$$x' = \sqrt{\frac{k}{k_1}}\,x, \quad y' = \sqrt{\frac{k}{k_2}}\,y, \quad z' = \sqrt{\frac{k}{k_3}}\,z,$$

so reduziert sich die Gleichung auf dieselbe Form wie bei einem isotropen Körper, nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u;$$

die in Nr. 3 enthaltenen Sätze über Lösungen dieser Gleichung lassen sich daher unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen.

5. Die lineare Wärmeleitung. Wenn die Wärmebewegung solcher Art ist, dass die isothermischen Flächen parallele Ebenen sind, so hängt die Temperatur ausser von der Zeit nur von einer Raumkoordinate ab. In diesem Fall, wo die Bewegung *linear* genannt wird, reduziert sich die Gleichung der Wärmeleitung auf die Form

$$\gamma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right); \tag{13}$$

wenn $\varkappa$ als konstant angenommen und wieder $k = \frac{\varkappa}{\gamma \varrho}$ gesetzt wird, hat die Gleichung die Form[29])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{14}$$

Diese Annahme einer konstanten Leitungsfähigkeit wird den Untersuchungen von *Fourier*, *Poisson* und anderen zu Grunde gelegt. Um die Differentialgleichungen (13) oder (14) anwenden zu können, wird vorausgesetzt, entweder dass der Leiter in der Richtung der yz-Ebene unendlich ausgedehnt ist, oder dass der leitende Körper aus einem Stab besteht, der vor seitlicher Ausstrahlung geschützt ist.

Hat man es andrerseits mit einem Stabe zu thun, der in ein Medium von konstanter Temperatur (die wir gleich Null annehmen können) seitlich ausstrahlt, so lässt sich, unter den Voraussetzungen, dass der Querschnitt und die äussere Leitungsfähigkeit konstant sind, die Differentialgleichung für die Wärmebewegung auf die Form (2) reduzieren. Die Gleichung lautet nämlich in diesem Fall zunächst:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h' u, \tag{15}$$

29) Mit der Integration dieser Gleichung haben sich viele Mathematiker beschäftigt; u. a. *Laplace*, J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 255; *Fourier*, „Théorie"; *Poisson*, „Théorie"; *Ampère*, J. éc. polyt. 10, p. 587; *L. Schläfli*, J. f. Math. 72 (1870), p. 263; *A. Harnack*, Zeitschr. Math. Phys. 32 (1887), p. 91; *S. v. Kowalewski*, J. f. Math. 80 (1875), p. 22; *G. Darboux*, Par. C. R. 106, p. 651; *P. Appell*, J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Siehe auch *Jordan*, „Cours d'Analyse" 3; *Boussinesq*, „Cours d'Analyse infinitésimale"; *Riemann-Hattendorff* und *Riemann-Weber*, „Part. Differentialgl."

wo h' eine von dem Umfang des Querschnitts und der äusseren Leitungsfähigkeit abhängige Konstante ist; (genauere Definition derselben in Nr. **15**, wo indessen wieder einfacher h statt h' geschrieben ist); setzt man

$$u = e^{-h't} v, \tag{16}$$

so genügt v einer Gleichung, die mit (14) der Form nach übereinstimmt[30]).

Eine einfache Lösung der Differentialgleichung (14) ist

$$u = A e^{\alpha x + k\alpha^2 t},$$

wo A, α willkürliche reelle oder komplexe Zahlen darstellen; schreibt man $\alpha = p \pm iq$, so ergibt sich als Lösung

$$u = A e^{px + k(p^2 - q^2)t} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (qx + 2kpqt),$$

oder als besonderer Fall derselben

$$u = A e^{-km^2 t} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx.$$

Durch Zusammensetzung solcher Lösungen, in denen den Konstanten p, q, resp. m, eine unendliche Anzahl verschiedener Werte zugeschrieben wird, haben *Fourier*, *Poisson* und *Duhamel* Ausdrücke in der Form von unendlichen Reihen und bestimmten Integralen erhalten, welche die Temperatur in speziellen Fällen der linearen Wärmeleitung ausdrücken. Indem sich *Fourier* die Aufgabe stellte, die einem *willkürlich* gegebenen Anfangstemperaturzustand entsprechende Lösung in der angegebenen Form zu erhalten, wurde er auf seine bahnbrechenden Untersuchungen der sogenannten *Fourier*'schen Reihen und Integrale geführt, welche in ihrer späteren Entwicklung einen so grossen Einfluss auf die reine Mathematik ausgeübt und so viele Anwendungen in der mathematischen Physik gefunden haben. Die wichtigsten auf diese Weise erhaltenen Resultate führen wir hier an.

