bei welcher eine nicht umkehrbare Änderung in der Verteilung einer gewissen Art molekularer kinetischer Energie unter dem Bild einer Wärmeströmung aufgefasst wird. Die Erzeugung der Wärme durch Reibung und die Absorption von Wärme- oder Lichtstrahlen sind ebenfalls dissipative Vorgänge; die Dissipation tritt auch bei der Diffusion der Gase auf, einer Erscheinung, die sich nach den Prinzipien der kinetischen Gastheorie erklären lässt. Der Hauptgegenstand, der in diesem Artikel behandelt wird, ist die Wärmeleitung; die Verfolgung der anderen zahlreichen dissipativen Prozesse gehört in die verschiedenen Einzelgebiete der Physik und Chemie, welche sich mit diesen Prozessen befassen.

Ihrer mathematischen Behandlung nach weisen die verschiedenen dissipativen Vorgänge eine gewisse „Familienähnlichkeit" auf, so dass ihre Theorie mehr oder minder enge an die Theorie der Wärmeleitung als den am längsten und besten bekannten Typus der dissipativen Prozesse angeschlossen werden kann. Dies gilt namentlich von der Elektrizitätsleitung und der Diffusion, welche letztere hier anhangweise zur Sprache kommen wird.

2. Die Grundlagen der Theorie der Wärmebewegung. Die der Hauptsache nach von *Fourier* begründete[3]) Theorie der Wärmebewegung befasst sich mit der aus der Erfahrung bekannten Thatsache, dass zwei Teile desselben Körpers, oder zwei mit einander in Berührung stehende Körper von verschiedener Temperatur, den bestehenden Temperaturunterschied allmählich ausgleichen, indem der wärmere Körper oder Körperteil kühler und der kühlere wärmer wird. Diese Erscheinung stellt man sich als eine Bewegung der Wärme vom wärmeren zum kühleren Körper vor. Man unterscheidet drei wesentlich verschiedene Vorgänge, durch welche der Übergang der Wärme von einer wärmeren an eine kühlere Stelle geschehen kann: 1) Strahlung, wenn die Körper von einander getrennt sind und das dazwischen liegende Medium von der Art ist, die man diatherman nennt; 2) Leitung, wenn die Körper sich berühren oder wenn die Wärmebewegung in einem athermanen Körper stattfindet; 3) Konvektion, wo in einem flüssigen Körper Strömungen der Materie durch die Temperaturunterschiede verursacht werden.

---

3) Als Vorgänger *Fourier*'s ist namentlich *J. B. Biot* zu nennen, der für den Fall des stationären Wärmeflusses den heutzutage meist nach *Fourier* benannten Ansatz bereits vollständig entwickelt hatte. Vgl. Mémoire sur la propagation de la chaleur, lu à la classe des sciences math. et phys. de l'Institut national (Bibl. britann. Sept. 1804, 27, p. 310), sowie Traité de phys. 4, p. 669, Paris 1816.

Der mechanischen Wärmelehre gemäss werden die Wärmeerscheinungen in einem athermanen Körper auf Bewegungen der Moleküle oder der Atome zurückgeführt; die Wärmeleitungstheorie wäre also innerhalb der mechanischen Naturauffassung als Theorie der Fortpflanzung der betreffenden molekularen Bewegungen zu klassifizieren; mit etwaiger Ausnahme der gasförmigen Körper reichen aber unsere gegenwärtigen Kenntnisse über die molekulare Beschaffenheit der Körper nicht aus, um einen solchen Weg gangbar erscheinen zu lassen. Als *Fourier*[4]), *Poisson*[5]) und andere die Wärmeleitungstheorie begründeten, existierte die mechanische Wärmetheorie im modernen Sinn noch nicht, und trotzdem diese seither eine in vielen Hinsichten recht erfolgreiche Entwickelung durchgemacht hat, sind wir doch nicht im Stande, eine rein mechanische Theorie der Wärmeleitung in festen oder in flüssigen Körpern aufzustellen. (Höchstens könnte man in diesem Zusammenhange darauf hinweisen, dass die „Hauptlösung" der Wärmleitungsgleichung (s. Nr. **6** und **7** dieses Art.) aufs Lebhafteste an die Verteilungsgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung erinnert, auf welche ja fraglos die Fortpflanzung der Molekularbewegungen zu basieren sein würde.) Dementsprechend hat man in dieser Theorie verschiedene Hilfsbegriffe nötig, wenn man die betreffenden Erscheinungen überhaupt einer mathematischen Behandlung zugänglich machen will, d. h. wenn man viele Fälle einheitlich zusammenfassen und allgemeine Sätze aufstellen will. Ausserdem werden in der mathematischen Behandlung der Erscheinungen verschiedene Voraussetzungen gemacht[6]), welche sogar bei mässigen

