andrerseits wird nach dem heutigen Stande der Wissenschaft durch das *Stefan*'sche Gesetz[13]) gegeben, wobei man der Wärmeabgabe nach *Dulong* und *Petit* diejenige nach *Stefan* zu überlagern hat. (Vgl. hierzu Nr. **21** dieses Art.)

3. Die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in einem isotropen festen Körper. Allgemeine Sätze. Bei Berücksichtigung der in Nr. **2** angegebenen Voraussetzungen und Definitionen ist es nun möglich, die partielle Differentialgleichung aufzustellen, welcher die Temperatur $u(x, y, z, t)$ im Inneren eines isotropen festen Körpers Genüge leistet. Es sei σ eine innerhalb des leitenden Körpers liegende geschlossene Fläche, γ die spezifische Wärme, ϱ die Dichtigkeit der Materie in einem Punkt auf oder innerhalb der Fläche σ. Da keine Wärme innerhalb σ erzeugt wird, so besteht die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \gamma \varrho u \, dx\, dy\, dz = \iint \varkappa \left(l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z}\right) d\sigma,$$

worin l, m, n die Richtungskoeffizienten der auf $d\sigma$ nach innen gerichteten Normale bedeuten, das dreifache Integral sich auf den Raum innerhalb σ bezieht, und das doppelte Integral auf die Oberfläche von σ. Indem man das Flächenintegral durch ein Volumenintegral ersetzt, erhält man

$$\iiint \left\{\gamma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\} dx\, dy\, dz = 0.$$

Da die Fläche σ eine willkürliche ist, so muss in jedem Punkt innerhalb des leitenden Körpers die Gleichung

$$\gamma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \tag{5}$$

erfüllt werden. Falls der Körper homogen ist, nimmt (5) die Form an

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{6}$$

Die Konstante

$$k = \frac{\varkappa}{\gamma \varrho} \tag{7}$$

bezeichnet man als Temperaturleitvermögen, weil bei gegebenen Oberflächentemperaturen die räumliche und zeitliche Temperaturverteilung im Innern nur von ihr abhängt.

---

dieses Gesetzes in die Theorie der Wärmeleitung schon bei *Kelland,* Theory of heat, Nr. 73, p. 69.

13) *J. Stefan,* Wien. Ber., Math. phys. Kl. 79 (1879), p. 391.

Die Gleichung (5) resp. (6) ist die zuerst von *Fourier* aufgestellte *Bewegungsgleichung der Wärme* in einem leitenden Körper.

In der mathematischen Wärmeleitungstheorie handelt es sich hauptsächlich darum, ein Integral dieser partiellen Differentialgleichung zu finden, welches gegebenen Oberflächenbedingungen an der Grenze des Körpers genügt, wobei die Form des betreffenden Körpers und der thermische Anfangszustand desselben vorgeschrieben wird.

Wenn bei der Wärmebewegung die Temperatur in jedem Punkt (x, y, z) unabhängig von der Zeit ist, so heisst die Bewegung stationär; in diesem Falle lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0, \tag{8}$$

oder, wenn der Körper homogen ist,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u=0. \tag{9}$$

Die Differentialgleichung (8) resp. (9) ist dieselbe, wie sie auch in der Elektrostatik vorkommt, und die spezielle Form (9) ist die Grundgleichung in der Theorie des Gravitationspotentials. Die Bestimmung der stationären Temperatur in einem Körper bei gegebener Oberflächentemperatur fällt also mit der *Green'schen Aufgabe der gewöhnlichen Potentialtheorie* zusammen.

Für die allgemeinere Gleichung (6) der veränderlichen Wärmebewegung lassen sich *allgemeine Sätze* aufstellen, welche bekannten Sätzen der gewöhnlichen Potentialtheorie entsprechen. Es seien u, u' beliebige Funktionen, welche der Beschränkung unterliegen, innerhalb eines gegebenen Raumes S nebst ihren ersten Derivierten nach x, y, z von $t=0$ bis $t=t_1$ (mit ev. Ausschluss dieser Grenzen selbst) stetig zu sein; es lässt sich leicht beweisen, dass[14])

$$\int_0^{t_1} dt \int dS\left[u'\left(\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u\right)+u\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+k\Delta u'\right)\right]$$
$$=\int\{(uu')_{t_1}-(uu')_0\}\,dS+\int_0^{t_1} dt\int k\left(u'\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial u'}{\partial n}\right)d\sigma;$$