a) Es sei ein unendlich ausgedehnter Leiter durch die beiden Ebenen $x = 0$, $x = a$ begrenzt; wenn die Ebenen die konstanten Temperaturen u_0, u_1 haben, und dieser Zustand so lange gedauert hat, dass der Anfangszustand keinen Einfluss mehr hat, so ist die Bewegung eine stationäre, und die Temperatur wird ausgedrückt durch[31])

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)\frac{x}{a}.$$

b) Ein Stab von der Länge a gebe Wärme durch Strahlung an

30) *Poisson*, „Théorie", p. 265.

31) *Fourier*, „Théorie", chap. VII.

ein Medium ab, welches die konstante Temperatur Null hat, und es gelten sonst die gleichen Bedingungen wie unter a), so ergiebt sich für die Temperatur im Zustand des Gleichgewichts[32])

$$u = \left[u_0 \,\mathfrak{Sin}\left\{\sqrt{\frac{h'}{k}}(a-x)\right\} + u_1 \,\mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\frac{h'}{k}}x\right)\right] \Big/ \mathfrak{Sin}\left(a\sqrt{\frac{h'}{k}}\right).$$

Wenn a unendlich gross gesetzt wird, so erhält man die Lösung

$$u = u_0 e^{-\sqrt{\frac{h'}{k}}x}$$

für den Fall eines unendlich langen Stabes, dessen Ende $x = 0$ die konstante Temperatur u_0 hat, und welcher die an diesem Ende eintretende Wärme durch laterale Strahlung verliert.

c) Es sei die Anfangstemperatur eines Leiters durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

ausgedrückt und die Temperatur der beiden Grenzflächen $x = 0$, $x = a$ Null. Die Lösung[33]) ist in diesem Fall gegeben durch die *Fourier*sche Reihe:

$$u = \sum A_n e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2}t} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

oder

$$u = \frac{2}{a}\sum e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2}t} \sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'.$$

Wenn a unendlich gross wird, so erhalten wir das *Fourier*'sche Integral:

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-k\alpha^2 t} f(x')\sin\alpha x\sin\alpha x'\,d\alpha\,dx'.$$

d) Für den in c) beschriebenen Leiter ist, wenn die Grenzebenen verschiedene konstante Temperaturen u_0, u_1 haben[34]),

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)\frac{x}{a} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\{u_0 - u_1(-1)^n\} e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2}t}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$+ \frac{2}{a}\sum e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2}t}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'.$$

---

32) *Fourier*, „Théorie", chap. I, sect. V. Wegen der experimentellen Bestätigung dieser Formel vgl. Nr. **20** dieses Art.

33) *Fourier*, „Théorie", chap. IX.

34) *Duhamel*, J. éc. polyt. **14**, cah. 22 (1833).

Hier ergiebt sich die Bedeutung der beiden ersten Terme der rechten Seite aus a), die des letzten aus c). Der dritte Term bedeutet diejenige Temperatur, die unser Leiter haben würde, wenn seine Anfangstemperatur gleich $-u_0-(u_1-u_0)\frac{x}{a}$ ist und seine Grenzebenen auf der Temperatur Null gehalten werden.

e) Die Lösung für denselben Leiter wie in d), wobei aber jetzt die Temperaturen der Grenzebenen vorgeschriebene Funktionen der Zeit $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ sein mögen, lässt sich nach Gl. (12) aus der Lösung in d) durch Zusammensetzung ableiten; sie lautet[35])

$$u=\frac{2k\pi}{a^2}\sum n\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^t e^{-\frac{k n^2\pi^2}{a^2}(t-t')}\{\varphi_0(t')-(-1)^n\varphi_1(t')\}\,dt'$$

$$+\frac{2}{a}\sum e^{-\frac{k n^2\pi^2}{a^2}t}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'.$$

Dieser Ausdruck stellt die Temperatur an den Grenzflächen selbst ersichtlich nicht dar, ergiebt aber die richtigen Oberflächenwerte $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, wenn man, von $x>0$ oder $x<a$ kommend, den Limes von u für $x=0$ oder $x=a$ bildet.