4) *Fourier*'s Schriften über die Wärmetheorie nehmen ihren Anfang in einem im Jahre 1808 im Bull. des Sci. veröffentlichten Auszug aus einer im vorangehenden Jahre eingereichten Denkschrift (vgl. Oeuvres 2, p. VII). Im Jahre 1811 fasste *Fourier* eine Abhandlung mit dem Titel „Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides" ab; dieselbe wurde aber erst in den Jahren 1824, 1826 in Par. Mém. 4, 5 veröffentlicht; weitere Schriften erschienen in Par. Mém. 7 (1827); 8 (1829); 12 (1833). Eine Reihe Schriften über die Wärmetheorie befinden sich auch in Ann. Chim. Phys. 3 (1816); 4 (1817); 6 (1817); 13 (1820); 27 (1824); 28 (1825); 37 (1828). In seinem im Jahre 1822 erschienenen Werke „Théorie analytique de la chaleur" hat *Fourier* den mathematischen Teil seiner Untersuchungen über Wärmeleitung zusammengefasst; seinen Plan, eine ergänzende „théorie physique" zu schreiben, hat er nicht ausgeführt.

5) *Poisson*'s Untersuchungen sind in seinem Werke „Théorie mathématique de la chaleur", Paris 1835, enthalten. Siehe auch J. éc. polyt. 12, cah. 19 (1823).

6) Eine Kritik der der *Fourier-Poisson*'schen Wärmeleitungstheorie zu Grunde liegenden Voraussetzungen giebt *W. Hergesell,* Ann. Phys. Chem. 15 (1882), p. 19; daselbst wird die Dehnung eines leitenden Körpers unter gewissen Voraussetzungen in Betracht gezogen. Ansätze zu einer solchen Kritik schon

Temperaturänderungen nur annähernd der wirklichen Erfahrung entsprechen; der Grad, in welchem die theoretischen Resultate den wirklichen Vorgängen entsprechen, kann nur durch Beobachtungen bestimmt werden; dass wir thatsächlich in vielen Fällen die erforderlichen Mittel besitzen, solche Vergleiche auszuführen, und den physikalischen Wert der höchstens nur annähernd richtigen mathematischen Theorie zu schätzen, wird im zweiten Teile dieses Artikels dargethan werden.

Der erste Begriff mit dem wir es zu thun haben, ist der der *Temperatur*, als Grösse betrachtet. Begrifflich wird die Temperatur in einem jeden Punkt eines Körpers durch ein unendlich kleines Thermometer ohne Wärmekapazität gemessen, welches an den betreffenden Punkt gebracht wird; die Temperatur in einem Punkt wird als Funktion sowohl der Lage des Punktes als auch der Zeit betrachtet.

Andere Begriffe, welche eine Hauptrolle in der Theorie spielen, sind die der *Wärmemenge* und die der *spezifischen Wärme.*

In der mechanischen Wärmelehre wird eine *Wärmemenge* durch eine Energiegrösse gemessen; wenn sie einem Körper oder Körperteilchen zugeführt wird, so wird ein Teil davon auf Temperaturerhöhung verwandt, der andere Teil wird aber in irgend eine andere Energieform verwandelt, oder auf Arbeitsleistung verbraucht, indem das Volumen des Körpers geändert wird. In der Wärmeleitungslehre hingegen wird vorläufig angenommen, dass, wenn eine Wärmemenge einem Körperteilchen zugeführt wird, ihre einzige Wirkung in einer Temperaturerhöhung des betreffenden Körperteilchens besteht, dass also keine Änderung des Volumens stattfindet und kein Umsatz in andere Energieformen Platz greift. Das Mass für die Wärmemenge ist in der Theorie der Wärmeleitung das kalorimetrische.

