gleichung wie in der Theorie der linearen Wärmeleitung, nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die mathematische Behandlung des beschriebenen Diffusionsvorganges ist daher im wesentlichen ähnlich dem der Wärmeleitung; nur sind die Oberflächenbedingungen andere, da sie vom osmotischen Druck abhängen.

Dass der *Fick*'sche Ansatz annähernd richtig ist, hat *H. F. Weber*[81]) nachgewiesen. Eine Molekulartheorie der Diffusion, auf dem Begriff des osmotischen Drucks basiert, hat *Nernst*[82]) aufgestellt. *Maxwell*[83]) leitete aus der kinetischen Gastheorie ab, dass die freie Diffusion der Gase sich durch dieselbe Differentialgleichung wie bei den Flüssig-

---

80) Ann. Phys. Chem. 49 (1855), p. 59. Über Diffusion siehe auch *Maxwell*'s „Theory of heat“, p. 273.

81) Ann. Phys. Chem. 7 (1879), p. 469, 536.

82) Zeitschr. f. phys. Chemie 2 (1888), p. 611.

83) Phil. Mag. (4) 35 (1868), p. 129, 185.

keiten darstellen lässt; dasselbe hat *Stefan*[84]) auf Grund der Prinzipien der Hydrodynamik gezeigt. Auch hat *Ste~~ph~~an* f die Diffusion eines Gases durch eine Flüssigkeit behandelt.

Eine der Wichtigkeit des Gegenstandes angemessene, ausführliche Behandlung der Diffusion muss an dieser Stelle unterbleiben; vgl. dazu den Art. *Van't Hoff* über physikalische Chemie.

II. Physikalischer Teil (Messmethoden).

14. Zweck der Messungen. Mit den ersten Messungen, welche *Biot*, *Fourier* und deren Nachfolger über den Vorgang der Wärmeleitung anstellten, bezweckten ihre Urheber eine Prüfung der formalen Theorie der Wärmeleitung und zugleich eine Orientierung über das Verhalten der verschiedenen Substanzen bei dem Durchgang von Wärme. Dieser doppelte Zweck ist heute nicht mehr in gleicher Weise massgebend.

Die formale Theorie, d. h. die ihr zu Grunde liegende *Biot-Fourier*'sche Voraussetzung über die Proportionalität zwischen Wärmefluss und Temperaturgefälle, ist durch zahlreiche und nach sehr verschiedenen Methoden durchgeführte Versuche in weiten Grenzen sicher gestellt. Auch die mathematische Durchführung ist so weit fortgeschritten, dass die formale Wärmeleitungstheorie als eine in der Hauptsache abgeschlossene Disziplin angesehen werden kann.

Ein erhöhtes Interesse hat dafür der andere Zweck erhalten, in den gemessenen Wärmeleitungskonstanten charakteristische Eigenschaften bestimmter Substanzen zu gewinnen. Während nämlich die formale Wärmeleitungstheorie für den Fortschritt der allgemeinen Physik, d. h. für die Erkenntnis des Zusammenhanges der Erscheinungen nicht direkt, sondern nur als ein allerdings sehr vorzügliches Hülfsmittel Bedeutung hat, sind heute nicht nur für Gase in der kinetischen Theorie, sondern auch für Metalle in der Elektronentheorie Anfänge zu tiefer begründeten Vorstellungen über die Natur der Wärmeströmung enthalten, die ein ausgedehntes und sicheres Zahlenmaterial wünschenswert machen. Für diesen Zweck sind nun die meisten älteren Beobachtungen nicht zu verwenden, weil nur selten die Definition der Substanz ausreichend gegeben ist. Erst in neuester Zeit hat sich herausgestellt, dass die Wärmeleitung der Metalle gegen geringe Beimengungen eine ebensolche Empfindlichkeit zeigt, wie sie für das elektrische Leitvermögen seit den Versuchen *Matthiessen*'s

84) Wien. Ber. 77 (1878), p. 371.