Setzen wir $\varphi_0(t)=\varphi_1(t)=\varphi(t)$, so wird der erste Teil des obigen Ausdrucks

$$\frac{4k\pi}{a^2}\sum(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\int_0^t e^{-\frac{k(2n+1)^2\pi^2}{a^2}(t-t')}\varphi(t')\,dt'.$$

Diese Formel lässt sich auf den Fall eines dünnen, ringförmigen[36]) Leiters von der Länge a mit konstantem Querschnitt anwenden, unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt $x=0$ die vorgeschriebene Temperatur $\varphi(t)$ hat, und dass keine laterale Strahlung stattfindet.

f) Die Temperatur eines Ringes, dessen Anfangstemperatur Null ist, von dem ein Querschnitt ($x=0$) auf der konstanten Temperatur u_0 gehalten wird und der in ein umgebendes Medium von der konstanten Temperatur Null ausstrahlt, ist mit Rücksicht auf den letzten Ausdruck und die Transformation (16) durch die Formel gegeben:

35) *Poisson,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 69; *Fourier,* Par. mém. 8 (1829), p. 581 (Oeuvres 2, p. 145); *Dirichlet,* J. f. Math. 5 (1830), p. 287 (Werke 1, p. 161).

36) Die Wärmeleitung in einem dünnen Ring hat *Fourier* behandelt, siehe „Théorie", chap. IV.

$$u = u_0 \frac{4\pi}{a^2} \sum (2n+1) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \left\{ \frac{1 - e^{-\left[h' + k\frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2}\right] t}}{\frac{h'}{k} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2}} \right\}.$$

g) Betrachten wir nun den Fall eines durch die Ebenen $x = 0$, $x = a$ begrenzten Leiters, bei welchem Strahlung über die beiden Grenzebenen stattfindet (vgl. auch Nr. **23**). Wenn die Temperatur der Umgebung in beiden Fällen Null ist, so lassen sich Lösungen von der Form

$$u = \sum e^{-k\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)$$

anwenden, wo λ eine der unendlich vielen reellen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda a}{2} = + \frac{h}{\lambda}, \quad \operatorname{tg} \frac{\lambda a}{2} = - \frac{\lambda}{h}$$

bezeichnet. *Fourier* hat die Entwicklung einer willkürlich gegebenen Funktion in der Form einer Reihe $\sum(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)$ untersucht[37]). Wenn $f(x)$ die Anfangstemperatur ist, so lautet das Resultat[38])

$$u = 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} e^{-k\lambda_r^2 t} \frac{\lambda_r \cos \lambda_r x + h \sin \lambda_r x}{2h + a(h^2 + \lambda_r^2)} \int_0^a (\lambda_r \cos \lambda_r x' + h \sin \lambda_r x') f(x') dx'.$$

Im Fall $a = \infty$ wird die entsprechende Formel

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x') e^{-k\lambda^2 t} \frac{(\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x)(\lambda \cos \lambda x' + h \sin \lambda x')}{h^2 + \lambda^2} d\lambda\, dx'.$$

Im letzteren Falle braucht man, wenn die Temperatur der Umgebung $\varphi(t)$ anstatt Null ist, nur den Ausdruck

$$\frac{2h}{\pi} \int_0^t dt' \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t') \lambda^2 e^{-k\lambda^2(t-t')} \frac{(\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x)(\lambda \cos \lambda x' + h \sin \lambda x')}{h^2 + \lambda^2} d\lambda\, dx'$$

hinzuzufügen, um die nunmehrige Temperaturverteilung im Innern des Leiters zu erhalten.

h) Es sei ein unendlich ausgedehnter Leiter durch die Ebene $x = 0$ begrenzt und die Temperatur der Grenzebene sei $A \cos(\lambda t + \beta)$, so lässt sich leicht verifizieren oder auch aus der Formel in e) ableiten, dass die Temperatur im leitenden Körper

$$A e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}\, x} \cos\left(\lambda t - x\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} + \beta\right)$$

37) *Fourier*, „Théorie", chap. VII.

38) *Poisson*, „Théorie", p. 267, 323. *Poisson* behandelt auch den allgemeinen Fall der Ausstrahlung in einen Raum von beliebiger Temperatur, ebenda p. 264.

ist[39]), vorausgesetzt, dass der Zustand schon so lange gedauert hat, dass alle Spuren der Anfangstemperatur verschwunden sind. Diese Formel findet Anwendung auf die Temperatur der Erde, wobei das in Betracht kommende Stück der Erdoberfläche als eben angesehen wird[40]). Es geht aus der Formel hervor, dass die Amplitude einer Temperaturschwankung nach der Tiefe hin schnell abnimmt und in einer gewissen Tiefe unmerklich wird. Die Maxima pflanzen sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2k\lambda}$ in die Tiefe fort; diese Geschwindigkeit nimmt ab, wenn die Periode wächst; insbesondere pflanzen sich die Tagesmaxima schneller fort als die Jahresmaxima.