Wenn ein Körperteilchen von der Masse m eine unendlich kleine Wärmemenge δQ gewinnt, so bezeichnen wir die dadurch verursachte Temperaturerhöhung durch δu, wo u die ursprüngliche Temperatur des Teilchens darstellt; dann besteht die Gleichung $\delta Q = m\gamma\delta u$, wo

---

bei *Duhamel,* J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 1; *J. Liouville,* J. de math. 2 (1837), p. 439; *Duhamel*, Par. sav. [étr.] 5 (1838), p. 440; J. éc. polyt. cah. 36 (1856), p. 1; *J. Amsler,* Schweiz. N. Denkschr. 12 (1852) (abgedr. J. f. Math. 42 (1851), p. 327).

Wärmeleitung unter Zugrundelegung des Dulong-Petit'schen (vgl. Anm. 12) statt des Newton'schen Erkaltungsgesetzes (s. Gl. (4)) für den Wärmeaustausch zwischen benachbarten Molekeln bei *G. Libri,* J. f. Math. 7 (1831), p. 116; *J. Liouville,* J. de math. 3 (1838), p. 350.

der Wert von γ im allgemeinen von u und von der Beschaffenheit des Stoffs abhängt. Die Grösse γ heisst die *spezifische Wärme* des Körperteilchens; es wurde von *Fourier* und seinen Nachfolgern angenommen, dass sie unabhängig von der Temperatur u sei; obgleich wir nun wissen, dass dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist, nicht einmal unter der obigen Voraussetzung, dass das Volumen des Teilchens keine Änderung erleidet, wird *Fourier*'s Annahme doch meistens in der mathematischen Theorie beibehalten[7]).

Wenn eine Platte[8]) von isotropem homogenen Stoff durch zwei Ebenen von grosser Ausdehnung begrenzt ist, und die Temperaturen u_0, u_1 in diesen Ebenen konstant erhalten werden, so fliesst Wärme von der wärmeren (u_1) nach der kälteren Seite (u_0) durch die Platte; die Wärmemenge Q, die in der Zeit t durch die Platte hindurchgeht, ist proportional mit der Oberfläche F der Platte, proportional mit der Zeit t, und umgekehrt proportional mit der Dicke der Platte; da sie überdies verschwindet, wenn $u_0 = u_1$, so setzt man

$$(1) \qquad Q = \varkappa \frac{u_1 - u_0}{d} Ft,$$

worin $\varkappa$ ein Faktor ist, der im allgemeinen eine Funktion der beiden Grenztemperaturen u_0, u_1 ist. Es wird nun als annähernd richtig angenommen, dass $\varkappa$ unabhängig ist von den Grenztemperaturen, und nur vom Material der Platte abhängt; $\varkappa$ heisst die (innere) Leitungsfähigkeit der Substanz der Platte.

Im Falle eines athermanen Stoffes macht man weiter die Annahme, dass ein Wärmeaustausch nur zwischen unmittelbar an einander grenzenden Teilen des Körpers stattfindet, man schliesst also die Wärmestrahlung auf endliche Entfernungen gänzlich aus. Wenn δF eine kleine ebene Fläche ist, welche einen Punkt P eines solchen Körpers enthält, und δQ die Wärmemenge bezeichnet, welche in der Zeit δt durch δF hindurchfliesst, so heisst der Grenzwert von

$$\frac{\delta Q}{\delta F \delta t},$$

wenn δQ, δt, δF unendlichklein werden, der *Wärmestrom im Punkt P senkrecht zur Oberfläche δF.* Durch Betrachtung der Wärmemengen, welche durch die Oberflächen eines unendlich kleinen Tetraeders fliessen, in Verbindung mit der Annahme, dass Wärme weder zerstört noch in andere Energieformen umgewandelt wird, kann man sodann zeigen, dass der Wärmestrom ein *Vektor* ist, dass also der Wärme-

7) Ein Ansatz zur Behandlung des allgemeinen Falles bei *Fourier*, Par. mém. 8 (1829), Oeuvres 2, p. 180.

