$$\{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')\}^{\frac{1}{2}}$$

der beiden Punkte (ϱ, φ), (ϱ', φ').

Für eine ebene (*Riemann*'sche) Fläche mit einem r-fachen Windungspunkt[66]) lautet die entsprechende Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 k t} \lambda \, d\lambda \sum_{-\infty}^{\infty} J_{\frac{m}{r}}(\lambda \varrho) \, J_{\frac{m}{r}}(\lambda \varrho') \cos \frac{m}{r} (\varphi - \varphi').$$

Im Falle $r = 2$ findet man hieraus durch Summation der Reihe

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\sqrt{\pi k t})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{R^2}{4kt}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\varrho\varrho'}{kt}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Diese Lösung lässt sich auf den Fall anwenden, dass die Ebene (x, y) längs eines vom Nullpunkte auslaufenden Halbstrahles aufgeschnitten ist und die Wärmebewegung in dieser aufgeschnittenen Ebene untersucht werden soll.

10. Wärmeleitung in Körpern von verschiedenen speziellen Formen. Die Aufgabe, den stationären Wärmezustand eines Ellipsoides zu ermitteln, dessen Oberfläche auf gegebener Temperatur erhalten wird, hat *G. Lamé*[67]) unter Zugrundelegung der *elliptischen Koordinaten* zuerst gelöst. Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Oberfläche darstellt, sind diese Koordinaten im Punkte (x, y, z) die drei positiven Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - e^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - f^2} = 1,$$

worin

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad f^2 = a^2 - c^2;$$

---

66) *A. Sommerfeld*, Math. Ann 45 (1894), p. 276.

67) *G. Lamé*, J. de math. 4 (1839), p. 126. Andere Arbeiten von *Lamé*, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, befinden sich in den sechs ersten Bänden und im Band 8 desselben Journals. Eine Übersicht über die ersten Resultate Ann. Chim. Phys. 53 (1833), p. 190. Die erste Einführung der isothermen Koordinaten geschah in einem Mémoire in den Savans étrangers 5, 1838, abgedruckt J. de math. 2 (1837), p. 147; siehe auch J. éc. polyt. cah. 23 sowie die beiden Werke „Leçons sur les fonctions inverses“, Paris 1857, und „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications“, Paris 1859.

bezeichnet man diese Koordinaten durch ϱ, μ, ν, so genügen sie im Inneren des Ellipsoids den Bedingungen

$$a \geqq \varrho \geqq f, \quad f \geqq \mu \geqq e, \quad e \geqq \nu \geqq 0.$$

Wenn man die drei *elliptischen Integrale*

$$\xi = \int_f^\varrho \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - f^2}\sqrt{\varrho^2 - e^2}}, \quad \eta = \int_e^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - e^2}\sqrt{f^2 - \mu^2}},$$

$$\zeta = \int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{f^2 - \nu^2}\sqrt{e^2 - \nu^2}}$$

einführt, so nimmt die Differentialgleichung der Wärmebewegung die Form an

$$(\mu^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\varrho^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\varrho^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Es wird nun gezeigt, dass diese Gleichung durch das Produkt

$$E(\varrho)\,E(\mu)\,E(\nu)$$

erfüllt wird, wo $E(\varrho)$ eine ganze Funktion vom Grade n in ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - e^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - f^2}$ ist, und $E(\mu)$, $E(\nu)$ dieselben Funktionen von μ, $\sqrt{\mu^2 - e^2}$, $\sqrt{f^2 - \mu^2}$, resp. ν, $\sqrt{f^2 - \nu^2}$, $\sqrt{e^2 - \nu^2}$ sind. Die Funktion E heisst eine *Lamé'sche Funktion*, und $E(\varrho)$ erfüllt die Gleichung

$$(\varrho^2 - e^2)(\varrho^2 - f^2)\frac{d^2 E}{d\varrho^2} + \varrho(2\varrho^2 - e^2 - f^2)\frac{dE}{d\varrho} + [(e^2 + f^2)p - n(n+1)\varrho^2]E = 0,$$

worin p einen Parameter bezeichnet, der so zu bestimmen ist, dass die vorstehende Gleichung eine Lösung der erwähnten Art besitzt, nämlich eine ganze Funktion des n^{ten} Grades in ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - e^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - f^2}$. Es wird weiter gezeigt, dass es $2n + 1$ reelle verschiedene Werte von p giebt, welche der obigen Bedingung genügen, und dass daher $2n + 1$ verschiedene Funktionen $E(\varrho)$ des Grades n existieren. Dementsprechend hat man $2n + 1$ verschiedene Produkte $E(\varrho)\,E(\mu)\,E(\nu)$ zur Verfügung, die der Gleichung der Wärmeleitung Genüge leisten, und welche eindeutig und endlich im ganzen Ellipsoid sind. (Näheres über *Lamé*'sche Funktionen in Bd. II der Encykl.)

Die Aufgabe des stationären Wärmeflusses wird nun dadurch gelöst, dass die gegebene Oberflächentemperatur in eine (im allgemeinen unendliche) Summe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=2n+1} A_{n,m} E_{n,m}(\mu)\, E_{n,m}(\nu)$$

entwickelt wird; der Temperaturzustand in einem jeden Punkte im Innern des Ellipsoids wird alsdann durch den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=2n+1} A_{n,m} \frac{E_{n,m}(\varrho)}{E_{n,m}(a)} E_{n,m}(\mu) E_{n,m}(\nu)$$

dargestellt.

Die Lösung des Problems der nicht stationären Wärmebewegung in einem Ellipsoid hat *Mathieu*[68]) auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert. Im Fall des Rotationsellipsoids[69]) reduziert sich das *Lamé*'sche Produkt auf das Produkt einer trigonometrischen Funktion und zweier Kugelfunktionen. Die nicht stationäre Wärmebewegung in einem Rotationsellipsoid hat *C. Niven*[70]) behandelt.