Wenn Strahlung an der Grenzfläche $x = 0$ in ein Medium stattfindet, dessen Temperatur $A \cos(\lambda t + \beta)$ ist, so ergibt sich[41]) für die Temperatur in einem Punkt des Leiters

$$Ah\left\{h^2 + h\sqrt{\frac{2\lambda}{k}} + \frac{\lambda}{k}\right\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x} \cos\left(\lambda t - x\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} + \beta - \varepsilon_\lambda\right),$$

wo

$$\operatorname{tg} \varepsilon_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda}}{h\sqrt{2k} + \sqrt{\lambda}}.$$

Wenn die Temperatur der Umgebung $\varphi(t)$ ist und die Anfangstemperatur des Leiters $f(x)$, kann die Temperatur des Körpers durch[42])

$$\frac{h}{\pi}\int_0^\infty dt' \int_0^\infty \frac{\varphi(t') e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x} \cos\left\{\lambda(t - t') - \sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x - \varepsilon_\lambda\right\}}{\left\{h^2 + h\sqrt{\frac{2\lambda}{k}} + \frac{\lambda}{k}\right\}^{\frac{1}{2}}} d\lambda$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x') e^{-k\varrho^2 t} \frac{(\varrho \cos \varrho x + h \sin \varrho x)(\varrho \cos \varrho x' + h \sin \varrho x')}{h^2 + \varrho^2} d\varrho\, dx'$$

dargestellt werden; dieses Resultat ist mit dem am Ende von g) angegebenen äquivalent.

i) Aus dem *Fourier*'schen Integrale folgt, dass die Temperatur in einem Punkt eines unendlich ausgedehnten Körpers, dessen Anfangstemperatur $f(x)$ ist, durch die Formel[43])

39) *Poisson*, „Théorie", p. 346.

40) Den entsprechenden Fall der Kugeloberfläche behandelt *Fourier* in der Preisschrift von 1811, Par. mém. 5 (1821/22), p. 153, Oeuvres 2, p. 1.

41) *Poisson*, „Théorie", p 330 und supplément; siehe auch *Kelvin*, Cambr. Math. J. 3 (1842), p. 206 oder „Math. and phys. Papers" 1, p. 10—21.

42) *Poisson*, „Théorie", p. 334.

43) *Fourier*, „Théorie", chap. IX, wo die anderen Formen auch angegeben werden.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int\limits_{0}^{\infty} f(x') e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha(x-x')\, dx'$$

dargestellt ist. Dieses Resultat lässt sich auf die folgenden beiden Formen bringen, von denen die zweite schon vor *Fourier* von *Laplace*[44]) behandelt worden ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}\, dx',$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} f(x+2q\sqrt{kt})\, dq.$$

Im besonderen sei $f(x)=u_1$ für $x>0$, $f(x)=u_2$ für $x<0$; dann erhält man aus der zweiten Form für die Temperatur zur Zeit t an der Stelle x:

$$\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1-u_2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-q^2}\, dq.$$ [45]) [46])

Nimmt man z. B. $u_1=0$, $u_2=2$, so wird an der Stelle $x=0$ dauernd die Temperatur $u=(u_1+u_2)/2=1$ herrschen. Die vorige Formel geht in diesem Falle über in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-q^2}\, dq.$$

6. Die Behandlung der linearen Wärmebewegung nach der Methode der Quellpunkte. Wenn in einem unendlich ausgedehnten leitenden Körper die Anfangstemperatur $\varphi(x)$ überall verschwindet, mit Ausnahme der Umgebung einer einzelnen Ebene x', so ist die Temperatur zur Zeit t im Punkte x

$$\frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}},$$

---

44) *Laplace*, J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 255 (Oeuvres 13).

45) *Kelvin* hat diese Formel benutzt, um die Zeit abzuschätzen, die verstrichen ist, seit die Erdoberfläche fest wurde, siehe Edinb. Trans. 23 (1862) oder „Math. and phys. Papers" 3, p. 295; „On the secular cooling of the earth"; auch *Thomson* und *Tait*, Natural philosophy, appendix D.

46) Tafeln zur Berechnung dieses in der Wärmeleitung ebenso wie in der Gastheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtigen Integrales finden sich in jedem grösseren Handbuch über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Näheres hierüber in Encykl. I D 1, Art. *Czuber*, Anm. 123, und I D 2, Art. *Bauschinger*, Nr. 4.