8) Vgl. *Fourier*, „Théorie“, chap. I, sect. IV, sowie *Biot* (l. c. Anm. 3).

strom in der Richtung (l, m, n) gleich $l\mathfrak{Q}_x + m\mathfrak{Q}_y + n\mathfrak{Q}_z$ ist, worin $\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$ die Wärmeströme in den Richtungen der Koordinaten und l, m, n die Richtungskoeffizienten bezeichnen. Man nennt die Resultante von $\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$ *den Wärmestrom* $\mathfrak{Q}$ *im Punkte* (x, y, z); die absolute Grösse dieses Vektors misst die Intensität des Wärmestromes; $\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$ heissen die *Komponenten des Wärmestroms.*

Es wird vorausgesetzt, dass die Temperatur u im Punkte (x, y, z) zur Zeit t im allgemeinen eine stetige Funktion der Koordinaten x, y, z, t ist, welche stetige differentiierbare Derivierte nach diesen Koordinaten besitzt[9]); daraus folgt, dass zu einer jeden bestimmten Zeit t stetige Flächen existieren, auf welchen die Temperatur konstante Werte hat; diese Flächen heissen isotherme Flächen. Weiter folgt aus der Annahme, dass der Wärmestrom in einem Punkte nur von der Verteilung der Temperatur in der Umgebung des Punktes abhängt, dass in einem isotropen Körper der Wärmestrom immer senkrecht zu derjenigen isothermen Fläche gerichtet ist, auf welcher der betreffende Punkt liegt, und ferner, dass die Grösse des Wärmestroms durch $-\varkappa \partial u/\partial n$ ausgedrückt wird, wo dn ein Element der Normalen zur isothermen Fläche bezeichnet. Der Ausdruck $-\partial u/\partial n$ misst das Temperaturgefälle; *der Wärmestrom kommt also dem Produkt aus Temperaturgefälle und Leitungsfähigkeit gleich.* Da auch das Temperaturgefälle ein Vektor ist, so sind die Komponenten des Wärmestroms $\mathfrak{Q}$:

$$(2)\qquad (\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z) = \left(-\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Wenn zwei verschiedene Körper sich an einer Grenzfläche berühren, erleiden im allgemeinen die Komponenten des Wärmestromes einen Sprung an der Grenzfläche, aber die Komponenten in der Richtung der Normale haben in beiden Körpern denselben Wert. Von *Fourier* wird ausserdem angenommen, dass die Temperatur an der Grenzfläche keinen Sprung macht; die beiden Grenzbedingungen sind unter dieser Voraussetzung

$$(3)\qquad u = u', \quad l\varkappa\frac{\partial u}{\partial x} + m\varkappa\frac{\partial u}{\partial y} + n\varkappa\frac{\partial u}{\partial z} = l\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial x} + m\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial y} + n\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial z},$$

worin $\varkappa$, $\varkappa'$ die Leitungsfähigkeit der beiden Körper, u, u' ihre Tempe-

9) Selbstverständlich ist diese Voraussetzung mit der Vorstellung vom molekularen Aufbau der Materie strenge genommen unvereinbar, wie überhaupt die Behandlung der physikalischen Erscheinungen in ponderabeln Körpern mittels partieller Differentialgleichungen gewisse prinzipielle Schwierigkeiten aufweist. Vgl. hierzu *G. Prasad,* Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat. Göttinger Abhdlgen. (Neue Folge) 2 (1903) Nr. 4; insbesondere Part. II und III.

raturen, l, m, n die Richtungskoeffizienten der Normale im Punkte (x, y, z) der Grenzfläche bedeuten. Von *Poisson*[10]) wird die erste der obigen Bedingungen allgemeiner gefasst; er nimmt an, dass an der Grenzfläche zweier fester Körper, ähnlich wie man für die Grenzfläche eines festen Körpers und einer Flüssigkeit (vgl. Gl. (4)) anzusetzen pflegt:

$$l\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}+m\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}+n\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}=l\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial x}+m\varkappa'\frac{\partial u}{\partial y}+n\varkappa'\frac{\partial u}{\partial z}=q(u-u'),$$

wo q eine von der Beschaffenheit der beiden Körper in der Nähe der Grenzfläche abhängige Grösse ist. Mit $q=\infty$ folgen hieraus im besonderen die Gl. (3).