Die Bestimmung der Wärmebewegung in einem elliptischen Cylinder kommt auf die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda^2 u = 0$$

hinaus; setzt man $x = \mathfrak{Cos}\, \omega \cos \varphi$, $y = \mathfrak{Sin}\, \omega \sin \varphi$, so wird diese Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 (\cos^2 \varphi - \mathfrak{Cos}^2\, \omega) u = 0.$$

Eine Lösung derselben ist $u = \mathsf{E}(\omega)\, \mathsf{E}(\varphi)$, wo $\mathsf{E}(\omega)$, $\mathsf{E}(\varphi)$ den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 \mathsf{E}}{d\omega^2} - (\lambda^2\, \mathfrak{Cos}^2\, \omega - p)\, \mathsf{E} = 0, \quad \frac{d^2 \mathsf{E}}{d\varphi^2} + (\lambda^2 \cos^2 \varphi - p)\, \mathsf{E} = 0$$

Genüge leisten; der Parameter p muss dabei so bestimmt werden, dass $\mathsf{E}(\varphi)$ in φ mit der Periode 2π periodisch wird. Diese Funktionen heissen *Funktionen des elliptischen Cylinders*[71]); durch Zusammensetzung der Produkte $e^{-\alpha t} \cos mz \cdot \mathsf{E}(\omega)\, \mathsf{E}(\varphi)$ mit $\alpha = k(m^2 + \lambda^2)$ kann der Temperaturzustand unter gegebenen Bedingungen theoretisch

68) *E. Mathieu*, Cours de physique, p. 269.

69) *G. Lamé*, J. de math. 4 (1839), p. 351; *Heine*, J. f. Math. 26 (1843), p. 185; *J. Liouville*, J. de math. 11 (1846), p. 217, 261.

70) *C. Niven*, Lond. Phil. Trans. 171 (1879), p. 117. Für den Fall des Rotationsparaboloids siehe *K. Baer*, Diss. Halle 1881.

71) *E. Mathieu* hat den ersten Versuch gemacht, diese Gleichung zu lösen, J. de math. (2) 13 (1868), p. 137—203; auch „Cours de physique mathématique", 1873, p. 122—164. In *Heine*'s „Kugelfunktionen" 1, p. 401 und 2, p. 202 findet man eine Behandlung dieser Funktionen. Siehe auch *Besser*, Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 257, 305; *Maclaurin*, Cambr. Phil. Trans. 17 (1899), p. 41; *Lindemann*, Math. Ann. 22 (1883), p. 117.

ermittelt werden. Die entsprechenden Funktionen für den parabolischen Cylinder hat *H. Weber*[72]) entwickelt.

Der stationäre Temperaturzustand in einem von zwei nicht konzentrischen Kugeln begrenzten Raum wurde von *C. Neumann*[73]) untersucht. Derselbe Forscher[74]) hat auch die nicht-stationäre Wärmebewegung in demselben Falle behandelt; es kommen dabei die sogenannten peripolaren Koordinaten und gewisse Kugelfunktionen zur Anwendung, deren Grad die Hälfte einer ganzen Zahl ist. *Mathieu*[75]) hat sich mit dem Wärmeproblem in einem von zwei nicht-konzentrischen Kreiscylindern begrenzten Gebiet und in Cylindern mit lemniskatischem Querschnitt beschäftigt.

11. Theorie des Schmelzens und des Gefrierens bei Wärmeleitung. Man kann die Wärmeleitungstheorie auf eine Art von Problemen anwenden, bei denen die Wärmebewegung eine Änderung im Aggregatzustand des Leiters verursacht[76]).

Wenn ein Eisprisma durch die beiden Ebenen $x = 0$, $x = c$ begrenzt ist, und die Temperatur der unteren Ebene $x = 0$ konstant gleich $U (> 0)$ erhalten wird, so wird bei der Wärmebewegung das Eis allmählich in Wasser verwandelt, und es handelt sich darum, die Höhe h des geschmolzenen Teils des Prismas zu irgend einer Zeit t zu bestimmen, nachdem das Schmelzen angefangen hat. Es bezeichne λ die Schmelzwärme der Volumeneinheit des Eises, so wird in der Zeit dt die Wärmemenge $-\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} dt$ darauf verwendet, das Eis auf einer Länge dh des Prismas in Wasser zu verwandeln, wobei die Temperatur zunächst den Nullwert beibehält; wir erhalten also

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} dt = \lambda\, dh, \quad \text{für } x = h.$$

Nun genügt der Ausdruck

72) *H. Weber,* Math. Ann. 1 (1869), p. 31, siehe auch *K. Baer,* Progr. Realgymn. Küstrin, 1883.

73) *C. Neumann,* Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht konzentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Halle 1862. Vgl. *Heine,* „Kugelfunktionen" 2, p. 261. Siehe auch *Frosch,* Zeitschr Math. Phys. 17 (1872), p. 498.

74) *C. Neumann,* Theorie der Elekrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Halle 1864. Siehe auch *Hicks,* „Toroidal functions", Lond. Phil. Trans. 172 (1882), p. 609.

75) *E. Matthieu,* Par. C. R. 68 (1869), p. 590; J. de math. (2) 14 (1869), p. 65.

76) *L. Saalschütz,* Astr. Nachr. Nr. 1321 (1861), § 12 ff.; *J. Stefan,* Wien. Ber. 98^{2a} (1889), p. 473, 616, 965 und Monatshefte f. Math. u. Phys., 1. Jahrg. 1890, p. 1.