die Integration nach S ist durch den Raum S zu erstrecken, dn ist

14) Diese Formel und die nachfolgenden Anwendungen bei *B. Minnigerode* „Über Wärmeleitung in Krystallen", Diss. Göttingen 1862. Vgl. auch *J. Amsler,* J. f. Math. 42 (1851), p. 316, 327; *E. Beltrami,* Mem. Acc. Bologna (4) 8 (1887), p. 291; *E. Betti,* Mem. Soc. Ital. 40 (3), 1[2]; *A. Sommerfeld,* Math. Ann. 45 (1899), p. 263. Über den stationären Temperaturzustand siehe *K. von der Mühll,* Math. Ann. 2 (1870), p. 643.

ein nach dem Inneren von S gezogenes Element der Normale zum Oberflächenelement $d\sigma$.

Wenn nun u der Differentialgleichung (6) genügt, und wenn u' die „adjungierte" Gleichung[15])

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + k\Delta u' = 0$$

erfüllt und sich für $\lim t = t_1$ dem Wert

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k(t_1 - t)})^3} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y)^2+(z-z')^2}{4k(t_1-t)}}$$

nähert, so lässt sich beweisen, indem man den Punkt (x', y', z') durch eine kleine Oberfläche umhüllt und den von ihr eingeschlossenen Raum von der Integration S ausschliesst, dass der Wert $u(x', y', z', t_1)$ von u im Punkt (x', y', z') durch

$$u(x', y', z', t_1) = \int (uu')_{t=0}\, dS + \int_0^{t_1} dt \int k\left(u\frac{\partial u'}{\partial n} - u'\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

dargestellt wird. Anstatt u' führe man die Funktion $v(t) = u'(t_1 - t)$ ein; v genügt der Gleichung (6) und nähert sich für $\lim t = 0$ dem Wert

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k t})^3} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4kt}}.$$

Um nun die Temperatur $u(x', y', z', t_1)$ im Punkte $(x' \; y' \; z')$ zu bestimmen, wenn die Temperatur U der Oberfläche σ von S gegeben ist, muss man den Bedingungen, welchen v genügt, noch diejenige hinzufügen, dass v an der Oberfläche σ verschwinden soll. In diesem Fall erhalten wir

$$(10) \quad u(x', y', z', t_1) = \int u_0 v(t_1)\, dS + \int_0^{t_1} dt \int U \frac{\partial}{\partial n} v(t_1 - t)\, d\sigma;$$

diesem Resultat gemäss reduziert sich die Bestimmung von u auf die Bestimmung einer Funktion v, welche den obigen einfacheren Bedingungen zu genügen hat. Ist an der Oberfläche von S nicht die Temperatur des Körpers selbst, sondern die Temperatur U der Umgebung gegeben, so dass u der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(u - U), \quad h = \frac{H}{\varkappa}$$

15) In Bezug auf Randwertaufgaben im allgemeinen, sowie wegen des Begriffs der adjungierten Differentialgleichung vgl. Art. *Sommerfeld* (II A 7c, Nr. **4**, **9**, **10**, **14**).

zu genügen hat, so bestimme man v derart, dass an der Oberfläche

$$\frac{\partial v}{\partial n} = hv;$$

in diesem Fall wird u durch die Gleichung

$$(10') \quad u(x', y', z', t_1) = \int u_0 v(t_1)\, dS + \int_0^{t_1} dt \int h\, U v(t_1 - t)\, d\sigma$$

ausgedrückt.

Die Funktion v spielt hier eine ähnliche Rolle, wie die *Green'sche Funktion in der gewöhnlichen Potentialtheorie*; sie stellt die Temperatur dar, die zur Zeit t_1 an der Stelle (x', y', z') vorhanden ist, wenn zur Zeit $t = 0$ die Temperatur von S überall Null war und nur an der Stelle (x, y, z) einen unendlich grossen Wert hatte, vorausgesetzt, dass im ersten der obigen Fälle die Temperatur der Oberfläche, im zweiten die der Umgebung stets gleich Null ist.

Aus diesen Resultaten folgt leicht, dass es nicht zwei verschiedene Funktionen u geben kann, welche den ihnen auferlegten gleichen Bedingungen genügen, dass also die Lösung des Problems durch jene Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Übrigens lässt sich der Eindeutigkeitsbeweis auch führen, ohne dass dabei, wie es im Vorstehenden geschah, die Existenz der „Green'schen Funktion" v vorausgesetzt wird[16].