Wenn ein fester Körper von Luft oder von einer anderen Flüssigkeit umgeben ist, so wird die Wärmemenge, welche vom Körper an die Flüssigkeit oder umgekehrt abgegeben wird, zum Teil durch Leitung, zum Teil durch Strahlung an der Grenzfläche bedingt; es werden aber auch Bewegungen in der Flüssigkeit entstehen, und daher die Temperaturänderungen in der Nähe der Fläche zum Teil durch Konvektion hervorgerufen werden. Diese komplizierten Vorgänge der Berechnung zu unterwerfen wäre unmöglich ohne eine Hypothese, die die Wirkung aller drei Prozesse einigermassen richtig zusammenfasst. Man macht die Hypothese, dass die Wärmemenge, welche durch ein Flächenelement δF in der Zeit δt strömt, proportional mit $(u-u_0)\delta F\delta t$ ist, wo u die Temperatur des festen Körpers, u_0 diejenige der Flüssigkeit in der Nähe des Elements δF bedeutet; dieser Hypothese gemäss lautet die Bedingung an der Grenzfläche[11])

$$(4)\qquad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial n}=H(u-u_0),$$

worin dn ein Element der nach der Flüssigkeit gerichteten Normale bedeutet, und H eine von der Beschaffenheit der beiden Substanzen abhängige Grösse ist, welche die äussere Leitungsfähigkeit des Körpers genannt wird. Diese Gleichung soll die Gesamtwirkung von Leitung, Strahlung und Konvektion darstellen, und drückt das sogenannte *Newton'sche Gesetz der Abkühlung* aus; dasselbe kann jedoch nur als eine erste Näherung bei hinreichend kleinem Temperaturunterschiede $u-u_0$ gelten. *Dulong* und *Petit* haben zuerst versucht, dasselbe unter Ausschluss von Wärmestrahlung durch eine auf Beobachtung basierte Formel zu ersetzen[12]). Die Wärmeabgabe durch Strahlung

10) *Poisson,* „Théorie", p. 127; J. éc. polyt. cah. 19, p. 107.

11) *Fourier,* „Théorie", chap. II, sect. VII.

12) *Dulong* und *Petit,* Annal. chim. phys. 7 (1817), p. 225, 337; Einführung

andrerseits wird nach dem heutigen Stande der Wissenschaft durch das *Stefan*'sche Gesetz[13]) gegeben, wobei man der Wärmeabgabe nach *Dulong* und *Petit* diejenige nach *Stefan* zu überlagern hat. (Vgl. hierzu Nr. **21** dieses Art.)

3. Die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in einem isotropen festen Körper. Allgemeine Sätze. Bei Berücksichtigung der in Nr. 2 angegebenen Voraussetzungen und Definitionen ist es nun möglich, die partielle Differentialgleichung aufzustellen, welcher die Temperatur $u(x, y, z, t)$ im Inneren eines isotropen festen Körpers Genüge leistet. Es sei σ eine innerhalb des leitenden Körpers liegende geschlossene Fläche, γ die spezifische Wärme, ϱ die Dichtigkeit der Materie in einem Punkt auf oder innerhalb der Fläche σ. Da keine Wärme innerhalb σ erzeugt wird, so besteht die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \gamma\varrho u\, dx\, dy\, dz = \iint \varkappa\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right) d\sigma,$$

worin l, m, n die Richtungskoeffizienten der auf $d\sigma$ nach innen gerichteten Normale bedeuten, das dreifache Integral sich auf den Raum innerhalb σ bezieht, und das doppelte Integral auf die Oberfläche von σ. Indem man das Flächenintegral durch ein Volumenintegral ersetzt, erhält man

$$\iiint \left\{\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\} dx\, dy\, dz = 0.$$

Da die Fläche σ eine willkürliche ist, so muss in jedem Punkt innerhalb des leitenden Körpers die Gleichung

$$\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \tag{5}$$

erfüllt werden. Falls der Körper homogen ist, nimmt (5) die Form an

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{6}$$

Die Konstante

$$k = \frac{\varkappa}{\gamma\varrho} \tag{7}$$

bezeichnet man als Temperaturleitvermögen, weil bei gegebenen Oberflächentemperaturen die räumliche und zeitliche Temperaturverteilung im Innern nur von ihr abhängt.

---

dieses Gesetzes in die Theorie der Wärmeleitung schon bei *Kelland,* Theory of heat, Nr. 73, p. 69.

13) *J. Stefan,* Wien. Ber., Math. phys. Kl. 79 (1879), p. 391.