Aus der partiellen Differentialgleichung (6) schliesst man, wenn die Oberflächentemperatur von S stets Null ist:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int u^2\, dS = -\int k\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} dS;$$

ist nicht die Oberflächentemperatur selbst, sondern die Temperatur der Umgebung Null, so gilt dieselbe Gleichung bei Hinzufügung von $-h\int u^2\, dS$ auf der rechten Seite. Daraus folgt, dass $\int u^2\, dS$ in beiden Fällen beständig abnimmt, wenn t ins Unendliche wächst; die Grenze, der sich diese positive Grösse dabei nähert, *kann keine andere als Null sein.*

Die lineare Form der Wärmebewegungsgleichung zeigt unmittelbar, dass eine Summe von Lösungen abermals eine Lösung der Gleichung ist; wenn man also Lösungen so zusammensetzen kann, dass ihre Summe den Grenzbedingungen Genüge leistet, so ist letztere die (eindeutig bestimmte) Lösung der betreffenden Aufgabe. Man darf

16) Vgl. z. B. *Riemann-Weber,* Part. Differentialgl. II, p. 86; *Heine,* Kugelfunktionen 2, p. 307—312.

dabei den einzelnen Gliedern der Summe irgend welche Grenzbedingungen auferlegen, welche mit den Bedingungen verträglich sind, denen die Summe genügen soll. Ein wichtiges Beispiel dieser *Methode der Zusammensetzung von Lösungen* besteht darin, dass die Temperatur u in der Form einer Reihe $\sum u_r f_r(t)$ dargestellt wird, worin die Funktionen u_r unabhängig von t sind; aus der Differentialgleichung folgt dann, dass die Funktionen $f(t)$ die Form haben müssen $Ae^{-\alpha t}$, wo A und α Konstante, und dass die Funktionen u_r der Differentialgleichung

$$k\Delta u + \alpha u = 0$$

genügen müssen. Diese Darstellung eignet sich besonders für den Fall, in welchem der Körper seine Wärme an ein umgebendes Medium abgiebt, dessen Temperatur konstant und, was keine weitere Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, gleich Null angenommen werden möge; schreibt man in diesem Falle

$$u = \sum A_r e^{-\alpha_r t} u_r,$$ [17])

so müssen die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ aus der Oberflächenbedingung

$$\frac{\partial u_r}{\partial n} - hu_r = 0$$

bestimmt werden. Es lässt sich durch Anwendung der Differentialgleichung leicht beweisen, dass

$$(11)\qquad (\alpha_r - \alpha_s)\int\int\int \gamma \varrho u_r u_s \, dx\, dy\, dz = \int\int \varkappa \left(u_s \frac{\partial u_r}{\partial n} - u_r \frac{\partial u_s}{\partial n}\right) d\sigma;$$

da nun die rechte Seite durch Wahl der α zum Verschwinden gebracht ist, so wird

$$\int\int\int \gamma \varrho u_r u_s \, dx\, dy\, dz = 0;$$

auch den Wert von

$$\int\int\int \gamma \varrho u_r^2 \, dx\, dy\, dz$$

kann man in speziellen Fällen aus Gl. (11) entnehmen, indem man zur Grenze $\alpha_r = \alpha_s$ übergeht. Wenn die Anfangstemperatur $\Phi(x, y, z)$ gegeben ist, so lässt sie sich unter gewissen zu ermittelnden Beschränkungen in die Form entwickeln

---

17) Lösungen von der Form $e^{-\alpha t} u$ nennt *Kelvin* (*W. Thomson*) „harmonic solutions", Mathematical and physical Papers 2, p. 50. Die Funktionen u_r heissen Normalfunktionen, vgl. das Buch von *F. Pockels*, „Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$", Leipzig 1891, p. 93. Siehe auch *H. Poincaré*, Par. C. R. 107 (1888), p. 967 und Par. C. R. 104, p. 1754.

$$\Phi(x, y, z) = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_r u_r + \cdots,$$

wo A_r den Wert

$$\frac{\iiint \gamma \varrho u_r \Phi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint \gamma \varrho u_r^2\, dx\, dy\, dz}$$

hat[18]). Unter der angegebenen Grenzbedingung kann man mit Hilfe des Lehrsatzes

$$\iiint \gamma \varrho u_r u_s\, dx\, dy\, dz = 0$$

beweisen, dass alle α reell sind[19]), da ja, wenn komplexe und daher auch konjugiert komplexe α möglich wären, die linke Seite der vorigen Gleichung positiv ausfallen müsste, wenn man für u_r, u_s die zu konjugierten α gehörigen Funktionen u wählt. Ist dagegen die Temperatur des umgebenden Mediums variabel, so werden bei einem analogen Ansatz der Lösung die α im allgemeinen komplex.

Es habe ein leitender Körper die Anfangstemperatur Null und die Oberflächentemperatur $\Phi(t)$; wenn $\Phi(t) = 1$, so sei die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u = \Psi(x, y, z, t).$$

Dann lässt sich die Temperatur für allgemeine Werte von $\Phi(t)$ durch Zusammensetzung finden. *Es gilt nämlich*[20])

$$u = \Phi(0)\, \Psi(x, y, z, t) + \int_0^t \Phi'(t')\, \Psi(x, y, z, t - t')\, dt'$$

oder anders geschrieben

$$u = \int_0^t \Phi(t') \frac{d}{dt} \Psi(x, y, z, t - t')\, dt'. \tag{12}$$

Man kann auf ähnliche Weise verfahren, wenn der Körper sich durch Strahlung in ein umgebendes Medium mit der Temperatur $\Phi(t)$ abkühlt.

Bei vielen Aufgaben ist es zweckmässig, drei geeignet gewählte *orthogonale Koordinaten* h_1, h_2, h_3 als Raumkoordinaten anstatt der cartesischen anzuwenden; h_1, h_2, h_3 sind Parameter von drei Flächen,

18) Derartig allgemeine Koeffizientenbestimmungen scheinen zuerst von *J. R. Merian* bei einem hydrodynamischen Problem ausgeführt zu sein, Basel 1828, umgearbeitet von *K. Vondermühll,* Math. Ann. 27 (1886), p. 575.

19) *Poisson,* „Théorie", p. 178, 179; auch *Duhamel,* J. éc. polyt. 14, cah. 22 (1833).

20) Diese Methode hat im Anschluss an *Fourier,* Par. mém. 8 (1829) (Oeuvres 2, p. 161) im wesentlichen *Duhamel* gegeben J. éc. polyt. 14, cah. 22 (1833), p. 34; vgl. auch *Heine,* „Kugelfunktionen" 2, p. 311—314.

die sich im Punkt (x, y, z) orthogonal schneiden und welche je einer Flächenschar angehören. Die umgestaltete partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung lautet[21]), wenn h_1, h_2, h_3, t als unabhängige Variabele gewählt werden,

$$\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = H_1 H_2 H_3 \left\{\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\varkappa\frac{H_1}{H_2 H_3}\frac{\partial u}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\varkappa\frac{H_2}{H_3 H_1}\frac{\partial u}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\varkappa\frac{H_3}{H_1 H_2}\frac{\partial u}{\partial h_3}\right)\right\},$$

worin H_1 den Wert von

$$\left\{\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

bedeutet, und H_2, H_3 entsprechende Werte in Bezug auf h_2, h_3 haben; die Länge des Linienelementes

$$ds = \{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

lässt sich in der Form

$$\left\{\left(\frac{dh_1}{H_1}\right)^2 + \left(\frac{dh_2}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{dh_3}{H_3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ausdrücken.

Bei Aufgaben der Wärmeleitungslehre mag in Bezug auf die Grenzbedingungen bemerkt werden, dass man es an einer Grenzfläche im allgemeinen nicht mit dem Funktionswert selbst, sondern mit dem *Grenzwert der Funktion* zu thun hat. Wenn z. B. die Temperatur an der Oberfläche eines leitenden Körpers gegeben ist, so ist zu bewirken, dass $\lim u(x, y, z, t)$, wenn x, y, z gegen ihre Werte in einem Punkt der Oberfläche konvergieren, dem gegebenen Oberflächenwert gleich wird. Ebenso ist bei gegebener Anfangstemperatur $u_0(x, y, z)$ lediglich zu verlangen, dass $\lim u(x, y, z, t)$ für $t = 0$ gleich der Anfangstemperatur u_0 werde, während $u(x, y, z, 0)$ gegebenenfalls von u_0 verschieden ausfallen kann. Die Funktion $u_0(x, y, z)$ kann an einzelnen Flächen oder in einzelnen Punkten Unstetigkeiten erleiden, während die Funktion $u(x, y, z, t)$ für alle positive Werte von t doch stetig ist[22]).

Wenn der Temperaturzustand eines leitenden Körpers zu einer bestimmten Zeit gegeben ist, so kann man die Frage aufwerfen, *ob*

---

21) Diese Transformation rührt von *Lamé* her, J. éc. polyt. 14, cah. 23 p. 191, auch „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications", Paris 1857. Sie wurde auch von *Kelvin* (*W. Thomson*) gefunden Cambr. Math. J. 4 (1843), p. 33, und „Mathematical and physical Papers" 1, p. 25. Vgl. auch *Heine*, „Kugelfunktionen", p. 303—308.

22) *K. Weierstrass*, Berl. Sitzungs-Ber. (1885) p. 803; speziell mit Rücksicht auf die Wärmeleitung: *A. Sommerfeld*, Die willkürlichen Funktionen in der mathem. Physik. Diss. Königsberg 1891, *G. Prasad*, Göttinger Abhdlgn. (Neue Folge) 2 (1903) Nr. 4.

diese Temperaturverteilung aus einer früheren Verteilung durch Wärmeleitung entstanden sein kann. Die Antwort auf diese Frage ist, dass eine solche frühere Wärmeverteilung nicht immer existiert, aber dass sie sich in sehr allgemeinen Fällen eindeutig bestimmen lässt. Im Fall der linearen Leitung hat *P. Appell* [23]) eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die Existenz einer solchen vorhergehenden Wärmeverteilung aufgestellt. Jedenfalls lässt sich die Temperaturfunktion, wenn sie nicht konstant ist, niemals unendlich weit in die Vergangenheit zurückführen, ohne dass sie aufhört zu existieren oder endlich zu sein.

4. Die Wärmeleitung in krystallinischen Körpern. Wenn die Wärmeleitung in einem Krystall [24]) stattfindet, darf man im allgemeinen nicht annehmen, dass die Richtung des Wärmestromes senkrecht zu der isothermen Fläche liegt. Mit Rücksicht auf die Erfahrungsthatsache, dass der Wärmestrom durch jedes Flächenelement nur von der Temperaturverteilung in der nächsten Umgebung desselben abhängt, ist die einfachste Annahme die, dass die Komponenten des Wärmestroms sich als lineare Funktionen der Komponenten des Temperaturgefälles ausdrücken lassen, dass also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_x &= -\varkappa_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{12}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{13}\frac{\partial u}{\partial z},\\
\mathfrak{Q}_y &= -\varkappa_{21}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{22}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{23}\frac{\partial u}{\partial z},\\
\mathfrak{Q}_z &= -\varkappa_{31}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{32}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{33}\frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Hierin bedeuten ($\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$) die Komponenten des Wärmestromes, und die $\varkappa$ Konstanten, welche von der Beschaffenheit des Mediums abhängen; es wird gewöhnlich angenommen, dass diese Konstanten unabhängig sind von der Temperatur u; diese neun Konstanten heissen Konstanten der Wärmeleitungsfähigkeit. Die obigen Gleichungen haben

---

23) J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Siehe auch *Kelvin,* Cambr. Math. J. 4 (1843), p. 67, oder „Mathematical and physical Papers" 1, p. 39.

24) Die Wärmeleitung in Krystallen hat *Duhamel* zuerst behandelt, J. éc. polyt. 13, cah. 21 (1832), p. 356; 19 (1848), p. 155; Par. C. R. 25 (1842), p. 842; ebenda 27 (1848), p. 27. Siehe auch *P. O. Bonnet,* Par. C. R. 27 (1848), p. 49; *B. Minnigerode,* N. Jahrb. f. Mineralogie 1 (1886), p. 1; *P. Morin,* Par. C. R. 66 (1868), p. 1332; *M. J. Moutier,* Bull. soc. phil. (7) 8 (1884), p. 134; *Kelvin,* Math. and phys. Papers 1, p. 282. Eine gute Darstellung des Gegenstandes ist im Lehrbuch von *Liebisch,* „Physikalische Krystallographie", Leipzig 1891, zu finden.